

Heisenberg 李 (超) 代数的自同构群

刘 蕾, 唐黎明

(哈尔滨师范大学数学科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150025)

摘 要: 本文研究了 Heisenberg 李 (超) 代数的自同构群. 利用 Heisenberg 李 (超) 代数与线性李 (超) 代数之间的同构, 获得了 Heisenberg 李 (超) 代数的自同构群的子群, 包括内自同构群、中心自同构群、对合自同构群.

关键词: Heisenberg 李代数; Heisenberg 李超代数; 自同构群

MR(2010) 主题分类号: 17B30; 17B40

中图分类号: O152.5

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2018)03-0502-09

1 引言

近年来, Heisenberg 李 (超) 代数的结构和表示一直是非常重要的研究课题, 许多学者对此有着广泛研究. 例如, 文 [1] 研究了特征 0 代数闭域上 $2m + n + 1$ 维 Heisenberg 李超代数的表示; 文 [2] 研究了复数域上无限维 Heisenberg 代数的全形和全形的导子代数, 证明了其全形的导子代数是一个完备李代数; 文 [3] 研究了特征 2 域上 $2n + 1$ 维 Heisenberg 李代数的同调; 文 [4] 研究了向量超空间上有限维 Heisenberg 李超代数不变的超对称和超正交双线性型; 文 [5] 研究了特征 0 代数闭域上两种类型 Heisenberg 李超代数的极小忠实表示.

本文约定在交换环上讨论 Heisenberg 李代数的自同构群, 在特征 0 代数闭域上讨论 Heisenberg 李超代数的自同构群. 仿照文 [6] 中交换环上严格上三角矩阵李代数的自同构和文 [7] 中复向量空间上 Heisenberg 李代数的自同构的刻画, 参照文 [3, 7] 中 Heisenberg 李代数的定义, 利用文 [7] 中 Heisenberg 李代数与线性李代数之间的同构, 本文研究了交换环上 Heisenberg 李代数的自同构, 包括内自同构、中心自同构、对合自同构, 进而得到其自同构群的子群, 包括内自同构群、中心自同构群、对合自同构群. 利用文 [5] 中有限维 Heisenberg 李超代数的定义, 本文建立了 Heisenberg 李超代数与线性李超代数之间的同构, 从而研究了特征 0 代数闭域上 Heisenberg 李超代数的自同构, 包括内自同构、中心自同构、对合自同构, 进而得到其自同构群的子群, 包括内自同构群、中心自同构群、对合自同构群.

2 基本概念和引理

令 R 是具有单位元的交换环并且 $M_n(R)$ 是 R 上所有 $n \times n$ 矩阵构成的集合, 其中 n 是正整数. 令 e_{ij} 表示第 i 行第 j 列元素为 1, 而其余元素为 0 的矩阵, 其中 i, j 是正整数.

*收稿日期: 2017-01-16

接收日期: 2017-03-17

基金项目: 黑龙江省教育厅科学技术项目 (12541246).

作者简介: 刘蕾 (1993-), 女, 黑龙江哈尔滨, 硕士, 主要研究方向: 李代数与李超代数.

通讯作者: 唐黎明.

定义 2.1 [7] 令 $H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| x \in R^{1 \times n}, z \in R, y \in R^{n \times 1} \right\}$, 则 H 关于李运算

$$[h_1, h_2] = h_1 h_2 - h_2 h_1, \quad \forall h_1, h_2 \in H$$

作成李代数, 称 H 为 Heisenberg 李代数.

令 $\mathbb{F}$ 是特征 0 代数闭域并且 $M_n(\mathbb{F})$ 是 $\mathbb{F}$ 上所有 $n \times n$ 矩阵构成的集合, 其中 n 是正整数.

定义 2.2 [5] $\mathbb{F}$ 上具有一维中心的二步幂零李超代数称为 Heisenberg 李超代数, 并且 Heisenberg 李超代数分为以下两种类型.

(1) 令 $\mathfrak{H}_{m,n} = (\mathfrak{H}_{m,n})_{\bar{0}} \oplus (\mathfrak{H}_{m,n})_{\bar{1}}$ 是具有偶中心的 Heisenberg 李超代数, 设

$$\{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m, z \mid w_1, \dots, w_n\}$$

为它的一个基, 并且李超运算由以下给出 $[u_i, v_i] = -[v_i, u_i] = z = [w_j, w_j], \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, 其余基元素之间的李超运算均为 0.

(2) 令 $\mathfrak{H}_n = (\mathfrak{H}_n)_{\bar{0}} \oplus (\mathfrak{H}_n)_{\bar{1}}$ 是具有奇中心的 Heisenberg 李超代数, 设

$$\{v_1, \dots, v_n \mid z, w_1, \dots, w_n\}$$

为它的一个基, 并且李超运算由以下给出 $[v_i, w_i] = z = -[w_i, v_i], \forall i = 1, \dots, n$, 其余基元素之间的李超运算均为 0.

