Vol. 38 (2018)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

自适应非张量积小波紧框架图像去噪

黄素莹, 羿旭明
(武汉大学数学与统计学院, 湖北 武汉 430072)

摘 要: 本文研究了图像去噪的问题. 利用光滑余因子协调法, 构造了样条空间 $S_6^4(\Delta_{mn}^{(2)})$ 中的二元六次样条函数, 以此作为尺度函数, 并基于酉延拓定理, 构造了非张量积小波紧框架. 利用构造的非张量积小波紧框架, 提出了基于香农熵自适应确定最优小波紧框架分解层数以及改进的 NormalShrink 自适应阈值算法, 并给出了图像去噪实例和结果分析, 获得了理想的数值结果, 显示了本文方法的有效性.

关键词: 非张量积小波紧框架; 最优分解层数; 自适应阈值; 图像去噪
MR(2010) **主题分类号**: 65T60; 94A08 **中图分类号**: O29
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2018)03-0549-08

1 引言

图像去噪是进行图像处理的前提, 作为一项基础性工作, 许多学者对图像去噪方法进行了大量的研究实验. 在众多方法中, 对图像在频域进行阈值量化的去噪效果得到学者们的广泛认可 [1−3,6]. 它的主要思路分为两步, 第一步是选用分解工具, 将图像分解至频域, 第二步是选取适当的阈值和阈值函数, 在频域对图像进行阈值量化. 其中, 针对第一步, 先后有学者提出了小波分解、小波包分解、最优小波包分解等方法, 均能达到一定的去噪效果, 但它们分解的方向性比较有限, 使得去噪过程对图像的细节和边缘信息缺少保护, 得到的去噪后图像往往过于模糊. 之后, Ron 和 Shen[4,5] 提出了基于酉延拓定理 (UEP) 的非张量积小波紧框架分解思想, 王等 [6] 在此基础上构造了 16 个基于二元三次样条函数的非张量积小波紧框架数字滤波器, 其分解可以包含更多的方向信息, 能较好地保护图像的细节和边缘, 但他们在后半部分的阈值选择上不尽理想, 因此去噪效果还有提升空间. 而针对阈值和阈值函数的选选取, 研究文献中先后提出了 VisuShrink、NeighShrink 和 NormalShrink 等自适应阈值算法 [1,2] 和相应的软硬阈值函数, 均能够达到很好的去噪效果, 在研究中被广泛接受.

本文在文献 [6] 的基础上, 构造了基于二元六次样条函数的非张量积小波紧框架, 基于香农熵采用最优分解层数自适应确定方法, 并结合 NormalShrink 自适应阈值算法, 在噪声方差估计方法上做相应的改进, 增强了算法的自适应性, 由此形成本文的自适应非张量积小波紧框架图像去噪算法.

2 非张量积小波紧框架的构造

UEP 最早由 Ron 和 Shen[4,5] 提出, 王等 [6] 进一步讨论了其推广和应用, 并给出了如下定理.

*收稿日期: 2016-09-29 接收日期: 2017-03-08
基金项目: 国家自然科学基金面上项目 (11671307).
作者简介: 黄素莹 (1994–), 女, 湖北鄂州, 硕士, 主要研究方向: 小波分析理论及应用、图像处理.

定理 2.1 (UEP 准则) 设 $\phi \in L_2(R^2)$ 为一个具有紧支撑的细分函数, 满足

$$\lim_{\xi \in R^2, \xi \to 0} \hat{\phi}(\xi) = 1,$$

且 $\left[\hat{\phi}, \hat{\phi}\right] := \sum\limits_{j \in 2\pi Z^2} \left|\hat{\phi}(\cdot - j)\right|^2$ 本性有界, 其细分面罩 h_0 为有限序列, 满足

$$\left\|\hat{h}_0(\xi) - 1\right\| \le C \left\|\xi\right\|, \xi \in R^2.$$

若 $\{h_1, h_2, \cdots, h_r\}$ 是一组有限序列集合, 其对应的傅立叶变换 $\hat{h}_l(\xi)$ $(l = 1, 2, \cdots, r)$ 均可测和本性有界, 且对任意的 $\nu \in \{0, \pi\}^2 \backslash (0, 0)$ 和 $\xi \in [-\pi, \pi]^2$, 满足

$$\sum_{l=0}^{r} \left|\hat{h}_l(\xi)\right|^2 = 1, \ \sum_{l=0}^{r} \hat{h}_l(\xi) \overline{\hat{h}_l(\xi + \nu)} = 0. \tag{2.1}$$

