

延期支付与订购量相关的易腐产品库存决策模型

韦才敏^{1,2}, 李忠萍¹, 林小苹¹

(1. 汕头大学理学院, 广东 汕头 515063)

(2. 汕头大学数字信号与图像处理技术重点实验室, 广东 汕头 515063)

摘要: 本文研究了延期支付与订购量相关的易腐产品库存决策的问题. 在易腐率很小的情况下, 利用二阶泰勒展开式、矩阵论及优化技术方法, 获得了最优缺货时间、最优订购周期及最优零售价格解析解; 并在易腐率比较大的情况下, 利用内点算法, 获得了零售商最优决策数值解. 数值实验分析了各参数对最优决策的影响.

关键词: 库存; 延期支付; 易腐品; 订购量

MR(2010) 主题分类号: 90B05; 90C51

中图分类号: F253.4

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2018)02-0325-12

1 引言

当供应链成员企业面临资金约束, 而银行信贷紧缩、资本市场不发达, 企业如何从成员企业间获得内部融资来实现最优的运营决策是供应链融资管理研究的热点问题^[1]. 内部融资包括提前付款融资模式与延期支付融资模式. 针对延期支付而言, 其形式有两种: 在供应商为强势企业的情况下, 供应商为了激励零售商的购买行为, 往往会给予零售商一些优惠策略^[2]; 在零售商为强势企业的情况下, 其通过占用上游企业供应商的资金, 扩大市场规模来获得收益^[1].

已有很多国内外学者对有关延期支付的问题进行研究, 如 Goyal^[3] 最早构建了允许延期支付的 EOQ 模型, 随后又有不少科研工作者对该模型进行扩展. 在允许延期支付条件下, Chung^[4] 发现了一个确定 EOQ 下的定理. 在两阶段的信贷策略下, 基于 EPQ 模型框架, Huang^[5] 获得了零售商的最优补货决策. 在供应商提供的延期支付与零售商订购量相关时, Chen^[6] 等人建立了零售商 EOQ 模型, 获得了最优订购量及订购周期. 基于 EPQ 模型框架, 针对变质产品, 在零售商提前还款及供应商给予其现金折扣优惠策略下, 李明芳^[7] 等人建立了零售商的库存决策模型, 获得了限制条件下零售商的最优决策, 然而, 其是对变质很低的情形下的结果, 在实际应用中有一定的限制.

然而, 上述的研究都假定需求率是确定的常数, 而实际中需求往往和零售价格相关, 此种情况下的延期支付问题, 也有学者对其进行研究. 在数量折扣与延期支付固定的条件下, Sana^[8] 等人考虑了需求依赖于库存水平、时间及价格等背景下, 其获得了零售商的最优决策解. 针对随机需求情形, 在两水平的信贷策略下, Dye^[9] 等人建立了确定的 EOQ 模型, 通过粒子群优化算法获得了最优零售价格、补货数及补货策略. 针对需求依赖于价格的情形, 李明芳^[10] 等人在供应商允许延期支付和现金折扣的优惠策略下, 建立了联合库决策模型, 获得了

*收稿日期: 2016-08-19

接收日期: 2017-01-04

作者简介: 韦才敏 (1977 -), 男, 壮族, 广西马山, 教授, 主要研究方向: 供应链管理决策与优化.

零售商的最优订购周期、最优零售价格及最优付款时间. 梁培培^[11]等人建立了需求基于瞬时库存的延期支付库存决策模型, 并验证了协调的必然性. 基于延期支付, Shukla^[12]等人建立了需求依赖于时间的 EOQ 模型, 获得了零售商最优订购策略. Shukla^[13]等人建立了需求依赖于库存水平的 EOQ 模型, 获得了最优订购周期、订购量, 实现了相关成本的最小化.

在以上文献中, 虽然考虑了需求率和零售价格、时间、库存水平等相关下的延期支付库存决策问题, 但大多在不允许缺货假设下进行的, 且很少考虑延期支付与订购量相关情形下的库存决策模型. 为了使模型更接近实际情况, 在以上的文献基础之上, 针对单周期内市场的需求依赖于零售价格、允许缺货发生的情形, 建立了延期支付与订购量相关的易腐产品的库存决策模型. 讨论了如何制定最优缺货时间、订购周期及零售价格, 来实现零售商年利润最大化, 并给出了求解该最优决策问题的内点算法, 为零售商在库存管理方面提供了理论支持. 并通过数值实验分析参数对最优决策的影响.

2 符号与假设

2.1 符号

模型中所使用的符号如表 1 所示.