根据定义 2.2 证得以下两个引理.

引理 2.3 令 $\mathbb{F}$ 上 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{A}_{\bar{1}}$ 是一个线性李超代数, 其中

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\bar{0}} &= \text{span}_{\mathbb{F}}\{e_{12}, \dots, e_{1,m+1}, e_{2,m+2}, \dots, e_{m+1,m+2}, e_{1,m+2}\}, \\ \mathcal{A}_{\bar{1}} &= \text{span}_{\mathbb{F}}\left\{\frac{1}{2}e_{1,m+3} + e_{m+3,m+2}, \dots, \frac{1}{2}e_{1,m+n+2} + e_{m+n+2,m+2}\right\}. \end{aligned}$$

设线性映射 f

$$\begin{aligned} f: \mathfrak{H}_{m,n} &\rightarrow \mathcal{A}, \\ h &\mapsto f(h), \quad \forall h \in \mathfrak{H}_{m,n}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} f(u_i) &= e_{1,i+1} \in \mathcal{A}_{\bar{0}}, \quad f(v_i) = e_{i+1,m+2} \in \mathcal{A}_{\bar{0}}, \quad f(z) = e_{1,m+2} \in \mathcal{A}_{\bar{0}}, \\ f(w_j) &= \frac{1}{2}e_{1,m+2+j} + e_{m+2+j,m+2} \in \mathcal{A}_{\bar{1}}, \quad \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

则 f 是一个李超代数同构.

引理 2.4 令 $\mathbb{F}$ 上 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\bar{0}} \oplus \mathcal{B}_{\bar{1}}$ 是一个线性李超代数, 其中

$$\mathcal{B}_{\bar{0}} = \text{span}_{\mathbb{F}}\{e_{12}, \dots, e_{1,n+1}\}, \quad \mathcal{B}_{\bar{1}} = \text{span}_{\mathbb{F}}\{e_{1,n+2}, e_{2,n+2}, \dots, e_{n+1,n+2}\}.$$

设线性映射 g

$$\begin{aligned} g: \mathfrak{H}_n &\rightarrow \mathcal{B}, \\ h &\mapsto g(h), \quad \forall h \in \mathfrak{H}_n, \end{aligned}$$

其中 $g(v_i) = e_{1,i+1} \in \mathcal{B}_{\bar{0}}$, $g(z) = e_{1,n+2} \in \mathcal{B}_{\bar{1}}$, $g(w_i) = e_{i+1,n+2} \in \mathcal{B}_{\bar{1}}$, $\forall i = 1, \dots, n$, 则 g 是一个李超代数同构.

3 主要结果及证明

记 $\text{Aut}(H)$ 为 Heisenberg 李代数 H 的自同构群.

定理 3.1 设 $d \in M_{n+2}(R)$ 为可逆的对角矩阵, $x \in H$. 令 $\alpha = d + x$, 则 α 可逆. 设映射

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha : H &\rightarrow H, \\ h &\mapsto \sigma_\alpha(h), \quad \forall h \in H,\end{aligned}$$

其中 $\sigma_\alpha(h) = \alpha h \alpha^{-1}$, 则 σ_α 是 H 的一个自同构, 称为 H 的内自同构. 令 G 是 H 的所有内自同构构成的集合, 则 G 是 $\text{Aut}(H)$ 的子群, 称为 H 的内自同构群.

证 易知 σ_α 是双射且是线性变换. 由已知得 $\alpha^{-1}\alpha = e$, 其中 e 是单位矩阵. $\forall h_1, h_2 \in H$, 可得

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha([h_1, h_2]) &= \sigma_\alpha(h_1 h_2 - h_2 h_1) = \alpha(h_1 h_2) \alpha^{-1} - \alpha(h_2 h_1) \alpha^{-1}, \\ [\sigma_\alpha(h_1), \sigma_\alpha(h_2)] &= \sigma_\alpha(h_1) \sigma_\alpha(h_2) - \sigma_\alpha(h_2) \sigma_\alpha(h_1) = \alpha(h_1 h_2) \alpha^{-1} - \alpha(h_2 h_1) \alpha^{-1},\end{aligned}$$

因此 $\sigma_\alpha([h_1, h_2]) = [\sigma_\alpha(h_1), \sigma_\alpha(h_2)]$. 故 σ_α 是 H 的一个自同构. $\forall \sigma_\alpha, \sigma_\beta \in G$, $h \in H$, 可得

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta(h) = (\alpha\beta)h(\alpha\beta)^{-1} = \sigma_{\alpha\beta}(h),$$

因此 $\sigma_\alpha \sigma_\beta = \sigma_{\alpha\beta} \in G$. $\forall \sigma_\alpha \in G$, $h \in H$, 可得

$$\sigma_\alpha \sigma_{\alpha^{-1}} = \alpha \alpha^{-1} h (\alpha^{-1})^{-1} \alpha^{-1} = h,$$

因此 $\sigma_{\alpha^{-1}} = \sigma_\alpha^{-1} \in G$. 故 G 是 $\text{Aut}(H)$ 的子群.

