Vol. 38 (2018)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

有关 Ramanujan Tau 函数的注记

程开敏
(西华师范大学数学与信息学院, 四川 南充 637002)

摘 要: 本文研究了若干特殊的 theta 函数和 q - 级数. 利用它们定义的特殊形式, 建立了几类特殊的 q - 级数与 Ramanujan Tau 函数的生成函数的关系, 从而得到了几个 Ramanujan Tau 函数新的显式表达式. 最后作为定理的应用, 还得到了一个有关 Ramanujan Tau 函数的同余恒等式.

关 键 词: theta 函数; q - 级数; Ramanujan Tau 函数
MR(2010) **主题分类号**: 11A25 **中图分类号**: O156
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2018)02-0337-08

1 引言

设 $q=e^{\pi i\tau}$, 其中 $\tau\in\mathbb{C}$ 且 $\mathrm{Im}(\tau)>0$. 对任意的 $q,z\in\mathbb{C}$, 如下定义 $(z;q)_\infty$:

$$(z;q)_\infty:=\prod_{n=0}^{\infty}(1-zq^n). \tag{1.1}$$

将形如

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{q^n}{1-q^n},\quad |q|<1 \tag{1.2}$$

的 q - 级数称为 Lambert 级数. 我们知道 Ramanujan Tau 函数 $\tau:\mathbb{N}^*\to\mathbb{Z}$ 是按如下恒等式定义的

$$q(q;q)_\infty^{24}=q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}:=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n,\ \ |q|<1. \tag{1.3}$$

Ramanujan 理论有很多热门的研究分支, 如 Ramanujan-Nagell 方程 [7]. 而对 $\tau(n)$ 的研究一直是数论领域的经典研究方向, 其中有关 $\tau(n)$ 的显式表达式及其同余性质的研究就是很多数论学者的研究兴趣之一. Berndt [2] 等人得到了 $\tau(n)$ 模 $2^{11},3^6,5^3,7,23$ 的若干同余式. 设 n,k 为正整数, 记因子和函数

$$\sigma_k(n):=\sum_{d|n}d^k,$$

*收稿日期: 2016-10-29 接收日期: 2016-12-19
基金项目: 四川省教育厅科研基金资助 (15ZB0434).
作者简介: 程开敏 (1985–), 男, 江西乐平, 讲师, 主要研究方向: 数论及其应用.

$t_k(n)$ 表示将 n 表为 k 个三角数的和的表法数, $r_k(n)$ 表示将 n 表为 k 个平方数的和的表法数, 则值得一提的是, Apostol [1] 给出了表达式

$$\tau(n)=\frac{65}{756}\sigma_{11}(n)+\frac{691}{756}\sigma_5(n)-\frac{691}{3}\sum_{i-1}^{n-1}\sigma_5(i)\sigma_5(n-i).$$

Ewell [5, 6] 也分别得到了以下两个恒等式

$$\tau(n)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}r_{16}(n-i)2^{3v_2(i)}\sigma_3(Od(i))$$

和

$$\tau(4n+2)=-3\sum_{i=1}^{2n+1}2^{3v_2(2i)}\sigma_3(Od(2i))\sum_{j=0}^{4n-2i+2}(-1)^j r_8(4n+2-2i-j)r_8(j),$$

其中 $v_2(n)$ 为 n 的 2-adic 赋值, $Od(n)$ 为 n 的奇数部分, 即 $Od(n)=n\times 2^{-v_2(n)}$. 最近, 作者 [8] 利用 Ewell 的一个恒等式, 也得到一个 Ramanujan Tau 函数的新表达式.

在本文中, 我们主要对若干特殊的 theta 函数和 q - 级数进行研究. 我们建立了几类特殊的 q - 级数与 Ramanujan Tau 函数的生成函数的关系. 从而得到了几个 Ramanujan Tau 函数新的显式表达式, 其中这些表达式中只含因子和函数, 另外, 作为定理的应用, 还得到 Ramanujan Tau 函数的同余恒等式.