表 1: 符号说明

符号	含义	符号	含义
Q	每周期的最大库存量	$D(p)$	单位时间市场的需求量, 其关于 p 递减
S	每周期的短缺货量	h	单位时间单位库存成本, 不包含利息
s	单位时间单位库存短缺货费	$I(t)$	t 时刻库存水平
Q_d	贷款全部获得延期支付的最小订购量	I_e	单位库存年利息收益
T_d	贷款全部获得延期支付的截止时刻	I_k	单位库存年利息支付
M	延期期限	T	订货周期
θ	易腐产品的腐败率	α	贷款部分延期支付的比率
A	每次订购成本	c	单位进价成本
p	单位零售价格	p^*	最优零售价格
t_1	库存水平为 0 的时刻	Q^*	最优订购量
t_1^*	t_1 的最优值	T^*	最优订购周期

2.2 假设

在模型的构建中所做的假设如下:

- (1) 时间期限无限;
- (2) 交货时间忽略不计;
- (3) 允许缺货发生, 且缺货量完全延期供给;
- (4) 仅考虑单一易腐产品, 如食品、水果、蔬菜等;
- (5) 单位时间市场的需求量 $D(p) = a - bp$, 其中 a 为市场的潜在需求量, $b > 0$ 为客户对价格的敏感度;
- (6) 如果零售商的订购量 $Q + S \geq Q_d$ ($T_d \leq t_1$), 贷款全部获得延期支付, 即零售商允许在延期期限 M 偿还进货费用 $c(Q + S)$; 如果零售商的订购量 $Q + S < Q_d$ ($T_d > t_1$), 贷款部分延期支付, 可以延期到期限 M 的费用为 $\alpha c(Q + S)$, 其余费用在订购产品时立即付清;

(7) 在延期期限 M 之前零售商将销售收入存入银行获得利息收益, 在延期期限 M 之后如果零售商不偿还贷款, 供应商将向其收取利息, 且 $I_k > I_e$.

3 数学模型

本节首先获得 t 时刻零售商库存水平的表达式 $I(t)$, 然后分情况讨论零售商单位时间的平均总利润表达式. 类似^[14], $I(t)$ 满足以下微分方程

$$\begin{cases} \frac{dI(t)}{dt} = -D(p) - \theta I(t), 0 \leq t \leq t_1, \\ \frac{dI(t)}{dt} = -D(p), t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (3.1)$$

满足条件 $I(t_1) = 0$, 可得微分方程的解为

$$\begin{cases} I(t) = \frac{D(p)}{\theta} [e^{\theta(t_1-t)} - 1], 0 \leq t \leq t_1, \\ I(t) = D(p)(t_1 - t), t_1 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (3.2)$$

且满足

$$\begin{cases} Q = \frac{D(p)}{\theta} (e^{\theta t_1} - 1), \\ S = D(p)(T - t_1). \end{cases} \quad (3.3)$$

由 (3.2) 与 (3.3) 式, 可得订购周期内零售商库存水平随时间变化的大致图形如下.

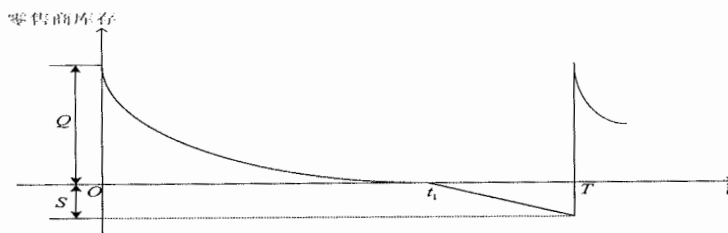


图 1: 零售商库存水平变化图

零售商单位时间的平均总利润为 $ATP = ATP(t_1, T, p) = (\text{销售收入} - \text{总费用}) / \text{订购周期}$.
 总费用 = 订购费用 + 库存费用 + 腐败损失费用 + 采购费用 + 短缺费用 + 利息收入 - 利息支出. 在一个周期内总销售收入为 $pD(p)T$, 订购费用为 A , 库存费用为 $h \int_0^{t_1} I(t)dt = h \left[\frac{D(p)}{\theta^2} (e^{\theta t_1} - 1) - \frac{D(p)t_1}{\theta} \right]$, 腐败损失费用为 $c[Q - D(p)t_1]$, 采购费用为 $c(Q + S)$, 短缺费用为 $s \int_{t_1}^T -I(t)dt = \frac{sD(p)}{2}(T - t_1)^2$, 其中在贷款延期到达之前零售商将销售产品所获得的收益存入银行获得利息收入, 而在延期期限到达之后如果零售商不偿还贷款, 则其需要支付高额利息费用, 而对于订购周期内利息收入与利息支出, 根据贷款全部或部分延期支付分为以下两种情形.

情形 1 $T_d \leq t_1$.

(1) 当 $M \leq t_1 < T$ 时, 结合图 2(a) 知, 订购周期内总利息收益 $= \frac{pD(p)I_e M^2}{2} + pSI_e M$;
 总利息支付 $= cI_k \int_M^{t_1} I(t)dt = \frac{cD(p)I_k [e^{\theta(t_1-M)} - \theta(t_1-M) - 1]}{\theta^2}$.

(2) 当 $t_1 < M < T$ 时, 结合图 2(b) 知, 总利息支付 $= 0$; 总利息收益 $= \frac{pD(p)I_e t_1(2M-t_1)}{2} + pSI_e M$.