定理 3.2 令 $F = \{f \in \text{Hom}_R(H, R) \mid f(y) = 0, \forall y \in \delta^{[1]}(H)\}$, 其中 $\delta^{[1]}(H) = [H, H]$. $\forall f \in F$, 设映射

$$\begin{aligned}\psi_f : H &\rightarrow H, \\ h &\mapsto \psi_f(h), \quad \forall h \in H,\end{aligned}$$

其中 $\psi_f(h) = h + f(h)e_{1,n+2}$, 则 ψ_f 是 H 的一个自同构, 称为 H 的中心自同构. 令 S 是 H 的所有中心自同构构成的集合, 则 S 是 $\text{Aut}(H)$ 的子群, 称为 H 的中心自同构群.

证 易知 ψ_f 是双射且是线性变换. $\forall h_1, h_2 \in H$, 可得

$$\begin{aligned}\psi_f([h_1, h_2]) &= [h_1, h_2] + f([h_1, h_2])e_{1,n+2} = [h_1, h_2], \\ [\psi_f(h_1), \psi_f(h_2)] &= [h_1, h_2] + [h_1, f(h_2)e_{1,n+2}] + [f(h_1)e_{1,n+2}, h_2] \\ &\quad + [f(h_1)e_{1,n+2}, f(h_2)e_{1,n+2}] = [h_1, h_2],\end{aligned}$$

因此 $\psi_f([h_1, h_2]) = [\psi_f(h_1), \psi_f(h_2)]$, 故 ψ_f 是 H 的一个自同构. $\forall \psi_f, \psi_g \in S$, $h \in H$, 可得

$$\psi_f \psi_g(h) = h + (g(h) + f(h))e_{1,n+2} = \psi_{f+g}(h),$$

因此 $\psi_f\psi_g = \psi_{f+g} \in S, \forall \psi_f \in S, h \in H$, 可得 $\psi_f\psi_{-f}(h) = (h - f(h)e_{1,n+2}) + f(h)e_{1,n+2} = h$, 因此 $\psi_{-f} = \psi_f^{-1} \in S$. 故 S 是 $\text{Aut}(H)$ 的子群.

定理 3.3 令 $\gamma = e_{1,n+2} + e_{2,n+1} + \cdots + e_{n+2,1}$. 设映射

$$\begin{aligned} w_0 : H &\rightarrow H, \\ h &\mapsto w_0(h), \quad \forall h \in H, \end{aligned}$$

其中 $w_0(h) = -\gamma h^T \gamma$, 则 w_0 是 H 的一个自同构, 称为 H 的对合自同构. 令 $W = \{\iota, w_0\}$, 其中 ι 是恒等变换, 则 W 是 $\text{Aut}(H)$ 的子群, 称为 H 的对合自同构群.

证 易知 w_0 是双射且是线性变换. 由已知得 $\gamma^2 = e, \gamma^T = \gamma$, 其中 e 是单位矩阵. $\forall h_1, h_2 \in H$, 可得

$$\begin{aligned} w_0([h_1, h_2]) &= w_0(h_1 h_2 - h_2 h_1) = -\gamma h_2^T h_1^T \gamma - (-\gamma h_1^T h_2^T \gamma), \\ [w_0(h_1), w_0(h_2)] &= [-\gamma h_1^T \gamma, -\gamma h_2^T \gamma] = \gamma h_1^T h_2^T \gamma - \gamma h_2^T h_1^T \gamma, \end{aligned}$$

因此 $w_0([h_1, h_2]) = [w_0(h_1), w_0(h_2)]$. 故 w_0 是 H 的一个自同构. $\forall w_0 \in W, h \in H$, 可得 $w_0 w_0(h) = -\gamma(-\gamma h^T \gamma)^T \gamma = h$, 因此 $w_0^2 = \iota \in W$. 故 W 是 $\text{Aut}(H)$ 的子群.

记 $\text{Aut}(\mathfrak{H}_{m,n}), \text{Aut}(\mathfrak{H}_n)$ 分别为 Heisenberg 李超代数 $\mathfrak{H}_{m,n}, \mathfrak{H}_n$ 的自同构群.

