Vol. 28 (2018)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

具有 Prey-Taxis 的 Holling-Tanner 捕食模型的分支结构

张晓杰, 张丽娜
(西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070)

摘 要: 本文研究了一类具有 prey-taxis 的 Holling-Tanner 捕食模型中的斑图生成问题. 运用线性化分析的方法和经典的分支理论, 证明了只有当趋化排斥发生时, 由正平衡点处才可以分支出非常数正平衡解. 进一步在分支点附近确定了分支方向.

关键词: Holling-Tanner 捕食模型; prey-taxis; 分支; 非常数正平衡解
MR(2010) **主题分类号**: 35B32; 35B36 **中图分类号**: O175.26
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2018)01-0140-07

1 引言

本文讨论如下具有 prey-taxis 的 Holling-Tanner 捕食模型

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=d_1\Delta u+au-u^2-\dfrac{uv}{m+u}, & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty),\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}=d_2\Delta v-\chi\nabla(v\nabla u)+bv-\dfrac{v^2}{ru}, & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty),\\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}=\dfrac{\partial v}{\partial \nu}=0, & x\in\partial\Omega\times(0,\infty),\\ u(x,0)=u_0(x),\quad v(x,0)=v_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 u,v 分别表示食饵和捕食者的密度函数, a,b 是其各自的内禀增长率, ru 可解释为依赖于食饵的捕食者的承载能力, $u/(m+u)$ 是 Holling II 型功能反应函数, 表示捕食者吃食饵的速率. 参数 a,m,b,r 均为正常数. 正常数 d_1,d_2 为扩散系数, $\chi\nabla(v\nabla u)$ 为 prey-taxis 项. 齐次 Neumann 边界条件意味着该生态系统是自我封闭的, 在边界 $\partial\Omega$ 上物种的流量为零.

模型 (1.1) 所对应的常微分方程系统 (即 (1.1) 式中 $d_1=d_2=\chi=0$) 被称为 Holling-Tanner 捕食模型 [1], 是数学家和生物学家 Robert May 为了能够精确地描述诸如山猫和野兔、麻雀和食雀鹰等生态系统物种间的相互作用而提出的一个新的具有 Holling 响应函数的模型 [2], 由于其重要的生物意义和特有的数学特性, 该模型得到了大量的研究, 如稳定的极限环、半稳定的极限环、分支、周期解等有趣的数学现象均被发现 [3–5]. 考虑到种群密度空间分布不均匀因素, 彭锐等在文献 [6, 7] 中关注了具有扩散的 Holling-Tanner 捕食模型 (即 (1.1) 式中 $\chi=0$), 获得了非常数正解的存在性和不存在性的一些结果, 给出了唯一的正常数平衡解全局渐近稳定的一些充分条件.

事实上, 在现实生态环境中, 物种的扩散往往还会受到其他物种的影响. 这些物种间的相互作用可以通过交错扩散模型来描述, 相应的数学模型是强耦合的非线性偏微分方程组 [8, 9].

*收稿日期: 2016-04-08 接收日期: 2016-09-01
基金项目: 国家自然科学基金 (11061031).
作者简介: 张晓杰 (1992–), 男, 甘肃天水, 硕士, 主要研究方向: 偏微分方程及其应用.

与仅带一般扩散的弱耦合系统相比, 强耦合的系统在理论研究和数值计算两方面都存在更大的困难. 模型 (1.1) 中 prey-taxis 项 $\chi\nabla(v\nabla u)$ 就是一种交错扩散项, 如果 $\chi>0$ 称趋化吸引, 表示捕食者向食饵密度增大的方向运动, 即捕食者追逐食饵. 如果 $\chi<0$ 称趋化排斥, 表示捕食者向食饵密度减小的方向运动, 从生物学的角度来看, 这表示食饵聚集起来形成了一个团结互助、共同抵御外敌的群体, 从而保护自己免受捕食者的攻击 [10].

本文主要关注 prey-taxis 项对平衡态斑图的影响. 我们的结果表明趋化吸引具有稳定化作用, 会抑制平衡态斑图生成, 而趋化排斥具有不稳定化作用, 会导致平衡态斑图生成. 具体地, 我们首先对模型 (1.1) 的线性稳定性进行详细的分析, 得到唯一正常数平衡点 (u^*,v^*) 的一些稳定性结果. 然后应用 Crandall-Rabinowitz 分支理论 [11], 以趋化系数 χ 为分支参数, 讨论模型 (1.1) 的正分支解的存在性以及分支方向, 从而对平衡态斑图的结构进行更深刻的刻画.