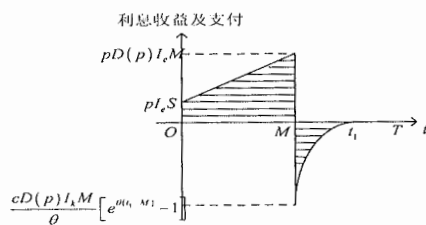
(3) 当 $t_1 < T \leq M$ 时, 结合图 2(c) 知, 总利息支付 $= 0$; 总利息收益 $= \frac{pD(p)I_e t_1(2M-t_1)}{2} + pSI_e M$.

情形 2 $T_d > t_1$.

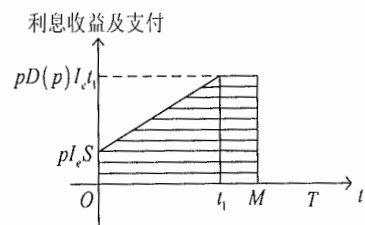
(4) 当 $M \leq t_1 < T$ 时, 结合图 2(d) 知, 订购周期内总利息收益 $= \frac{\alpha pD(p)I_e M^2}{2} + \alpha pSI_e M$;
 总利息支付 $= \alpha cI_k \int_M^{t_1} I(t)dt = \frac{\alpha cD(p)I_k [e^{\theta(t_1-M)} - \theta(t_1-M) - 1]}{\theta^2}$.

(5) 当 $t_1 < M < T$ 时, 由图 2(e) 知, 总利息支付 $= 0$; 总利息收益 $= \frac{\alpha pD(p)I_e t_1(2M-t_1)}{2} + \alpha pSI_e M$.

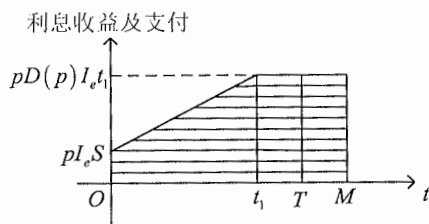
(6) 当 $t_1 < T \leq M$ 时, 由图 2(f) 知, 总利息支付 $= 0$; 总利息收益 $= \frac{\alpha pD(p)I_e t_1(2M-t_1)}{2} + \alpha pSI_e M$.



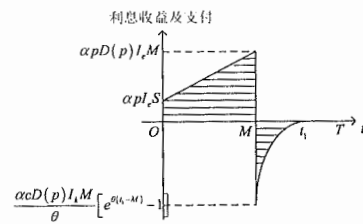
(a) $M \leq t_1 < T (Q+S \geq Q_d)$



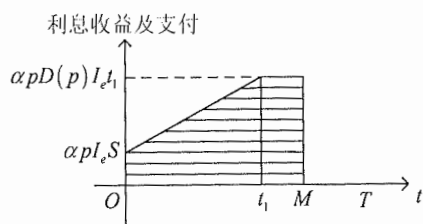
(b) $t_1 < M < T (Q+S \geq Q_d)$



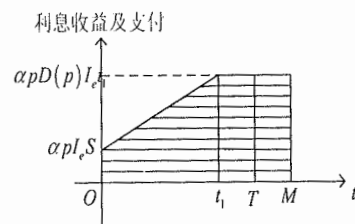
(c) $t_1 < T \leq M (Q+S \geq Q_d)$



(d) $M \leq t_1 < T (Q+S < Q_d)$



(e) $t_1 < M < T (Q+S < Q_d)$



(f) $t_1 < T \leq M (Q+S < Q_d)$

图 2: 利息收入及支付示意图

综合情形 1 与情形 2, 可得零售商单位时间的平均总利润为

$$ATP(t_1, T, p) = \begin{cases} ATP_1(t_1, T, p), & T_d \leq t_1, M \leq t_1 < T, \\ ATP_2(t_1, T, p), & T_d \leq t_1 < M, T, \\ ATP_3(t_1, T, p), & T_d > t_1, M \leq t_1 < T, \\ ATP_4(t_1, T, p), & T_d > t_1, t_1 < M, T, \end{cases} \quad (3.4)$$

其中

$$\begin{aligned} ATP_1(t_1, T, p) &= \frac{pD(p)T - A - h \left[\frac{D(p)}{\theta^2} (e^{\theta t_1} - 1) - \frac{D(p)t_1}{\theta} \right] - c[Q - D(p)t_1] - c(Q + S)}{T} \\ &\quad - \frac{sD(p)(T - t_1)^2 - pD(p)I_e M^2 - 2pSI_e M + \frac{2cD(p)I_k [e^{\theta(t_1 - M)} - \theta(t_1 - M) - 1]}{\theta^2}}{2T}, \\ ATP_2(t_1, T, p) &= \frac{pD(p)T - A - h \left[\frac{D(p)}{\theta^2} (e^{\theta t_1} - 1) - \frac{D(p)t_1}{\theta} \right] - c[Q - D(p)t_1]}{T} \\ &\quad - \frac{2c(Q + S) + sD(p)(T - t_1)^2 - pD(p)I_e t_1(2M - t_1) - 2pSI_e M}{2T}, \\ ATP_3(t_1, T, p) &= \frac{pD(p)T - A - h \left[\frac{D(p)}{\theta^2} (e^{\theta t_1} - 1) - \frac{D(p)t_1}{\theta} \right] - c[Q - D(p)t_1] - c(Q + S)}{T} \\ &\quad - \frac{sD(p)(T - t_1)^2 - \alpha pD(p)I_e M^2 - 2\alpha pSI_e M + \frac{2\alpha cD(p)I_k [e^{\theta(t_1 - M)} - \theta(t_1 - M) - 1]}{\theta^2}}{2T}, \\ ATP_4(t_1, T, p) &= \frac{pD(p)T - A - h \left[\frac{D(p)}{\theta^2} (e^{\theta t_1} - 1) - \frac{D(p)t_1}{\theta} \right] - c[Q - D(p)t_1]}{T} \\ &\quad - \frac{2c(Q + S) + sD(p)(T - t_1)^2 - \alpha pD(p)I_e t_1(2M - t_1) - 2\alpha pSI_e M}{2T}, \\ D(p) &= a - bp, \quad Q = \frac{D(p)}{\theta} (e^{\theta t_1} - 1), \quad S = D(p)(T - t_1). \end{aligned}$$