定理 3.4 设 $d = \sum_{k=1}^{m+n+2} a_{kk} e_{kk} \in M_{m+n+2}(\mathbb{F})$ 为可逆的矩阵, 并且满足

$$a_{11} a_{m+2, m+2} = (a_{m+2+j, m+2+j})^2, \forall j = 1, \cdots, n, x \in (\mathfrak{H}_{m,n})_{\bar{0}}.$$

令 $\alpha = d + x$, 则 α 可逆. 设映射

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha : \mathfrak{H}_{m,n} &\rightarrow \mathfrak{H}_{m,n}, \\ h &\mapsto \sigma_\alpha(h), \quad \forall h \in \mathfrak{H}_{m,n}, \end{aligned}$$

其中 $\sigma_\alpha(h) = \alpha h \alpha^{-1}$, 则 σ_α 是 $\mathfrak{H}_{m,n}$ 的一个自同构, 称为 $\mathfrak{H}_{m,n}$ 的内自同构. 令 G_1 是 $\mathfrak{H}_{m,n}$ 所有内自同构构成的集合, 则 G_1 是 $\text{Aut}(\mathfrak{H}_{m,n})$ 的子群, 称为 $\mathfrak{H}_{m,n}$ 的内自同构群.

证 易知 σ_α 是双射且是线性变换. 由已知设

$$\alpha = \sum_{k=1}^{m+n+2} a_{kk} e_{kk} + \sum_{i=1}^m (x_i e_{1,i+1} + y_i e_{i+1, m+2}) + p e_{1, m+2}, \quad a_{kk} \neq 0, x_i, y_i, p \in \mathbb{F},$$

则有

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} &= \sum_{k=1}^{m+n+2} a_{kk}^{-1} e_{kk} - a_{11}^{-1} \sum_{i=1}^m a_{i+1, i+1}^{-1} x_i e_{1, i+1} - a_{m+2, m+2}^{-1} \sum_{i=1}^m a_{i+1, i+1}^{-1} y_i e_{i+1, m+2} \\ &\quad - a_{11}^{-1} a_{m+2, m+2}^{-1} \left(p - \sum_{i=1}^m a_{i+1, i+1}^{-1} x_i y_i \right) e_{1, m+2}, \quad a_{kk}^{-1} \neq 0, x_i, y_i, p \in \mathbb{F}, \end{aligned}$$

其中 $a_{kk} a_{kk}^{-1} = 1$. 由引理 2.3, 设

$$h_{\bar{0}} = \sum_{i=1}^m (x_i e_{1, i+1} + y_i e_{i+1, m+2}) + p e_{1, m+2} \in (\mathfrak{H}_{m,n})_{\bar{0}}, \quad x_i, y_i, p \in \mathbb{F}, \quad (3.1)$$

$$h_{\bar{1}} = \sum_{j=1}^n \gamma_j \left(\frac{1}{2} e_{1,m+2+j} + e_{m+2+j,m+2} \right) \in (\mathfrak{H}_{m,n})_{\bar{1}}, \quad \gamma_j \in \mathbb{F}, \quad (3.2)$$

则有

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(h_{\bar{0}}) &= a_{11} \sum_{i=1}^m a_{i+1,i+1}^{-1} x_i e_{1,i+1} + a_{m+2,m+2}^{-1} \sum_{i=1}^m a_{i+1,i+1} y_i e_{i+1,m+2} \\ &\quad + a_{m+2,m+2}^{-1} \left(a_{11} p - a_{11} \sum_{i=1}^m a_{i+1,i+1}^{-1} x_i y_i + \sum_{i=1}^m x_i y_i \right) e_{1,m+2} \in (\mathfrak{H}_{m,n})_{\bar{0}}, \\ \sigma_\alpha(h_{\bar{1}}) &= \sum_{j=1}^n \gamma_j \left(\frac{1}{2} a_{11} a_{m+2+j,m+2+j}^{-1} e_{1,m+2+j} + a_{m+2,m+2}^{-1} a_{m+2+j,m+2+j} e_{m+2+j,m+2} \right) \in (\mathfrak{H}_{m,n})_{\bar{1}}, \end{aligned}$$