定义函数族 $\Psi = \{\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_r\}$, $\hat{\psi}_l(2\cdot) = \hat{h}_l(\cdot)\hat{\phi}(\cdot)$, $l = 1, 2, \cdots, r$, 则小波系

$$X(\Psi) = \left\{\psi_{l,k,j} = 2^k \psi_l(2^k \cdot -j) : 1 \le l \le r, k \in Z, j \in Z^2\right\}$$

形成 $L_2(R^2)$ 的一个小波紧框架.

满足定理 2.1 的细分函数 ϕ 生成 $L_2(R^2)$ 的多分辨分析

$$\{V_k\}_{k \in Z} = \mathrm{span}\{\phi_{k,j} = 2^k \phi(2^k \cdot -j), k \in Z, \mathrm{j} \in Z^2\}$$

且对任意的 $f \in L_2(R^2)$, 有

$$\sum_{j \in Z^2} \langle f, \phi_{k,j} \rangle \phi_{k,j} = \sum_{j \in Z^2} \langle f, \phi_{k-1,j} \rangle \phi_{k-1,j} + \sum_{l=1}^{r} \sum_{j \in Z^2} \langle f, \psi_{l,k-1,j} \rangle \psi_{l,k-1,j}, \tag{2.2}$$

其中 $\{\langle f, \phi_{k,j} \rangle, \langle f, \psi_{l,k,j} \rangle, l = 1, 2, \cdots, r\}_{k \in Z}$ 为框架系数.

记 $c_{k,j} = \langle f, \phi_{k,j} \rangle$, $d_{k,j}^l = \langle f, \psi_{l.k.j} \rangle$, $l = 1, 2, \cdots, r$, 根据公式 (2.2) 可以导出如下基于小波紧框架的分解和重构公式 [6]

$$\begin{cases} c_{k-1,j}[p] = 2 \sum\limits_{s \in Z^2} \overline{h_0}[s - 2p] \ c_{k,j}[s], \\ d_{k-1,j}^l[p] = 2 \sum\limits_{s \in Z^2} \overline{h_l}[s - 2p] \ c_{k,j}[s], l = 1, 2, \cdots, r, \end{cases} \tag{2.3}$$

$$c_{k,j}[s] = 2 \sum_{p \in Z^2} h_0[s - 2p] \ c_{k-1,j}[p] + 2 \sum_{l=1}^{r} \sum_{p \in Z^2} h_l[s - 2p] d_{k-1,j}^l[p]. \tag{2.4}$$

利用光滑余因子协调法 [7−8], 构造样条空间 $S_6^4(\Delta_{mn}^{(2)})$ 中的二元六次样条函数 $B(x, y)$, 它的支集中心位于点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 且关于支集中心对称, 其傅立叶变换为

$$\widehat{B}(w, t) = e^{-(w+t)i} (\frac{\sin \frac{w}{2}}{\frac{w}{2}})^2 (\frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}})^2 (\frac{\sin \frac{w+t}{2}}{\frac{w+t}{2}})^2 (\frac{\sin \frac{w-t}{2}}{\frac{w-t}{2}})^2.$$

当取 $\phi(x,y)=B(x,y)$ 时, $\phi(x,y)$ 满足定理 2.1 的条件, 其符号 $\hat{h}_0(w,t)$ 为

$$\hat{h}_0(w,t)=e^{-(w+t)i}(\cos\frac{w}{2})^2(\cos\frac{t}{2})^2(\cos\frac{w+t}{2})^2(\cos\frac{w-t}{2})^2.$$