4 最优决策分析

本节针对延期支付与订购量相关的易腐产品库存决策模型, 且允许缺货发生, 缺货完全延期供给. 以零售商单位时间内的平均总利润最大化为目标, 获得最优零售价格、最优订购周期及最优缺货时间 p^*, T^*, t_1^* , 即最优化问题为以下形式

$$\max_{t_1, T, p} ATP(t_1, T, p). \quad (4.1)$$

由于 (4.1) 式是含有约束条件的非线性优化问题, 由于计算的复杂性, 因此, 很难求得该问题的解析解. 接下来, 在限制一些条件情况下, 获得该问题的解析解; 然后, 又提出一种算法来获取该问题最优数值解.

4.1 易腐率很小时的最优决策

首先, 通过一个定理来说明优化问题 (4.1) 的最优解的存在性. 然后, 当产品易腐率很低时, 运用泰勒展开式定理, 在固定 T 时获得最优零售价格及最优缺货时间表达式, 实现了零售商单位时间的平均总利润最大化.

接下来, 通过一个定理来说明优化问题 (4.1) 的最优解的存在性.

定理 4.1 存在最优零售价格、最优订购周期及最优缺货时间 p^*, T^*, t_1^* , 使得 $ATP_i(t_1, T, p)$ 达到最大化.

证 由于决策目标函数 $ATP_i(t_1, T, p)$ 对应的海塞矩阵为 $H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix}$, 可

以判定其对角线元素 H_{11}, H_{22}, H_{33} 均小于零, 即证. 其中

$$\begin{aligned} H_{11} &= \frac{\partial^2 ATP_1(t_1, T, p)}{\partial t_1^2} = -\frac{D(p) [(h+2\theta c)e^{\theta t_1} + s + 2cI_k e^{\theta(t_1-M)}]}{T} < 0, \\ H_{12} &= \frac{\partial^2 ATP_1(t_1, T, p)}{\partial t_1 \partial T} = \frac{D(p) [(h+2\theta c)(e^{\theta t_1} - 1) + \theta s t_1 + \theta p I_e M + cI_k (e^{\theta(t_1-M)} - 1)]}{\theta T^2}, \\ H_{13} &= \frac{\partial^2 ATP_1(t_1, T, p)}{\partial t_1 \partial p} \\ &= \frac{b [(h+2\theta c)(e^{\theta t_1} - 1) + s\theta(t_1 - T) + \theta p I_e M + cI_k (e^{\theta(t_1-M)} - 1)] - \theta I_e M D(p)}{\theta T}, \\ H_{22} &= \frac{\partial^2 ATP_1(t_1, T, p)}{\partial T^2} = -\frac{2\theta^2 A}{\theta^2 T^3} - D(p) \frac{2(h+2c\theta) [(e^{\theta t_1} - 1) - \theta t_1]}{\theta^2 T^3} \\ &\quad - D(p) \frac{st_1^2 - pI_e M^2 + 2pI_e M t_1 + 2cI_k [e^{\theta(t_1-M)} - \theta(t_1 - M) - 1]}{\theta^2 T^3} < 0, \\ H_{23} &= \frac{\partial^2 ATP_1(t_1, T, p)}{\partial T \partial p} = -\frac{b(h+2c\theta) [(e^{\theta t_1} - 1) - \theta t_1]}{\theta^2 T^2} - \frac{b\theta^2 (st_1^2 - pI_e M^2 + 2pI_e M t_1)}{2\theta^2 T^2} \\ &\quad - \frac{\theta^2 D(p) (I_e M^2 - 2I_e M t_1) + 2bcI_k [e^{\theta(t_1-M)} - \theta(t_1 - M) - 1]}{2\theta^2 T^2} + sb, \\ H_{33} &= \frac{\partial^2 ATP_1(t_1, T, p)}{\partial p^2} = -\frac{b[2T + I_e M^2 + 2I_e M(T - t_1)]}{T} < 0. \end{aligned}$$