故 σ_α 是偶的线性变换. 由引理 2.3, 设

$$\begin{aligned} h_1 &= \sum_{i=1}^m (x'_i e_{1,i+1} + y'_i e_{i+1,m+2}) + \sum_{j=1}^n \gamma'_j \left(\frac{1}{2} e_{1,m+2+j} + e_{m+2+j,m+2} \right) + c e_{1,m+2}, \\ h_2 &= \sum_{i=1}^m (x''_i e_{1,i+1} + y''_i e_{i+1,m+2}) + \sum_{j=1}^n \gamma''_j \left(\frac{1}{2} e_{1,m+2+j} + e_{m+2+j,m+2} \right) + q e_{1,m+2}, \\ x'_i, x''_i, y'_i, y''_i, \gamma'_j, \gamma''_j, c, q &\in \mathbb{F}, \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha([h_1, h_2]) &= \sigma_\alpha \left(\sum_{i=1}^m (x'_i y''_i - y'_i x''_i) e_{1,m+2} + \sum_{j=1}^n \gamma'_j \gamma''_j e_{1,m+2} \right) \\ &= \alpha \left(\sum_{i=1}^m x'_i y''_i e_{1,m+2} \right) \alpha^{-1} - \alpha \left(\sum_{i=1}^m y'_i x''_i e_{1,m+2} \right) \alpha^{-1} + \alpha \left(\sum_{j=1}^n \gamma'_j \gamma''_j e_{1,m+2} \right) \alpha^{-1}, \\ [\sigma_\alpha(h_1), \sigma_\alpha(h_2)] &= \left[\alpha \left(\sum_{i=1}^m x'_i e_{1,i+1} \right) \alpha^{-1}, \alpha \left(\sum_{i=1}^m y''_i e_{i+1,m+2} \right) \alpha^{-1} \right] + \left[\alpha \left(\sum_{i=1}^m y'_i e_{i+1,m+2} \right) \alpha^{-1}, \right. \\ &\quad \left. \alpha \left(\sum_{i=1}^m x''_i e_{1,i+1} \right) \alpha^{-1} \right] + \left[\alpha \left(\sum_{j=1}^n \gamma'_j \left(\frac{1}{2} e_{1,m+2+j} + e_{m+2+j,m+2} \right) \right) \alpha^{-1}, \right. \\ &\quad \left. \alpha \left(\sum_{j=1}^n \gamma''_j \left(\frac{1}{2} e_{1,m+2+j} + e_{m+2+j,m+2} \right) \right) \alpha^{-1} \right] \\ &= \alpha \left(\sum_{i=1}^m x'_i y''_i e_{1,m+2} \right) \alpha^{-1} - \alpha \left(\sum_{i=1}^m y'_i x''_i e_{1,m+2} \right) \alpha^{-1} + \alpha \left(\sum_{j=1}^n \gamma'_j \gamma''_j e_{1,m+2} \right) \alpha^{-1}, \end{aligned}$$

因此 $\sigma_\alpha([h_1, h_2]) = [\sigma_\alpha(h_1), \sigma_\alpha(h_2)]$. 故 σ_α 是 $\mathfrak{H}_{m,n}$ 的一个自同构. 由定理 3.1 的类似证明可得 G_1 是 $\text{Aut}(\mathfrak{H}_{m,n})$ 的子群.

定理 3.5 令 $a = (a_1, b_1, \dots, a_m, b_m) \in \mathbb{F}^{2m}$. 设映射

$$\begin{aligned} \psi_a : \mathfrak{H}_{m,n} &\rightarrow \mathfrak{H}_{m,n}, \\ h &\mapsto \psi_a(h), \quad \forall h \in \mathfrak{H}_{m,n}, \end{aligned}$$

其中 $\psi_a(h) = h + \sum_{i=1}^m (a_i x_i + b_i y_i) e_{1,m+2}$, 这里

$$h = \sum_{i=1}^m (x_i e_{1,i+1} + y_i e_{i+1,m+2}) + \sum_{j=1}^n \gamma_j \left(\frac{1}{2} e_{1,m+2+j} + e_{m+2+j,m+2} \right) + p e_{1,m+2}, \quad x_i, y_i, \gamma_j, p \in \mathbb{F},$$

则 ψ_f 是 $\mathfrak{H}_{m,n}$ 的一个自同构, 称为 $\mathfrak{H}_{m,n}$ 的中心自同构. 令 S_1 是 $\mathfrak{H}_{m,n}$ 所有中心自同构构成的集合, 则 S_1 是 $\text{Aut}(\mathfrak{H}_{m,n})$ 的子群, 称为 $\mathfrak{H}_{m,n}$ 的中心自同构群.

证 易知 ψ_a 是双射且是线性变换. 由 (3.1) 和 (3.2) 式可得

$$\psi_a(h_{\bar{0}}) = h_{\bar{0}} + \sum_{i=1}^m (a_i x_i + b_i y_i) e_{1,m+2} \in (\mathfrak{H}_{m,n})_{\bar{0}},$$

$$\psi_a(h_{\bar{1}}) = h_{\bar{1}} \in (\mathfrak{H}_{m,n})_{\bar{1}},$$

故 ψ_a 是偶的线性变换. 由定义 2.2 和引理 2.3 可得 $\psi_a(e_{1,m+2}) = e_{1,m+2}$. $\forall h_1, h_2 \in \mathfrak{H}_{m,n}$, 可得 $\psi_a([h_1, h_2]) = [h_1, h_2]$,

$$\begin{aligned} [\psi_a(h_1), \psi_a(h_2)] &= [h_1, h_2] + [h_1, \sum_{i=1}^m (a_i x_i'' + b_i y_i'') e_{1,m+2}] + [\sum_{i=1}^m (a_i x_i' + b_i y_i') e_{1,m+2}, h_2] \\ &\quad + [\sum_{i=1}^m (a_i x_i' + b_i y_i') e_{1,m+2}, \sum_{i=1}^m (a_i x_i'' + b_i y_i'') e_{1,m+2}] = [h_1, h_2], \end{aligned}$$