2 基本知识及引理

设 $q=e^{\pi i\tau}$, 其中 $\tau\in\mathbb{C}$ 且 $\mathrm{Im}(\tau)>0$. 先定义以下三个 theta 函数

$$\theta_2(q):=2q^{\frac14}\sum_{n=0}^{\infty}q^{n(n+1)},\quad \theta_3(q):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{n^2},\quad \theta_4(q):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^nq^{n^2}. \tag{2.1}$$

容易检验以下恒等式成立

$$\theta_2(q)=2q^{\frac14}(q^2;q^2)_\infty(-q^2;q^2)_\infty^2,\quad \theta_3(q)=(q^2;q^2)_\infty(-q;q^2)_\infty^2, \tag{2.2}$$

$$\theta_4(q)=(q^2;q^2)_\infty(q;q^2)_\infty^2,\quad 2\theta_2(q)\theta_3(q)=\theta_2^2(q^{\frac12}), \tag{2.3}$$

其中符号 $(\cdot;\cdot)_\infty$ 如 (1.1) 式定义. 又如下定义 $\phi(q)$ 和 $\psi(q)$

$$\phi(q):=\theta_3(q),\quad \psi(q):=\sum_{n=0}^{\infty}q^{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac12 q^{-\frac18}\theta_2(q^{\frac12}). \tag{2.4}$$

设 k 为正整数, 则有

$$\phi^k(q)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}r_k(n)q^n,\quad \psi^k(q)=\sum_{n=0}^{\infty}t_k(n)q^n, \tag{2.5}$$

其中 $t_k(n)$ 表示将 n 表为 k 个三角数的和的表法数, $r_k(n)$ 表示将 n 表为 k 个平方数的和的表法数. 最后定义两类特殊的 Lambert 级数如下

$$T_2(q) := 1 + 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1+q^n},\quad T_{2k}(q) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2k-1}q^n}{1-q^{2n}}\quad (k \geq 2), \tag{2.6}$$

$$S_{2k}(q) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^{2k-1}q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}}\quad (k \geq 1). \tag{2.7}$$

现在给出几个有用的结论.

引理 2.1 [3] 设 $\phi(q)$ 和 $\psi(q)$ 是由 (2.4) 式定义的 q - 级数, 则以下恒等式成立.

$$\phi^4(q) = 1 + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1+(-q)^n}, \tag{2.8}$$

$$q\psi^8(q) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3q^n}{1-q^{2n}}, \tag{2.9}$$

$$\psi^4(q) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)q^n}{1-q^{2n+1}}. \tag{2.10}$$

命题 2.2 设 $\theta_2(q)$ 和 $\theta_3(q)$ 是由 (2.1) 式定义的 theta 函数, 则以下恒等式成立

$$\theta_2^4(q) + \theta_3^4(q) = 1 + 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1+q^n}. \tag{2.11}$$

证 由 $\psi(q), \phi(q)$ 的定义式 (2.4) 及引理 2.1, 可知

$$\begin{aligned}
&\theta_2^4(q) + \theta_3^4(q) = 16q\psi^4(q^2) + \phi^4(q)\\
=&1 + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1+(-q)^n} + 16\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)q^{2n+1}}{1-q^{2(2n+1)}}\\
=&1 + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2nq^{2n}}{1+q^{2n}} + 8\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\\
&+ 8\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)q^{2n+1}\Big(\frac{1}{1+q^{2n+1}} + \frac{1}{1-q^{2n+1}}\Big)\\
=&1 + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1+q^n} + 16\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\\
=&1 + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1+q^n} + 16\sum_{n=0}^{\infty}\{\frac{nq}{1-q^n} - \frac{2nq^{2n}}{1-q^{2n}}\}\\
=&1 + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1+q^n} + 16\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^n}\Big(1 - \frac{2q^n}{1+q^n}\Big)\\
=&1 + 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1+q^n}.
\end{aligned}$$

所以 (2.11) 式成立.

引理 2.3 [4] 设 $T_{2k}(q)$ 和 $S_{2k}(q)$ 是由 (2.6) 和 (2.7) 式定义的 q - 级数, 则以下递推恒等式成立

$$T_2^2(q)=1+240\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3q^{2n}}{1-q^{2n}}+48T_4(q); \tag{2.12}$$

$$T_{2m+4}(q)=T_2(q)T_{2m+2}(q)+12\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(2m)!}{(2k)!(2m-2k)!}T_{2k+2}(q)T_{2m+2-2k}(q); \tag{2.13}$$

$$S_{2m+4}(q)=T_2(q)S_{2m+2}(q)+48\sum_{k=1}^{m}\frac{(2m)!4^k}{(2k)!(2m-2k)!}T_{2k+2}(q)S_{2m+2-2k}(q). \tag{2.14}$$