当产品的易腐率很低时, 即 $\theta \rightarrow 0$. 由泰勒展开式定理可知 $e^{\theta t_1} \approx 1 + \theta t_1 + \frac{(\theta t_1)^2}{2}$, $e^{\theta(t_1-M)} \approx 1 + \theta(t_1 - M) + \frac{[\theta(t_1-M)]^2}{2}$. 此时, 近似的目标函数为

$$\begin{aligned} ATP_1(t_1, T, p) &\approx TP_1(t_1, T, p) \\ &= \frac{2pD(p)T - 2A - hD(p)t_1^2 - 2cD(p)(\theta t_1^2 + T) - sD(p)(T - t_1)^2}{2T} \\ &\quad + \frac{pD(p)I_e M^2 + 2pD(p)(T - t_1)I_e M - cD(p)I_k(t_1 - M)^2}{2T}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

然后, 在产品易腐率很低及固定 T 的情况下, 通过一个定理给出订购周期内零售商的最优零售价格及最优缺货时间的解析解, 并实现了零售商单位时间的平均总利润的最大化.

定理 4.2 当 T 固定, 且 $B^2 - 4AC \geq 0$ 时, 存在最优零售价格及最优缺货时间 p^*, t_1^* , 使

得零售商单位时间的平均总利润 $ATP_i(t_1, T, p)$ 达到最大化, 且

$$t_1^* = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad p^* = -\frac{(h + 2c\theta + s + cI_k) \left(\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right) - sT - cI_k M}{I_e M}, \quad (4.3)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= I_e M b (3h + 6c\theta + 3s + 4cI_k), \\ B &= -[I_e M b (cI_k + 2sT + 2cI_k M) + 2b(h + 2c\theta + s + cI_k)(2T + I_e M^2 + 2TI_e M)], \\ C &= -I_e M(a + sbT^2 + cbI_k M^2) + 2b(sT + cI_k M)(2T + I_e M^2 + 2TI_e M). \end{aligned}$$

证 在固定 T 的情况下, 决策函数 $TP_i(t_1, T, p)$ 关于 t_1, p 求一阶偏导数, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial TP_1(t_1, T, p)}{\partial t_1} &= \frac{-hD(p)t_1 - 2cD(p)\theta t_1 + sD(p)(T - t_1)}{T} \\ &\quad - \frac{pD(p)I_e M + cD(p)I_k(t_1 - M)}{T}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial TP_1(t_1, T, p)}{\partial p} &= \frac{(a - 2bp)[2T + I_e M^2 + 2(T - t_1)I_e M] + hbt_1^2}{2T} \\ &\quad + \frac{2cb(\theta t_1^2 + T) + sb(T - t_1)^2 + cbI_k(t_1 - M)^2}{2T}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

令 (4.4) 与 (4.5) 式等于零, 可得

$$p = -\frac{(h + 2c\theta + s + cI_k)t_1 - sT - cI_k M}{I_e M}, \quad (4.6)$$

$$p = \frac{a + [hbt_1^2 + 2cb(\theta t_1^2 + T) + sb(T - t_1)^2 + cbI_k(t_1 - M)^2]}{2b[2T + I_e M^2 + 2(T - t_1)I_e M]}, \quad (4.7)$$

$$At_1^2 + Bt_1 + C = 0. \quad (4.8)$$

由 (4.8) 与 (4.6) 式, 可得 (4.3) 式, 对应的海塞矩阵为

$$\begin{aligned} \tilde{H}(t_1^*, p^*) &= \begin{bmatrix} \tilde{H}_{11} & \tilde{H}_{12} \\ \tilde{H}_{21} & \tilde{H}_{22} \end{bmatrix}, \\ \tilde{H}_{12} &= \frac{\partial^2 TP_1(t_1, T, p)}{\partial t_1 \partial p} = \frac{b[ht_1^* + 2c\theta t_1^* - s(T - t_1^*) + cI_k(t_1^* - M)] - (a - 2bp^*)I_e M}{T}, \\ \tilde{H}_{11} &= \frac{\partial^2 TP_1(t_1, T, p)}{\partial t_1^2} = -\frac{(a - bp^*)(h + 2c\theta + s + cI_k)}{T}, \\ \tilde{H}_{22} &= \frac{\partial^2 TP_1(t_1, T, p)}{\partial p^2} = \frac{-2b[2T + I_e M^2 + 2(T - t_1^*)I_e M]}{2T}. \end{aligned}$$

易验证, $\tilde{H}(t_1^*, p^*)$ 是负定矩阵. 即证.

4.2 易腐率比较大时的最优决策

令 $x = (p, T, t_1)$, 则方程 (3.4) 中的目标函数可转化为

$$f(x) = \begin{cases} -f_1(x), & g_{1k}(x) \geq 0, \\ -f_2(x), & g_{2k}(x) \geq 0, \\ -f_3(x), & g_{3k}(x) \geq 0, \\ -f_4(x), & g_{4k}(x) \geq 0, \end{cases}$$

其中 $g_{ik} \geq 0$ ($i = 1, \dots, 4; k = 1, \dots, 4$) 为不等式约束条件; $f_i(x) = -ATP_i(t_1, T, p)$, 则公式 (3.4) 可变为

$$\min f(x) = \begin{cases} \min -f_1(x), & \text{s.t. } g_{1k}(x) \geq 0, \\ \min -f_2(x), & \text{s.t. } g_{2k}(x) \geq 0, \\ \min -f_3(x), & \text{s.t. } g_{3k}(x) \geq 0, \\ \min -f_4(x), & \text{s.t. } g_{4k}(x) \geq 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

通过 $\min f(x)$ 构造罚函数, 即增广目标函数的无约束子问题为

$$\min H(x, \tau_k) = f_i(x) + \tau_k \sum_{k=1}^3 \frac{1}{g_{ik}(x)}. \quad (4.10)$$

为了获得优化问题 (4.9) 的数值解, 本节采用内点算法^[15-17]进行计算, 该算法的具体迭代流程图如下.