因此 $\psi_a([h_1, h_2]) = [\psi_a(h_1), \psi_a(h_2)]$. 故 ψ_a 是 $\mathfrak{H}_{m,n}$ 的一个自同构. 由定理 3.2 的类似证明可得 S_1 是 $\text{Aut}(\mathfrak{H}_{m,n})$ 的子群.

定理 3.6 令 $\gamma = e_{11} - \sum_{i=1}^m e_{i+1,i+1} + \sum_{j=1}^n e_{m+2+j,m+2+j} + e_{m+2,m+2}$. 设映射

$$\begin{aligned} w_0 : \mathfrak{H}_{m,n} &\rightarrow \mathfrak{H}_{m,n}, \\ h &\mapsto w_0(h), \quad \forall h \in \mathfrak{H}_{m,n}, \end{aligned}$$

其中 $w_0(h) = \gamma h \gamma$, 则 w_0 是 $\mathfrak{H}_{m,n}$ 的一个自同构, 称为 $\mathfrak{H}_{m,n}$ 的对合自同构. 令 $W_1 = \{\iota, w_0\}$, 其中 ι 是恒等变换, 则 W_1 是 $\text{Aut}(\mathfrak{H}_{m,n})$ 的子群, 称为 $\mathfrak{H}_{m,n}$ 的对合自同构群.

证 事实上 $w_0 \in G_1$, $\{\iota, w_0\}$ 构成 G_1 的子群.

定理 3.7 设 $d \in M_{n+2}(\mathbb{F})$ 为可逆的对角矩阵, $x \in (\mathfrak{H}_n)_{\bar{0}}$. 令 $\alpha = d + x$, 则 α 可逆. 设映射

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha : \mathfrak{H}_n &\rightarrow \mathfrak{H}_n, \\ h &\mapsto \sigma_\alpha(h), \quad \forall h \in \mathfrak{H}_n, \end{aligned}$$

其中 $\sigma_\alpha(h) = \alpha h \alpha^{-1}$, 则 σ_α 是 $\mathfrak{H}_n$ 的一个自同构, 称为 $\mathfrak{H}_n$ 的内自同构. 令 G_2 是 $\mathfrak{H}_n$ 所有内自同构构成的集合, 则 G_2 是 $\text{Aut}(\mathfrak{H}_n)$ 的子群, 称为 $\mathfrak{H}_n$ 的内自同构群.

证 易知 σ_α 是双射且是线性变换. 由已知设

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n+2} a_{kk} e_{kk} + \sum_{i=1}^n x_i e_{1,i+1}, \quad a_{kk} \neq 0, x_i \in \mathbb{F},$$

则有

$$\alpha^{-1} = \sum_{k=1}^{n+2} a_{kk}^{-1} e_{kk} - a_{11}^{-1} \sum_{i=1}^n a_{i+1,i+1}^{-1} x_i e_{1,i+1}, \quad a_{kk}^{-1} \neq 0, x_i \in \mathbb{F},$$

其中 $a_{kk} a_{kk}^{-1} = 1$. 由引理 2.4 设

$$h_{\bar{0}} = \sum_{i=1}^n x_i e_{1,i+1} \in (\mathfrak{H}_n)_{\bar{0}}, \quad x_i \in \mathbb{F}, \quad (3.3)$$

$$h_{\bar{1}} = \sum_{i=1}^n y_i e_{i+1,n+2} + p e_{1,n+2} \in (\mathfrak{H}_n)_{\bar{1}}, \quad y_i, p \in \mathbb{F}, \quad (3.4)$$

则有

$$\sigma_{\alpha}(h_{\bar{0}}) = a_{11} \sum_{i=1}^n a_{i+1,i+1}^{-1} x_i e_{1,i+1} \in (\mathfrak{H}_n)_{\bar{0}},$$

$$\sigma_{\alpha}(h_{\bar{1}}) = a_{n+2,n+2}^{-1} \left(\sum_{i=1}^n a_{i+1,i+1} y_i e_{i+1,n+2} + \sum_{i=1}^n x_i y_i e_{1,n+2} + a_{11} p e_{1,n+2} \right) \in (\mathfrak{H}_n)_{\bar{1}},$$