现在利用引理 2.3 建立 Lambet 级数 $S_{2k}(q),T_{2k}(q)$ 与 theta 函数 $\theta_2(q),\theta_3(q)$ 之间的等式关系. 为了叙述方便, 记

$$x(q):=\frac{\theta_2^4(q)}{\theta_3^4(q)},z(q):=\theta_3^4(q),$$

则由 $T_{2k}(q)$ 的定义以及命题 2.2 的 (2.11) 式和引理 2.1 的 (2.9) 式, 易得

$$T_2(q)=z(q)(x(q)+1), \tag{2.15}$$

$$T_4(q)=\frac{1}{16}z^2(q)x(q). \tag{2.16}$$

再利用引理 2.3 通过直接计算得

$$T_6(q)=\frac{1}{16}z^3(q)(x(q)+x^2(q)), \tag{2.17}$$

$$T_8(q)=\frac{1}{32}z^4(q)(2x(q)+13x^2(q)+2x^3(q)), \tag{2.18}$$

$$T_{10}(q)=\frac{1}{16}z^5(q)(x(q)+30x^2(q)+30x^3(q)+x^4(q)), \tag{2.19}$$

$$T_{12}(q)=\frac{1}{32}z^6(q)(2x(q)+251x^2(q)+876x^3(q)+251x^4(q)+2x^5(q)). \tag{2.20}$$

另外, 由引理 2.1 中的 (2.10) 和 (2.3) 式中的关系式 $2\theta_2(q)\theta_3(q)=\theta_2^2(q^{\frac{1}{2}})$, 有

$$S_2(q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}}=q^{\frac{1}{2}}\psi^4(q)=\frac{1}{16}\theta_2^4(q^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{4}\theta_2(q)\theta_3(q). \tag{2.21}$$

从而

$$S_2(q)=\frac{1}{4}z(q)\sqrt{x(q)}. \tag{2.22}$$

将 (2.15)–(2.21) 式以及 (2.22) 式代入到引理 2.3 的 (2.14) 式中, 可得

$$S_4(q)=\frac{1}{4}z^2(q)\sqrt{x(q)}(1+x(q)), \tag{2.23}$$

$$S_6(q)=\frac{1}{4}z^3(q)\sqrt{x(q)}(1+14x(q)+x^2(q)), \tag{2.24}$$

$$S_8(q)=\frac{1}{4}z^4(q)\sqrt{x(q)}(1+135x(q)+135x^2(q)+x^3(q)), \tag{2.25}$$

$$S_{10}(q)=\frac{1}{4}z^5(q)\sqrt{x(q)}(1+1228x(q)+4578x^2(q)+1228x^3(q)+x^4(q)). \tag{2.26}$$

最后, 由 (2.16)–(2.18) 式以及 (2.21) 式, 经过计算发现

$$72q^3\psi^{24}(q) = T_4(q)T_8(q) - T_6^2(q). \tag{2.27}$$

3 主要结果及证明

命题 3.1 设 k 为正整数, 则以下恒等式成立.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k q^n}{1-q^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_k(n)q^n, \tag{3.1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^k q^{2n+1}}{1-q^{2(2n+1)}} = \sum_{n=0}^{\infty}\sigma_k(2n+1)q^{2n+1}, \tag{3.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k q^n}{1-q^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}2^{kv_2(n)}\sigma_k(Od(n))q^n. \tag{3.3}$$

证 首先

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{1-q^n} &= \sum_{n=1}^{\infty}n^k q^n\sum_{m=0}^{\infty}(q^n)^m = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n^k q^{n(m+1)}\\ &= \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{d|t}d^k q^t = \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_k(n)q^n.\end{aligned}$$

其次

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^k q^{2n+1}}{1-q^{2(2n+1)}} &= \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^k q^{2n+1}\sum_{m=0}^{\infty}q^{2m(2n+1)}\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)^k q^{(2m+1)(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{d|(2n+1)}d^k q^{2n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sigma_k(2n+1)q^{2n+1}.\end{aligned}$$

最后

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k q^n}{1-q^{2n}} &= \sum_{n=1}^{\infty}n^k q^n\sum_{m=0}^{\infty}q^{2mn} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n^k q^{(2m+1)n}\\ &= \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{\substack{dd'=t\\ 2\nmid d'}}d^k q^t = \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{d'|Od(t)}\{\frac{t}{d'}\}^k q^t\\ &= \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{d'|Od(t)}\{2^{v_2(t)}\frac{Od(t)}{d'}\}^k q^t = \sum_{n=1}^{\infty}2^{kv_2(n)}\sigma_k(Od(n))q^n.\end{aligned}$$

所以命题 3.1 成立.