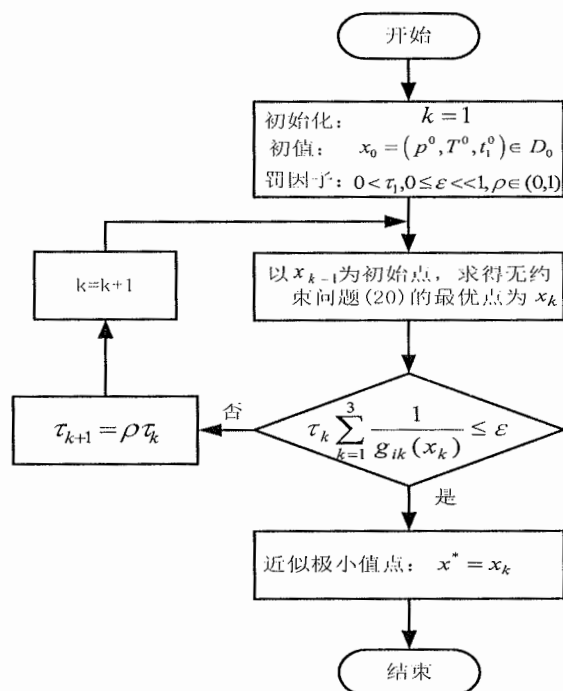


图 3: 算法流程图

注 4.1 以上算法中, 罚因子选择准则为选取数列 $\{\tau_k\}$, 满足以下条件

(1) 正数列;

(2) 单调递减趋于零.

注 4.2 罚因子的选择对该算法有一定的影响, 一般来说不能太大也不能太小, 当罚因子过大, 可能会使问题 (4.10) 远离问题 (4.9); 当罚因子过小, 即 $\tau_k \rightarrow 0$, 惩罚项 $\rightarrow 0 \cdot \infty$ 形式, 则会给增广目标函数的求解带来计算上的困难.

假设某物品的周需求量为 $D = 100000 - 5000p$ 千克, 每千克该物品的购买成本为 $c = 3$ 元, 每次固定订购费用为 $A = 1000$ 元, 每周每千克该物品的存储费用为 $h = 0.3$ 元, 每周每千克该物品的存储费用为 $s = 2$ 元, 该物品的变质率为 $\theta = 0.01$, 延期期限为 $M = 0.5$ 周, 年利息收益率为 $I_e = 0.09$, 年利息支付率为 $I_e = 0.13$, 贷款部分延期支付的比率 $\alpha = 0.75$ (每周按 365 天计算). 运用内点算法, 并借助 Matlab2014a 软件进行求解, 可得最优零售价格、最优订购周期及最优缺货时间 $x^* = (p^*, T^*, t_1^*)$ 的数值解, 及零售商单位时间的平均总利润最大值如下表 2.

表 2: 各种情形下对应的零售商的最优决策

情况分类	初始点 x_0	迭代次数	迭代步长	最优决策 x^*	利润最大值
(1) $M \leq t_1 < T$ ($Q+S \geq Q_d$)	(0.5, 1, 10)	11	9.0683e-08	(0.5, 0.6694, 11.5125)	3.6885e+05
	(0.25, 0.5, 5)	12	2.5653e-07		
	(0.5, 1, 20)	10	1.2126e-07		
	(0.25, 1, 10)	13	1.6923e-06		
	(0.5, 0.8, 10)	11	5.4598e-08		
(2) $t_1 < M, T$ ($Q+S \geq Q_d$)	(0.3, 0.5, 10)	19	1.3164e-10	(0.141, 0.239, 11.4671)	3.7489e+05
	(0.4, 0.5, 10)	16	5.8724e-11		
	(0.3, 0.6, 10)	14	1.2806e-10		
	(0.3, 0.5, 20)	17	8.8388e-11		
	(0.4, 0.6, 20)	19	8.3978e-11		
(3) $M \leq t_1 < T$ ($Q+S < Q_d$)	(0.5, 1, 10)	10	7.1372e-06	(0.5, 0.6449, 11.5198)	3.6545e+05
	(0.25, 0.5, 5)	13	1.4548e-07		
	(0.5, 1, 20)	14	8.6758e-10		
	(0.25, 1, 10)	11	7.7146e-10		
	(0.5, 0.8, 10)	11	2.7047e-08		
(4) $t_1 < M, T$ ($Q+S < Q_d$)	(0.3, 0.5, 10)	23	1.0196e-10	(0.1624, 0.2546, 11.48)	3.6990e+05
	(0.4, 0.5, 10)	17	9.6157e-11		
	(0.3, 0.6, 10)	14	7.3545e-11		
	(0.3, 0.5, 20)	24	9.7357e-11		
	(0.4, 0.6, 20)	28	1.0747e-10		