故 σ_{α} 是偶的线性变换. 由引理 2.4 设

$$h_1 = \sum_{i=1}^n (x'_i e_{1,i+1} + y'_i e_{i+1,n+2}) + c e_{1,n+2}, \quad (3.5)$$

$$h_2 = \sum_{i=1}^n (x''_i e_{1,i+1} + y''_i e_{i+1,n+2}) + q e_{1,n+2}, \quad x'_i, x''_i, y'_i, y''_i, c, q \in \mathbb{F}, \quad (3.6)$$

则有

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}([h_1, h_2]) &= \sigma_{\alpha} \left(\sum_{i=1}^n (x'_i y''_i - y'_i x''_i) e_{1,n+2} \right) \\ &= \alpha \left(\sum_{i=1}^n x'_i y''_i e_{1,n+2} \right) \alpha^{-1} - \alpha \left(\sum_{i=1}^n y'_i x''_i e_{1,n+2} \right) \alpha^{-1}, \\ [\sigma_{\alpha}(h_1), \sigma_{\alpha}(h_2)] &= \left[\alpha \left(\sum_{i=1}^n x'_i e_{1,i+1} \right) \alpha^{-1}, \alpha \left(\sum_{i=1}^n y''_i e_{i+1,n+2} \right) \alpha^{-1} \right] + \left[\alpha \left(\sum_{i=1}^n y'_i e_{i+1,n+2} \right) \alpha^{-1}, \right. \\ &\quad \left. \alpha \left(\sum_{i=1}^n x''_i e_{1,i+1} \right) \alpha^{-1} \right] \\ &= \alpha \left(\sum_{i=1}^n x'_i y''_i e_{1,n+2} \right) \alpha^{-1} - \alpha \left(\sum_{i=1}^n y'_i x''_i e_{1,n+2} \right) \alpha^{-1}, \end{aligned}$$

因此 $\sigma_{\alpha}([h_1, h_2]) = [\sigma_{\alpha}(h_1), \sigma_{\alpha}(h_2)]$. 故 σ_{α} 是 $\mathfrak{H}_n$ 的一个自同构. 由定理 3.1 的类似证明可得 G_2 是 $\text{Aut}(\mathfrak{H}_n)$ 的子群.

定理 3.8 令 $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{F}^n$. 设映射

$$\begin{aligned} \psi_b : \mathfrak{H}_n &\rightarrow \mathfrak{H}_n, \\ h &\mapsto \psi_b(h), \quad \forall h \in \mathfrak{H}_n, \end{aligned}$$

其中 $\psi_b(h) = h + \sum_{i=1}^n b_i y_i e_{1,n+2}$, 这里 $h = \sum_{i=1}^n (x_i e_{1,i+1} + y_i e_{i+1,n+2}) + p e_{1,n+2}$, $x_i, y_i, p \in \mathbb{F}$, 则 ψ_b 是 $\mathfrak{H}_n$ 的一个自同构, 称为 $\mathfrak{H}_n$ 的中心自同构. 令 S_2 是 $\mathfrak{H}_n$ 所有中心自同构构成的集合, 则 S_2 是 $\text{Aut}(\mathfrak{H}_n)$ 的子群, 称为 $\mathfrak{H}_n$ 的中心自同构群.

证 易知 ψ_b 是双射且是线性变换. 由 (3.3) 和 (3.4) 式可得

$$\psi_b(h_{\bar{0}}) = h_{\bar{0}} \in (\mathfrak{H}_n)_{\bar{0}}, \quad \psi_b(h_{\bar{1}}) = h_{\bar{1}} + \sum_{i=1}^n b_i y_i e_{1,n+2} \in (\mathfrak{H}_n)_{\bar{1}},$$

故 ψ_b 是偶的线性变换. 由定义 2.2 和引理 2.4 可得 $\psi_b(e_{1,n+2}) = e_{1,n+2}$. $\forall h_1, h_2 \in \mathfrak{H}_n$, 可得

$$\begin{aligned} \psi_b([h_1, h_2]) &= [h_1, h_2], \\ [\psi_b(h_1), \psi_b(h_2)] &= [h_1, h_2] + [h_1, \sum_{i=1}^n b_i y_i'' e_{1,n+2}] + [\sum_{i=1}^n b_i y_i' e_{1,n+2}, h_2] \\ &\quad + [\sum_{i=1}^n b_i y_i' e_{1,n+2}, \sum_{i=1}^n b_i y_i'' e_{1,n+2}] = [h_1, h_2], \end{aligned}$$

因此 $\psi_b([h_1, h_2]) = [\psi_b(h_1), \psi_b(h_2)]$. 故 ψ_b 是 $\mathfrak{H}_n$ 的一个自同构. 由定理 3.2 的类似证明可得 S_2 是 $\text{Aut}(\mathfrak{H}_n)$ 的子群.