再根据公式 (2.1) 推出与之相对应的非张量积小波紧框架 $\left\{\hat{h}_l\right\}_{l=1}^{80}$(计算求得 $r=80$). 记

$$\widehat{H}_{a,b,c,d}=e^{-(w+t)i}G_a(\frac{w}{2})G_b(\frac{t}{2})G_c(\frac{w+t}{2})G_d(\frac{w-t}{2})\ (a,b,c,d=0,1,2),$$

$$G_a(t)=\begin{cases}\cos^2 t, a=0,\\ \cos t\sin t, a=1,\\ \sin^2 t, a=2,\end{cases}$$

从而得到由 $\widehat{H}_{a,b,c,d}$ 表示的 81 个符号为

$$\begin{aligned}
&\hat{h}_0=\widehat{H}_{0,0,0,0},\hat{h}_1=\sqrt{2}\widehat{H}_{0,0,0,1},\hat{h}_2=\widehat{H}_{0,0,0,2},\hat{h}_3=\sqrt{2}\widehat{H}_{0,0,1,0},\hat{h}_4=2\widehat{H}_{0,0,1,1},\hat{h}_5=\sqrt{2}\widehat{H}_{0,0,1,2},\\
&\hat{h}_6=\widehat{H}_{0,0,2,0},\hat{h}_7=\sqrt{2}\widehat{H}_{0,0,2,1},\hat{h}_8=\widehat{H}_{0,0,2,2},\hat{h}_9=\sqrt{2}\widehat{H}_{0,1,0,0},\hat{h}_{10}=2\widehat{H}_{0,1,0,1},\\
&\hat{h}_{11}=\sqrt{2}\widehat{H}_{0,1,0,2},\hat{h}_{12}=2\widehat{H}_{0,1,1,0},\hat{h}_{13}=2\sqrt{2}\widehat{H}_{0,1,1,1},\hat{h}_{14}=2\widehat{H}_{0,1,1,2},\hat{h}_{15}=\sqrt{2}\widehat{H}_{0,1,2,0},\\
&\hat{h}_{16}=2\widehat{H}_{0,1,2,1},\hat{h}_{17}=\sqrt{2}\widehat{H}_{0,1,2,2},\hat{h}_{18}=\widehat{H}_{0,2,0,0},\hat{h}_{19}=\sqrt{2}\widehat{H}_{0,2,0,1},\hat{h}_{20}=\widehat{H}_{0,2,0,2},\\
&\hat{h}_{21}=\sqrt{2}\widehat{H}_{0,2,1,0},\hat{h}_{22}=2\widehat{H}_{0,2,1,1},\hat{h}_{23}=\sqrt{2}\widehat{H}_{0,2,1,2},\hat{h}_{24}=\widehat{H}_{0,2,2,0},\hat{h}_{25}=\sqrt{2}\widehat{H}_{0,2,2,1},\\
&\hat{h}_{26}=\widehat{H}_{0,2,2,2},\hat{h}_{27}=\sqrt{2}\widehat{H}_{1,0,0,0},\hat{h}_{28}=2\widehat{H}_{1,0,0,1},\hat{h}_{29}=\sqrt{2}\widehat{H}_{1,0,0,2},\hat{h}_{30}=2\widehat{H}_{1,0,1,0},\\
&\hat{h}_{31}=2\sqrt{2}\widehat{H}_{1,0,1,1},\hat{h}_{32}=2\widehat{H}_{1,0,1,2},\hat{h}_{33}=\sqrt{2}\widehat{H}_{1,0,2,0},\hat{h}_{34}=2\widehat{H}_{1,0,2,1},\hat{h}_{35}=\sqrt{2}\widehat{H}_{1,0,2,2},\\