可得, 不同情形下, 零售商的最优订购量为

$$Q^* + S^* = \begin{cases} 28461 (kg), & T_d \leq t_1, M \leq t_1 < T, \\ 10201 (kg), & T_d \leq t_1 < M, T, \\ 27397 (kg), & T_d > t_1, M \leq t_1 < T, \\ 10850 (kg), & T_d > t_1, t_1 < M, T. \end{cases}$$

分析可知在贷款全部获得延期支付的最小订购量取对应值下, 零售商的最优缺货时间、最优订购周期、最优零售价格及订购周期内年最大利润, 如下表 3.

表 3: 贷款全部获得延期支付最小订购量 Q_d 对缺货时间、订购周期、零售价格及零售商利润影响

情形	Q_d (kg)	$365 \cdot t_1^*$ (天)	$365 \cdot T^*$ (天)	p^* (元/kg)	$365 \cdot ATP^*$ (元)
$M \leq t_1 < T$	25000	182	244	11.5125	368850
	30000	182	235	11.5198	365450
$t_1 < M, T$	10000	51	87	11.4671	374890
	11000	59	93	11.481	369900

5 数值分析

本节通过数值实验进一步分析采购费用、库存费用、缺货费用及腐蚀率对最优缺货时间、最优订购周期、最优零售价格及零售商年最大利润的影响, 如下表 4-7. 假设所对应的参数值和 4.2 节中的相同, 不失一般性, 仅 $M \leq t_1 < T (Q+S \geq Q_d)$ 情形下进行讨论.

表 4: 采购费用对缺货时间、订购周期、零售价格及零售商利润的影响

采购费用	1000	1100	1200	1300	1400	1500
最优缺货时间	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
最优订购周期	0.6694	0.6712	0.6730	0.6747	0.6765	0.6782
最优零售价格	11.5125	11.5127	11.5129	11.5132	11.5134	11.5136
单周期年利润	368850	368700	368550	368410	368260	368110

表 5: 库存成本对缺货时间、订购周期、零售价格及零售商利润的影响

库存成本	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19	0.20
最优缺货时间	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
最优订购周期	0.6694	0.6713	0.6732	0.6751	0.6770	0.6788
最优零售价格	11.5125	11.5145	11.5166	11.5186	11.5207	11.5227
单周期年利润	368850	368690	368540	368380	368220	368070

表 6: 腐蚀率对缺货时间、订购周期、零售价格及零售商利润的影响

腐蚀率	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
最优缺货时间	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
最优订购周期	0.6694	0.6752	0.6808	0.6865	0.6921	0.6977
最优零售价格	11.5125	11.5187	11.5249	11.5310	11.5371	11.5432
单周期年利润	368850	368370	367900	367420	366950	366480

由表 4、5、6 可知, 最优缺货时刻随着单周期内固定采购费用、库存成本及腐蚀率的增加而不变; 最优订购周期及最优零售价格随着单周期内固定采购费用、库存成本及腐蚀率的增加而增加; 零售商年利润随着单周期内固定采购费用、库存成本及腐蚀率的增加而减少.

表 7: 缺货成本对缺货时间、订购周期、零售价格及零售商利润的影响

缺货成本	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
最优缺货时间	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
最优订购周期	0.7171	0.7055	0.6951	0.6857	0.6772	0.6694
最优零售价格	11.5118	11.5120	11.5121	11.5123	11.5124	11.5125
单周期年利润	369420	369280	369160	369050	368950	368850

由表 7 可知, 最优缺货时刻随着缺货成本的增加而不变; 最优零售价格随着单周期内缺货成本的增加而增加; 最优订购周期及零售商年利润随着缺货成本的增加而减少.

根据以上的数值分析, 可以得到以下管理见解:

- 第一 单周期固定采购费用、库存成本及腐蚀率越少, 缺货成本越多, 则缺货时间越短.
- 第二 单周期固定采购费用、库存成本及腐蚀率越少, 缺货成本越多, 则订购周期越短.
- 第三 单周期固定采购费用、库存成本、腐蚀率及缺货成本越多, 则零售价格越大.
- 第四 单周期固定采购费用、库存成本、腐蚀率及缺货成本越多, 则零售商年利润越小.

6 结论

当零售商面临资金约束, 零售商很难从银行等外部渠道获得融资时, 如何实现内部融资是供应链金融研究的热点. 因此, 供应商对零售商提供延期支付优惠策略来刺激其订购行为, 且延期支付的期限与订购量相关. 首先, 针对易腐产品, 且允许缺货发生、零售价格影响市场需求量情形下, 建立了相应的库存决策模型. 其次, 在易腐率很小的情况下, 对目标函数进行二阶泰勒展开, 并运用微积分及矩阵论知识, 在订购周期固定的条件下, 获得了零售商最优缺货时间、最优零售价格及年平均最大利润的解析解. 然后, 在易腐率比较大的情况下, 借助内点算法, 获得了零售商最优决策的数值解. 最后, 通过数值实验分析单周期内固定采购费用、库存成本、腐蚀率及缺货成本对零售商最优决策的影响, 可得单周期内固定采购费用、库存成本、腐蚀率及缺货成本越少, 对零售商和客户越有利.