2 稳定性分析

易知, 系统 (1.1) 存在唯一的正常数平衡解 (u^*,v^*), 其中

$$u^*=\frac{1}{2}(a-m-br+\sqrt{4am+(m+br-a)^2}),\ \ v^*=bru^*.$$

为简便起见, 记

$$\begin{aligned}
&f(u,v)=au-u^2-\frac{uv}{m+u},\ \ g(u,v)=bv-\frac{v^2}{ru},\\
&f_1=f_u(u^*,v^*)=a-2u^*-\frac{mv^*}{(m+u^*)^2},\ f_2=f_v(u^*,v^*)=-\frac{u^*}{m+u^*}<0,\\
&g_1=g_u(u^*,v^*)=b^2r>0,\ g_2=g_v(u^*,v^*)=-b<0.
\end{aligned}$$

在全文中, 总假设

$$f_1+g_2<0,\ \ f_1g_2-f_2g_1>0 \tag{H0}$$

成立. 这意味着 (u^*,v^*) 作为系统 (1.1) 相应的常微分系统的常数平衡点是稳定的.

令 $0=\mu_0<\mu_1\le\mu_2\le\mu_3\le\cdots$ 是椭圆算子 $-\Delta$ 在 $\bar{\Omega}$ 上相应于齐次 Neumann 边界条件的特征值, 每个特征值 μ_i 的重数为 $m_i\ge1$, $\phi_{ij},1\le j\le m_i$ 为 μ_i 标准化的特征函数, 则集合 $\{\phi_{ij}|i\ge0,1\le j\le m_i\}$ 构成 $L^2(\Omega)$ 空间中的一组完备正交基, 记 $\mathbf{X}_{ij}=\{\mathbf{c}\phi_{ij}:\mathbf{c}\in\mathbb{R}^2\}$, $\mathbf{X}_i=\bigoplus_{j=1}^{m_i}\mathbf{X}_{ij}$ 以及 $\mathbf{X}=\bigoplus_{i=1}^{+\infty}\mathbf{X}_i$. 下面用线性化分析的方法得到系统 (1.1) 唯一的正常数平衡点 (u^*,v^*) 的线性稳定性结果.

考察线性化算子

$$L_0=\begin{pmatrix} d_1\Delta+f_1 & f_2\\ -\chi v^*\Delta+g_1 & d_2\Delta+g_2\end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

对于每一个 $i\ge0$, $\mathbf{X}_i$ 在算子 L_0 的作用下是不变的, η 是 L_0 在 $\mathbf{X}_i$ 上的特征值当且仅当 η 是矩阵 $\begin{pmatrix} -\mu_id_1+f_1 & f_2\\ \mu_i\chi v^*+g_1 & -\mu_id_2+g_2\end{pmatrix}$ 的特征值. 特征方程为 $\eta^2-P_i(\mu_i,\chi)\eta+Q_i(\mu_i,\chi)=0$, 其中

$$P_i(\mu_i,\chi)=-(d_1+d_2)\mu_i+f_1+g_2, \tag{2.2}$$

$$Q_i(\mu_i,\chi)=d_1d_2\mu_i^2-(\chi v^*f_2+d_2f_1+d_1g_2)\mu_i+f_1g_2-f_2g_1. \tag{2.3}$$

显然, $P_i(\mu_i,\chi)=P_i(\mu_i,0)$, $Q_i(\mu_i,\chi)=Q_i(\mu_i,0)-\chi v^* f_2\mu_i$. 记

$$\chi_i=\frac{Q_i(\mu_i,0)}{f_2v^*\mu_i}=\frac{d_1d_2\mu_i^2-(d_2f_1+d_1g_2)\mu_i+f_1g_2-f_2g_1}{f_2v^*\mu_i}, i\geq 1. \tag{2.4}$$

注意到 $f_2<0$ 和假设条件 (H0), 易于得到下述定理.

定理 2.1 (i) 如果 $P_i(\mu_i,0)<0$, $Q_i(\mu_i,0)>0$ 对所有的 $i\geq 1$ 成立. 则对所有的 $\chi>0$, 系统 (1.1) 唯一的正常数平衡点 (u^*,v^*) 是局部渐近稳定的.