&\hat{h}_{36}=2\widehat{H}_{1,1,0,0},\hat{h}_{37}=2\sqrt{2}\widehat{H}_{1,1,0,1},\hat{h}_{38}=2\widehat{H}_{1,1,0,2},\hat{h}_{39}=2\sqrt{2}\widehat{H}_{1,1,1,0},\hat{h}_{40}=4\widehat{H}_{1,1,1,1},\\
&\hat{h}_{41}=2\sqrt{2}\widehat{H}_{1,1,1,2},\hat{h}_{42}=2\widehat{H}_{1,1,2,0},\hat{h}_{43}=2\sqrt{2}\widehat{H}_{1,1,2,1},\hat{h}_{44}=2\widehat{H}_{1,1,2,2},\hat{h}_{45}=\sqrt{2}\widehat{H}_{1,2,0,0},\\
&\hat{h}_{46}=2\widehat{H}_{1,2,0,1},\hat{h}_{47}=\sqrt{2}\widehat{H}_{1,2,0,2},\hat{h}_{48}=2\widehat{H}_{1,2,1,0},\hat{h}_{49}=2\sqrt{2}\widehat{H}_{1,2,1,1},\hat{h}_{50}=2\widehat{H}_{1,2,1,2},\\
&\hat{h}_{51}=\sqrt{2}\widehat{H}_{1,2,2,0},\hat{h}_{52}=2\widehat{H}_{1,2,2,1},\hat{h}_{53}=\sqrt{2}\widehat{H}_{1,2,2,2},\hat{h}_{54}=\widehat{H}_{2,0,0,0},\hat{h}_{55}=\sqrt{2}\widehat{H}_{2,0,0,1},\\
&\hat{h}_{56}=\widehat{H}_{2,0,0,2},\hat{h}_{57}=\sqrt{2}\widehat{H}_{2,0,1,0},\hat{h}_{58}=2\widehat{H}_{2,0,1,1},\hat{h}_{59}=\sqrt{2}\widehat{H}_{2,0,1,2},\hat{h}_{60}=\widehat{H}_{2,0,2,0},\\
&\hat{h}_{61}=\sqrt{2}\widehat{H}_{2,0,2,1},\hat{h}_{62}=\widehat{H}_{2,0,2,2},\hat{h}_{63}=\sqrt{2}\widehat{H}_{2,1,0,0},\hat{h}_{64}=2\widehat{H}_{2,1,0,1},\hat{h}_{65}=\sqrt{2}\widehat{H}_{2,1,0,2},\\
&\hat{h}_{66}=2\widehat{H}_{2,1,1,0},\hat{h}_{67}=2\sqrt{2}\widehat{H}_{2,1,1,1},\hat{h}_{68}=2\widehat{H}_{2,1,1,2},\hat{h}_{69}=\sqrt{2}\widehat{H}_{2,1,2,0},\hat{h}_{70}=2\widehat{H}_{2,1,2,1},\\
&\hat{h}_{71}=\sqrt{2}\widehat{H}_{2,1,2,2},\hat{h}_{72}=\widehat{H}_{2,2,0,0},\hat{h}_{73}=\sqrt{2}\widehat{H}_{2,2,0,1},\hat{h}_{74}=\widehat{H}_{2,2,0,2},\hat{h}_{75}=\sqrt{2}\widehat{H}_{2,2,1,0},\\
&\hat{h}_{76}=2\widehat{H}_{2,2,1,1},\hat{h}_{77}=\sqrt{2}\widehat{H}_{2,2,1,2},\hat{h}_{78}=\widehat{H}_{2,2,2,0},\hat{h}_{79}=\sqrt{2}\widehat{H}_{2,2,2,1},\hat{h}_{80}=\widehat{H}_{2,2,2,2}.
\end{aligned}$$