该模型在实际生活中有如下几方面的应用价值: ① 供应商可以根据日常中的具体情况, 通过改变贷款全部获得延期支付的最小订购量来调控零售商的订购量. ② 当产品发生缺货时, 零售商可以确定适当的缺货时间、订购周期及零售价格来实现其年利润的最大化, 为零售商在库存管理方面提供了理论支持. ③ 对易腐产品库存管理方面的问题, 借助文中的算法可以很容易获取零售商的最优决策. 同时, 本模型可以进一步扩展, 如解决多阶段多产品库存问题.

参 考 文 献

- [1] 王文利. 需求不确定下的供应链融资研究—基于报童模型视角 [M]. 北京: 中国金融出版社, 2014.
- [2] 李明芳, 王道平. 延期支付期限与订货量相关情形下的 EOQ 模型 [J]. 系统管理学报, 2011, 20(4): 389-397.
- [3] Goyal S K. Economic order quantity under conditions of permissible delay in payments [J]. J. Oper. Res. Soc., 1985, 36(4): 335-338.
- [4] Chung K J. A theorem on the determination of economic order quantity under conditions of permissible delay in payments [J]. Comp. Oper. Res., 1998, 25(1): 49-52.

- [5] Huang Y. Optimal retailer's replenishment decisions in the EPQ model under two levels of trade credit policy [J]. *Euro. J. Oper. Res.*, 2007, 176(3): 1577–1591.
- [6] Chen S, Cárdenas-Barrón L E, Teng J. Retailer's economic order quantity when the supplier offers conditionally permissible delay in payments link to order quantity [J]. *Intern. J. Prod. Econ.*, 2014, 155: 284–291.
- [7] 李明芳, 王道平, 李锋. 基于现金折扣和延期支付条件下变质产品的补货策略 [J]. *管理评论*, 2011, 23(4): 122–128.
- [8] Sana S S, Chaudhuri K S. A deterministic EOQ model with delays in payments and price-discount offers [J]. *Euro. J. Oper. Res.*, 2008, 184(2): 509–533.
- [9] Dye C, Ouyang L. A particle swarm optimization for solving joint pricing and lot-sizing problem with fluctuating demand and trade credit financing [J]. *Comput. Indus. Engin.*, 2011, 60(1): 127–137.
- [10] 李明芳, 王道平. 延期支付条件下零售商的最优售价和订货策略 [J]. *运筹与管理*, 2011, 20(06): 59–65.
- [11] 梁培培, 孙延明. 需求基于瞬时库存的延期支付策略设计 [J]. *统计与决策*, 2015, 30(06): 41–43.
- [12] Shukla H S, Shukla V and Yadav S K. Optimal ordering policies in the EOQ (economic order quantity) model with time-dependent demand rate under permissible delay in payments [J]. *Intern. J. Modern Engin. Sci.*, 2015, 4(1): 1–3.
- [13] Shukla H S, Tripathi R P, Siddiqui A. EOQ model with inventory level dependent demand rate under permissible delay in payments with cash discount [J]. *Indian J. Sci. Tech.*, 2015, 8(28).
- [14] 周永务, 王圣东. 库存控制理论与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [15] 马昌凤. 最优化方法及其 Matlab 程序设计 [M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [16] 雍龙泉, 邓方安, 陈涛. 单调线性互补问题的一种内点算法 [J]. *数学杂志*, 2009, 29(5): 681–686.
- [17] 龚小玉, 张明望. 非单调线性互补问题的高阶宽领域内点算法 [J]. *数学杂志*, 2009, 29(2): 217–223.

INVENTORY POLICIES MODEL FOR DETERIORATING GOODS WHEN PERMISSIBLE DELAY IN PAYMENTS CORRELATED WITH ORDER QUANTITY

WEI Cai-min^{1,2}, LI Zhong-ping¹, LIN Xiao-ping¹

(1.College of Science, Shantou University, Shantou 515063, China)

(2.Guangdong Provincial Key Lab of Digital Signals and Image Processing, Shantou University,
Shantou 515063, China)

Abstract: In this paper, inventory policies problem for deteriorating goods is studied under permissible delay in payments correlated with order quantity. When deteriorating rate is very low, by using the second-order Taylor expansion, matrix theory and optimization techniques, we obtain the optimal out-of stock time, the optimal ordering cycle and the optimal retail price; when deteriorating rate is relatively large, we provide an interior point algorithm for acquiring the retailer's optimal decision marking solution. Finally, a numerical experiment is to illustrate and discuss the influence of parameters on the optimal decision marking.

Keywords: inventory; permissible delay in payments; deteriorating goods; order quantity

2010 MR Subject Classification: 90B05 ; 90C51