定理 3.9 令 $\gamma = e_{11} - \sum_{k=1}^{n+1} e_{k+1,k+1} + \sum_{i=1}^n e_{1,i+1} + e_{1,n+2}$. 设映射

$$\begin{aligned} w_0 : \mathfrak{H}_n &\rightarrow \mathfrak{H}_n, \\ h &\mapsto w_0(h), \quad \forall h \in \mathfrak{H}_n, \end{aligned}$$

其中 $w_0(h) = \gamma h \gamma$, 则 w_0 是 $\mathfrak{H}_n$ 的一个自同构, 称为 $\mathfrak{H}_n$ 的对合自同构. 令 $W_2 = \{\iota, w_0\}$, 其中 ι 是恒等变换, 则 W_2 是 $\text{Aut}(\mathfrak{H}_n)$ 的子群, 称为 $\mathfrak{H}_n$ 的对合自同构群.

证 易知 w_0 是双射且是线性变换. 由 (3.3) 和 (3.4) 式可得

$$\begin{aligned} w_0(h_{\bar{0}}) &= -h_{\bar{0}} \in (\mathfrak{H}_n)_{\bar{0}}, \\ w_0(h_{\bar{1}}) &= \sum_{i=1}^n y_i e_{i+1,n+2} - \sum_{i=1}^n y_i e_{1,n+2} - p e_{1,n+2} \in (\mathfrak{H}_n)_{\bar{1}}, \end{aligned}$$

故 w_0 是奇的线性变换. 由已知得 $\gamma^2 = e$, 其中 e 是单位矩阵. 由 (3.5) 和 (3.6) 式可得

$$\begin{aligned} w_0([h_1, h_2]) &= w_0\left(\sum_{i=1}^n (x_i' y_i'' - y_i' x_i'') e_{1,n+2}\right) = -\sum_{i=1}^n (x_i' y_i'' - y_i' x_i'') e_{1,n+2}, \\ [w_0(h_1), w_0(h_2)] &= \left[\gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i' e_{1,i+1}\right)\gamma, \gamma\left(\sum_{i=1}^n y_i'' e_{i+1,n+2}\right)\gamma\right] + \left[\gamma\left(\sum_{i=1}^n y_i' e_{1,i+1}\right)\gamma, \right. \\ &\quad \left.\gamma\left(\sum_{i=1}^n x_i'' e_{i+1,n+2}\right)\gamma\right] = -\sum_{i=1}^n (x_i' y_i'' - y_i' x_i'') e_{1,n+2}, \end{aligned}$$

因此 $w_0([h_1, h_2]) = [w_0(h_1), w_0(h_2)]$. 故 w_0 是 $\mathfrak{H}_n$ 的一个自同构. 由定理 3.3 的类似证明可得 W_2 是 $\text{Aut}(\mathfrak{H}_n)$ 的子群.

参 考 文 献

- [1] Hegazi A S. Representations of Heisenberg Lie superalgebras[J]. Indian J. Pure Appl. Math., 1990, 21(6): 557–566.
- [2] Jang Cuibo. The holomorph and derivation algebra of infinite dimensional Heisenberg algebra[J]. J. Math., 1997, 17(3): 422–426.
- [3] Sköldberg E. The homology of Heisenberg Lie algebras over fields of characteristic two[J]. Math. Proc. R. Ir. Acad., 2005, 150(2): 47–49.
- [4] Rodríguez-Vallarte M C, Salgado G, Sánchez-Valenzuela O A. Heisenberg Lie superalgebras and their invariant superorthogonal and supersymplectic forms[J]. J. Alg., 2011, 332(1): 71–86.
- [5] Liu Wende, Chen Meiwei. The minimal dimensions of faithful representations for Heisenberg Lie superalgebras[J]. J. Geom. Phys., 2015, 89: 17–24.
- [6] Cao Youan, Tan Zuowen. Automorphisms of the Lie algebra of strictly upper triangular matrices over a commutative ring[J]. Linear Alg. Appl., 2003, 360: 105–122.
- [7] 张海山, 邵文武, 卢才辉. Heisenberg 李代数的自同构群 [J]. 首都师范大学学报 (自然科学版), 2007, 28(1): 1–14.

THE AUTOMORPHISM GROUPS OF HEISENBERG LIE (SUPER)ALGEBRAS

LIU Lei, TANG Li-ming

(School of Mathematical Sciences, Harbin Normal University, Harbin 150025, China)

Abstract: In this paper, we study the automorphism groups of Heisenberg Lie (super) algebras. By using the isomorphisms between Heisenberg Lie (super)algebras and linear Lie (super)algebras, subgroups of automorphism groups of Heisenberg Lie (super)algebras are obtained, including inner automorphism groups, central automorphism groups, involutory automorphism groups.

Keywords: Heisenberg Lie algebras; Heisenberg Lie superalgebras; automorphism groups

2010 MR Subject Classification: 17B30; 17B40