进而得到对应的一组 81 个数字滤波器 $h_l\,(l=0,1,\cdots,80)$, 如下所示

$$h_0=\frac{1}{256}\begin{bmatrix}0&0&1&2&1&0&0\\0&2&6&8&6&2&0\\1&6&14&18&14&6&1\\2&8&18&24&18&8&2\\1&6&14&18&14&6&1\\0&2&6&8&6&2&0\\0&0&1&2&1&0&0\end{bmatrix},\ h_1=\frac{\sqrt{2}}{256i}\begin{bmatrix}0&0&1&2&1&0&0\\0&0&2&6&6&2&0\\-1&-2&0&6&10&6&1\\-2&-6&-6&0&6&6&2\\-1&-6&-10&-6&0&2&1\\0&-2&-6&-6&-2&0&0\\0&0&-1&-2&-1&0&0\end{bmatrix},$$

$$\cdots\cdots$$

$$h_{79} = -\frac{\sqrt{2}}{256i}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & -6 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 6 & -2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, h_{80} = \frac{1}{256}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 8 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3 自适应非张量积小波紧框架图像去噪算法

3.1 最优分解层数的自适应确定

文献 [6] 推广的基于二元三次样条函数的非张量积小波紧框架分解, 采用预先确定分解层数的方法, 这样导致去噪算法缺乏自适应性. 本文在基于二元六次样条函数的非张量积小波紧框架分解过程中, 采用自适应确定最优分解层数的方法, 通过计算每一次分解之后母带与各子带的“价值函数”, 来确定是否保留此次分解. 当母带的“价值”大于各子带的“价值”之和时, 保留此次分解并继续下一层分解, 否则摈弃此次分解且分解过程结束.

对于“价值函数”的选择, 本文通过实验比较, 选用香农熵作为“价值函数”, 其计算公式为

$$SE(D) = -\sum_i d_i^2 \log(d_i^2),$$

其中 D 是母带或者各子带对应的系数矩阵, d_i 是矩阵元素.

3.2 自适应阈值的确定

本文基于去噪效果考虑, 在 NormalShrink 自适应阈值算法上, 针对噪声方差 σ_η^2 的估计做了相应的改进, 形成本文的自适应阈值算法. NormalShrink 自适应阈值公式为

$$T_{i,j} = \frac{\beta_j \sigma_\eta^2}{\sigma_{i,j}}, i = 1, 2, \cdots, I; j = 1, 2, \cdots, J, \tag{3.1}$$

其中 J 是总分解层数, I 是每一层的子带个数, S_j 是第 j 层各子带的大小, $\beta_j = \sqrt{\log(\frac{S_j}{J})}$, σ_η^2, $\sigma_{i,j}^2$ 分别表示噪声和含噪图像中第 j 层第 i 个高频子带的方差.

由于去噪后图像系数和噪声系数是相互独立的, 因此有 $\sigma_{i,j}^2 = \sigma_{x,i,j}^2 + \sigma_\eta^2$, 其中 $\sigma_{x,i,j}^2$ 是去噪后图像中第 j 层第 i 个高频子带的方差.

图像经过分解至频域之后, 噪声信息大多保留在高频子带, 而这些高频子带的方差可以看作是噪声方差与去噪后图像方差的相加. 因此本文选取第 1 层分解之后的 80 个高频子带, 分别计算其方差 $\sigma_{i,1}^2$ $(i = 1, 2, \cdots, 80)$, 然后取其中最小值, 并将其作为噪声方差 σ_η^2 的估计, 即

$$\sigma_\eta^2 = \min\{\sigma_{i,1}^2 \,|i = 1, 2, \cdots, 80\}. \tag{3.2}$$

3.3 自适应非张量积小波紧框架图像去噪算法

上文构造的基于二元六次样条函数的非张量积小波紧框架具有 81 个二维滤波器, 对图像进行分解时可以获得高频部分 80 个方向上的信息 [6], 从而为图像的处理提供了多通道上的信息, 因此, 在降噪过程中, 更有利于刻画图像的细节和边缘, 便于后续的处理. 通过自适应确定最优分解层数和阈值, 进一步增强了算法的自适应性.

自适应非张量积小波紧框架图像去噪的具体算法如下.