定理 3.2 设 n,k 为正整数, $\tau(n)$ 为 Ramanujan Tau 函数, $\sigma_k(n)=\sum\limits_{d|n}d^k$. 则有

$$\tau(n)=\sum_{\substack{n_1+n_2=n-1\\ n_1\geq1,n_2\geq1}}\left\{-\frac{128}{2685}\sigma_1(2n_1+1)\sigma_9(2n_2+1)+\frac{376}{1611}\sigma_3(2n_1+1)\sigma_7(2n_2+1)\right.$$
$$\left.+\frac{6559}{8055}\sigma_5(2n_1+1)\sigma_5(2n_2+1)\right\}. \tag{3.4}$$

证 令 $x(q)=\frac{\theta_2^4(q)}{\theta_3^4(q)}, z(q)=\theta_3^4(q)$. 一方面, 由著名的 Jacobi 四次恒等式

$$\theta_2^4(q)+\theta_4^4(q)=\theta_3^4(q),$$

并结合 (2.2) 和 (2.3) 式, 得

$$\begin{aligned}z^6(q)x(q)(1-x(q))^4&=\theta_3^{24}(q)\times\frac{\theta_2^4(q)}{\theta_3^4(q)}\times\left(1-\frac{\theta_2^4(q)}{\theta_3^4(q)}\right)^4=\theta_3^4(q)\theta_2^4(q)\theta_4^{16}(q)\\&=16(q^2;q^2)_\infty^4(-q;q^2)_\infty^8q(q^2;q^2)_\infty^4=16q(q;q)_\infty^{24}\\&=16\sum_{n=1}^\infty\tau(n)q^n.\end{aligned}\tag{3.5}$$

另一方面, 观察到 $S_2(q)S_{10}(q)$, $S_4(q)S_8(q)$, $S_6^2(q)$ 与 $z^6(q)x(q)(1-x(q))^4$ 均含有因子 $z^6(q)$. 所以不妨设

$$A_1S_2(q)S_{10}(q)+A_2S_4(q)S_8(q)+A_3S_6^2(q)=z^6(q)x(q)(1-x(q))^4, \tag{3.6}$$

其中 $A_1,A_2,A_3\in\mathbb{Q}$ 为待定系数. 将 (2.23)–(2.26) 式分别代入到 (3.6) 式的左边, 然后比较 (3.6) 式的左右两边的项 $z^6(q)x^i(q)$ $(i=1,2,3,4,5)$ 的系数, 解得

$$A_1=-\frac{2048}{2685},\quad A_2=\frac{6016}{1611},\quad A_3=\frac{104944}{8055}. \tag{3.7}$$

并且由引理 3.1, 可知

$$S_2(q)S_{10}(q)=q\sum_{n=0}^\infty\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n,n_2\geq0}}\sigma_1(2n_1+1)\sigma_9(2n_2+1)q^n, \tag{3.8}$$

$$S_4(q)S_8(q)=q\sum_{n=0}^\infty\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n,n_2\geq0}}\sigma_3(2n_1+1)\sigma_7(2n_2+1)q^n, \tag{3.9}$$

$$S_6^2(q)=q\sum_{n=0}^\infty\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n,n_2\geq0}}\sigma_5(2n_1+1)\sigma_5(2n_2+1)q^n. \tag{3.10}$$

所以综合 (3.5)–(3.10) 式, 有

$$\sum_{n=1}^\infty\tau(n)q^n=\sum_{n=1}^\infty\sum_{\substack{n_1+n_2=n-1\\ n_1\geq1,n_2\geq1}}\left(-\frac{128}{2685}\sigma_1(2n_1+1)\sigma_9(2n_2+1)+\frac{376}{1611}\sigma_3(2n_1+1)\sigma_7(2n_2+1)\right.$$
$$\left.+\frac{6559}{8055}\sigma_5(2n_1+1)\sigma_5(2n_2+1)\right)q^n. \tag{3.11}$$

最后比较 (3.11) 左右两边 q^n 的系数立即可得定理 3.2 的结论.

定理 3.3 设 n,k 为正整数, $\tau(n)$ 为 Ramanujan Tau 函数, $\sigma_k(n)=\sum\limits_{d|n}d^k$, $t_k(n)$ 为将 n 表为 k 个三角数的和的表法数, $v_2(n)$ 为 n 的 2-adic 赋值, $Od(n)=n\times 2^{-v_2(n)}$. 则对任意的 $n\geq 3$, 有

$$\begin{aligned}\tau(n)=&-2072\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geq 1,n_2\geq 1}}\left\{2^{3v_2(n_1)+7v_2(n_2)}\sigma_3(Od(n_1))\sigma_7(Od(n_2))\right\}\\ &+104896t_{24}(n-3)+2^{11v_2(n)}\sigma_{11}(Od(n)).\end{aligned}\tag{3.12}$$