步骤 1 对于原始的灰度图像 I_0, 利用小波紧框架分解公式 (2.3) 实现图像的第 1 层分解, 得到第 1 层的近似系数 D_1 和 80 个方向的细节系数, 计算 $\sigma_{i,1}^2$ $(i=1,2,\cdots,80)$, 由公式 (3.2) 得到噪声方差估计 σ_η^2;

步骤 2 对第 j $(j=1,2,\cdots,J)$ 层的近似系数 D_j 继续分解, 得到第 $j+1$ 层的近似系数 D_{j+1} 和细节系数 $D_{i,j+1}$ $(i=1,2,\cdots,80)$, 计算 $SE(D_j)$ 和 $SE(D_{i,j+1})$, 当 $SE(D_j) > \sum\limits_{i=1}^{80} SE(D_{i,j+1})$ 时, 取 $j+1 \to j$, 转步骤 2, 当 $SE(D_j) \le \sum\limits_{i=1}^{80} SE(D_{i,j+1})$ 时, 分解结束, 转步骤 3;

步骤 3 针对上述各层 80 个方向的细节系数, 计算 $\sigma_{i,j}^2$ 和 β_j, 并运用公式 (3.1) 计算 T_{ij}, 再对每层基于相应的阈值和软阀值方法进行阈值量化, 得到新的细节系数;

步骤 4 基于新的细节系数和末层的近似系数, 利用小波紧框架重构公式 (2.4) 实现图像的重构, 得到去噪后的图像 I_1.

4 图像去噪的实例与结果分析

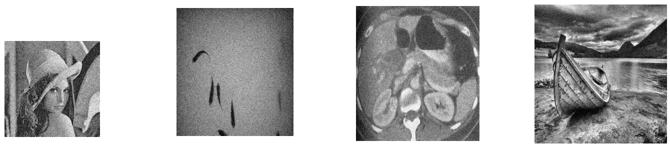
本文选取含有高斯白噪声的 lena 图像、弱图像、急性胆囊炎 CT 医学图像和自然图像来综合验证算法的可行性和有效性. 选用峰值信噪比 $PNSR = 10\lg\frac{255^2}{MSE}$ 指标来定量评价去噪效果, 其中

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(I_0(k) - I_1(k)\right)^2$$

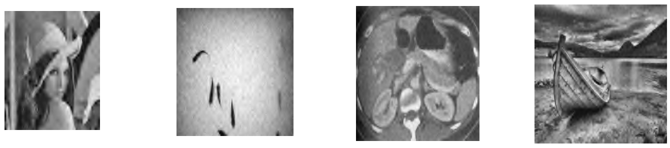
表示均方误差, n 是图像的总像素个数, $I_0(k)$ 和 $I_1(k)$ 分别表示去噪前后的图像像素灰度值.

分别利用 $sym4$ 小波 ($sym4\_w$)、$db4$ 小波 ($db4\_w$)、$sym4$ 小波包 ($sym4\_wp$)、$db4$ 小波包 ($db4\_wp$)、基于二元三次样条函数的非张量积小波紧框架 (23_ntptwf) 和本文基于二元六次样条函数的非张量积小波紧框架 (26_ntptwf) 对图像进行去噪 (其中前 4 种的分解层数为 3 层, 选用 NormalShrink 自适应阈值算法; 23_ntptwf 的分解层数为 2 层, 26_ntptwf 经自适应确定最优分解层数为 1 层, 采用本文改进的 NormalShrink 自适应阈值算法), 其去噪效果如图 1 所示, PNSR 值如表 1 所示. 从以上方法的去噪效果可以看出, $sym4\_w$、$db4\_w$、$sym4\_wp$ 和 $db4\_wp$ 方法在去除噪声的同时, 缺乏对图像细节和边缘的保护使得去噪后的图像过于模糊, 23_ntptwf 去噪效果有所改善. 而利用本文所构造的 26_ntptwf 去噪, 数值结果显示, 去噪效果优于前四种方法, 其 PNSR 值也高于 23_ntptwf.

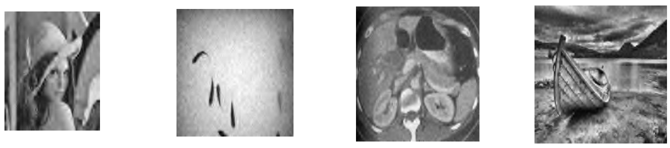
针对本文提出的非张量积小波紧框架的最优分解层数自适应确定方法, 为了显示其有效性, 除了自适应确定的最优分解层数 1 层, 再分别选择分解层数为 2、3、4、5 层, 同时运用基于二元六次样条函数的非张量积小波紧框架和本文改进的 NormalShrink 自适应阈值算法进行去噪, 其效果如图 2 所示, PNSR 值如表 2 所示. 可以看出, 本文自适应确定的最优分解层数对应的去噪效果和 PNSR 值都优于其它分解层数.



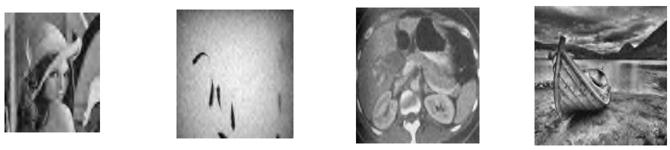
(a)lena 图像 (b) 弱图像 (c) 医学图像 (d) 自然图像



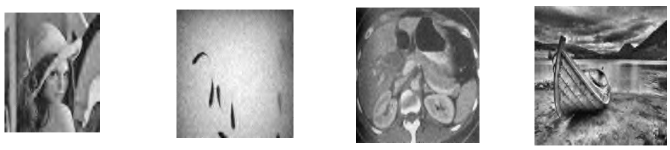
(a1)$sym4\_w$ (b1)$sym4\_w$ (c1)$sym4\_w$ (d1)$sym4\_w$



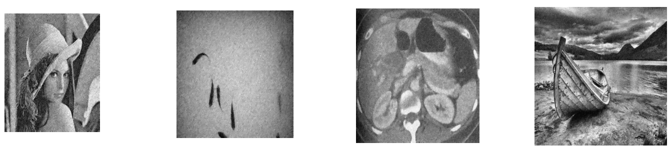
(a2)$db4\_w$ (b2)$db4\_w$ (c2)$db4\_w$ (d2)$db4\_w$



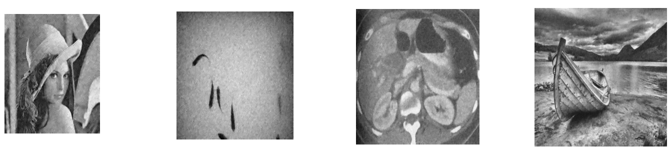
(a3)$sym4\_wp$ (b3)$sym4\_wp$ (c3)$sym4\_wp$ (d3)$sym4\_wp$



(a4)$db4\_wp$ (b4)$db4\_wp$ (c4)$db4\_wp$ (d4)$db4\_wp$



(a5)23$_ntptwf$ (b5)23$_ntptwf$ (c5)23$_ntptwf$ (d5)23$_ntptwf$



(a6)26$_ntptwf$ (b6)26$_ntptwf$ (c6)26$_ntptwf$ (d6)26$_ntptwf$

图 1: 几种方法的去噪效果对比

(a1)26_$ntptwf$ (a2)2 层分解 (a3)3 层分解 (a4)4 层分解 (a5)5 层分解

(b1)26_$ntptwf$ (b2)2 层分解 (b3)3 层分解 (b4)4 层分解 (b5)5 层分解

(c1)26_$ntptwf$ (c2)2 层分解 (c3)3 层分解 (c4)4 层分解 (c5)5 层分解

(d1)26_$ntptwf$ (d2)2 层分解 (d3)3 层分解 (d4)4 层分解 (d5)5 层分解

图 2: 不同分解层数与最优分解层数的去噪效果对比

表 1: 几种方法去噪的 PNSR 值对比

	lena 图像	弱图像	医学图像	自然图像
$sym4\_w$	46.0194	48.6226	47.2142	44.1825
$db4\_w$	46.2377	48.5029	46.3295	44.5582
$sym4\_wp$	47.0944	49.0269	47.4173	44.9610
$db4\_wp$	47.2332	48.9668	46.3471	45.3165
23_$ntptwf$	52.3131	53.0460	54.1876	49.6674
26_$ntptwf$	63.4361	61.4755	60.1400	59.4284