证 通过利用 (2.16), (2.18), (2.20) 以及 (2.27) 式, 观察到 $S_4(q)S_8(q)$, $q^3\psi^{24}(q)$, $T_{12}(q)$ 与 $z^6(q)x(q)(1-x(q))^4$ 均含有因子 $z^6(q)$. 所以不妨设

$$B_1S_4(q)S_8(q)+B_2q^3\psi^{24}(q)+B_3T_{12}(q)=z^6(q)x(q)(1-x(q))^4,\tag{3.13}$$

其中 $B_1,B_2,B_3\in\mathbb{Q}$ 为待定系数. 将 (2.16), (2.18), (2.20) 以及 (2.27) 式分别代入到 (3.13) 式的左边, 然后比较 (3.13) 式的左右两边的项 $z^6(q)x^i(q)$ $(i=1,2,3,4,5)$ 的系数, 解得

$$B_1=-33152,\quad B_2=1678336,\quad B_3=16.\tag{3.14}$$

并且由引理 3.1, 可知

$$T_4(q)T_8(q)=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n,n_2\geq 1}}2^{3v_2(n_1)+7v_2(n_2)}\sigma_3(Od(n_1))\sigma_7(Od(n_2))q^n,\tag{3.15}$$

$$q^3\psi^{24}(q)=q^3\Big(\sum_{n=0}^{\infty}q^{n(n+1)}2\Big)^{24}=\sum_{n=3}^{\infty}t_{24}(n-3)q^n,\tag{3.16}$$

$$T_{12}(q)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{11v_2(n)}\sigma_{11}(Od(n))q^n.\tag{3.17}$$

所以综合 (3.5), (3.13)–(3.17) 式, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty}\tau(n)q^n=&\sum_{n=3}^{\infty}\Big(-2072\sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ n_1\geq 1,n_2\geq 1}}\big(2^{3v_2(n_1)+7v_2(n_2)}\sigma_3(Od(n_1))\sigma_7(Od(n_2))\big)\\ &+104896t_{24}(n-3)+2^{11v_2(n)}\sigma_{11}(Od(n))\Big)q^n.\end{aligned}\tag{3.18}$$

最后比较 (3.18) 式左右两边 q^n 的系数立即可得定理 3.3 的结论.

由定理 3.3 立即得到以下同余恒等式.

推论 3.4 设 n,k 为正整数, $\tau(n)$ 为 Ramanujan Tau 函数, $\sigma_k(n)=\sum\limits_{d|n}d^k$. 则对任意的 $n\geq 3$ 都有

$$\tau(n)\equiv\begin{cases}\sigma_{11}(n)\pmod{64}, & \text{当 } n \text{ 为奇数},\\ 0\pmod 8, & \text{当 } n \text{ 为偶数}.\end{cases}$$

参 考 文 献

[1] Apostol T M. Modular functions and dirichlet series in number theory (2nd ed.)[M]. New York: Springer-Verlag, 1997.

[2] Berndt B C, Ken Ono. Ramanujan's unpublished manuscript on the partition and tau functions with proofs and commentary[J]. Sém. Lothar. Combin., 1999, 42: 1–63.

[3] Berndt B C. Ramanujan's notebook (part III)[M]. New York: Springer-Verlag, 1991.

[4] Chan H, Chua K. Representations of integers as sums of 32 squares[J]. Ramanujan J., 2003, 7: 79–89.

[5] Ewell J. New representations of Ramanujan's tau function[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1999, 128: 723–726.

[6] Ewell J. A formulae for Ramanujan's tau function[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1984, 91: 37–40.

[7] 陈候炎. 关于广义 Ramanujan-Nagell 方程的一个猜想 [J]. 数学杂志, 2010, 30(3): 567–570.

[8] 程开敏. 一个 Ramanujan Tau 函数的新表达式 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2017, 33(2): 129–133.

A NOTE ON THE RAMANUJAN'S TAU FUNCTION

CHENG Kai-min

(*College of Mathematics and Information, China West Normal University, Nanchong 637002, China*)

Abstract: In this paper, we study several theta functions and q-series. Utilizing the special forms of their definitions, we construct some relations between some q-series and the Ramanujan's tau function. In particular, we obtain two new explicit expressions for the Ramanujan's tau function. Lastly, as the application of our theorem, we get a new congruence of Ramanujan's tau function.

Keywords: theta functions; q-series; the Ramanujan's Tau function

2010 MR Subject Classification: 11A25