表 2: 不同分解层数与最优分解层数去噪的 PNSR 值对比

	lena 图像	弱图像	医学图像	自然图像
最优分解	63.4361	61.4755	60.1400	59.4284
2 层分解	50.6490	52.8494	53.7063	48.7522
3 层分解	47.7658	48.1083	49.3054	47.6844
4 层分解	46.7265	47.6344	48.8109	45.6655
5 层分解	45.2110	48.3867	47.3793	43.1069

5 结语

本文针对图像的去噪, 构造了基于二元六次样条函数的非张量积小波紧框架, 而在框架分解层数和阈值的选取上, 分别提出了基于香农熵自适应确定最优分解层数的方法和基于改进的 NormalShrink 自适应阈值算法, 提高了算法的自适应性, 在保证去噪效果的同时, 实现了对图像细节和边缘的更好保护.

参 考 文 献

[1] Mantosh Biswas, Hari Om. An adaptive wavelet thresholding image denoising method[J]. Nat. Conf. Comm., 2013: 246–252.

[2] Bibina V C, Sanoj Viswasom. Adaptive wavelet thresholding and joint bilateral filtering for image denoising[J]. Ann. IEEE India Conf., 2012: 1100–1104.

[3] Fathi Abdolhossein, Naghsh-Nilchi. Efficient image denoising method based on a new adaptive wavelet packet thresholding function[J]. IEEE Trans. Image Proc., 2012, 21(9): 3981–3990.

[4] Ron A, Shen Z W. Affine systems: the analysis of the analysis operator[J] . J. Funct. Anal., 1997, 148(2): 408–447.

[5] Shen Z W, Xu Z Q. On B-spine framelets derived from the unitary extension principle[J]. SIAM J. Math. Anal., 2012, 45(1): 127–151.

[6] 陈聪, 王仁宏. 二元 B - 样条构造非张量积紧框架及其应用 [D]. 大连: 大连理工大学, 2013.

[7] 王仁宏, 崔锦泰. 关于一个二元 B - 样条基 [J]. 中国科学 (A 辑), 1984, 9: 784–795.

[8] 王仁宏, 施锡泉, 罗钟铉, 苏志勋. 多元样条函数及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1994.

[9] 蔡敦虎, 羿旭明. 小波基的选取对图像去噪的影响 [J]. 数学杂志, 2005, 25(2): 185–190.

SELF-ADAPTIVE NON-TENSOR PRODUCT TIGHT WAVELET FRAME IMAGE DENOISING

HUANG Su-ying, YI Xu-ming

(*School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China*)

Abstract: In this paper, we research the problem of image denoising. Via the use of the smoothing cofactor-conformality method, it constructs the bivariate and sextic spline function in spline space $S_6^4(\Delta_{mn}^{(2)})$, and while do it as scaling function, the non-tensor product tight wavelet frame is constructed based on the unitary extension principe. Then we propose the algorithm of the optimal decomposition levels of tight wavelet frame is self-adaptive determined based on the shannon entropy and the modified NormalShrink self-adaptive threshold algo-rithm by using the non-tensor product tight wavelet frame above, and offer the cases of image denoising and result analysis. The ideal numerical results are obtained, which verify the validity of this algorithm.

Keywords: non-tensor product tight wavelet frame; optimal decomposition levels; Normal-Shrink self-adaptive threshold; image denoising

2010 MR Subject Classification: 65T60; 94A08