(ii) 如果对所有的 $i\geq 0$, $P_i(\mu_i,0)<0$, 存在某些 $i\geq 1$ 使得 $Q_i(\mu_i,0)<0$ 成立. 记 $\Lambda_1=\{i|i\geq 1, Q_i(\mu_i,0)<0\}$. 则对所有的 $\chi>\max\limits_{i\in\Lambda_1}\chi_i$, 系统 (1.1) 唯一的正常数平衡点 (u^*,v^*) 是局部渐近稳定的. iii

(iii) 如果 $P_i(\mu_i,0)<0$, $Q_i(\mu_i,0)>0$ 对所有的 $i\geq 1$ 成立. 则对所有的 $\chi<\max\limits_{1\leq i\leq+\infty}\chi_i$, 系统 (1.1) 唯一的正常数平衡点 (u^*,v^*) 是不稳定的.

定理 2.1(i) 表明, 无趋化时 $(\chi=0)$ 稳定的正常数平衡点在捕食者对食饵的趋化是吸引 $(\chi>0)$ 时仍保持稳定. 定理 2.1(ii) 意味着常微分系统稳定的常数平衡点, 在只有扩散而无趋化时由于扩散导致的不稳定, 当捕食者对食饵的趋化吸引出现时, 会将这种扩散导致的不稳定再次变得稳定. 也就是说, 趋化吸引具有稳定化作用, 会抑制斑图的生成. 定理 2.1(iii) 表明, 对于常微分系统和只有扩散的偏微分系统均稳定的常数平衡点, 捕食者对食饵的趋化排斥会导致常数平衡点不稳定. 即趋化排斥具有不稳定化作用, 可能会导致斑图生成.

3 局部分支

显然当 $f_1<0$ 时, (2.2) 和 (2.3) 式中 $P_i(\mu_i,0)<0$, $Q_i(\mu_i,0)>0$ 对所有的 $i\geq 1$ 成立. 定理 2.1 的 (i) 和 (iii) 意味着只有趋化排斥才可能导致斑图生成. 本节在条件 $f_1<0$ 下, 以趋化系数 $\chi<0$ 为分支参数, 应用分支理论证明非常数正平衡解的存在性, 从而说明趋化排斥确实会导致平衡态斑图生成.

为了简便起见, 在一维空间 $\Omega=(0,l), l>0$ 上讨论. 对于高维情形可类似讨论. 即关注平衡态系统

$$\begin{cases} d_1\Delta u+au-u^2-\dfrac{uv}{m+u}=0, & x\in(0,l),\\ d_2\Delta v-\chi\nabla(v\nabla u)+bv-\dfrac{v^2}{ru}=0, & x\in(0,l),\\ u'(x)=v'(x)=0, & x=0,l. \end{cases} \tag{3.1}$$

在一维情况下, $\mu_i=(\pi i/l)^2$, 相应的标准化的特征函数为

$$\phi_0(x)=1/\sqrt{l},\ \phi_i(x)=\sqrt{2/l}\cos i\pi x/l,\ i\geq 1.$$

令 $\mathrm{Y}=L^2(0,l)\times L^2(0,l)$ 是一个 Hilbert 空间, 其内积形式为 $(U_1,U_2)_{\mathrm{Y}}=(u_1,u_2)_{L^2(0,l)}+(v_1,v_2)_{L^2(0,l)}$, $\bar{\mathrm{X}}=\{(u,v):u,v\in L^2(0,l), u'=v'=0, x=0, x=l\}$. 定义算子 $F:\mathbb{R}\times\bar{\mathrm{X}}\to\mathrm{Y}$,

$$F(\chi;u,v)=\begin{pmatrix} d_1\Delta u+f(u,v)\\ d_2\Delta v-\chi\nabla(v\nabla u)+g(u,v)\end{pmatrix}.$$

首先, 在平凡解曲线 $\Gamma=\{\chi;(u^*,v^*)\}\subseteq\mathbb{R}\times X$ 上寻找所有可能的分支点.

根据隐函数定理, 若 $(\chi; u^*, v^*)$ 是一个分支点, 则算子 $F(\chi; u, v)$ 关于 (u, v) 的导算子 $F_{(u,v)}(\chi; u, v)$ 在 $(\chi; u^*, v^*)$ 处退化. 由第 2 部分稳定性分析的过程知, 在 (2.1) 式线性化算子 L_0 中取 $\chi = \chi_i$, 则 $L_0(\chi_i) = F_{(u,v)}(\chi_i; u^*, v^*)$. 易见 (2.3) 式中 $\chi = \chi_i$ 时 $Q_i(\mu_i, \chi_i) = 0$, 算子 $F_{(u,v)}(\chi_i; u^*, v^*)$ 具有零特征值. 这意味着对所有的 $i \geq 1$, $(\chi_i; u^*, v^*)$ 均为可能的分支点.

定理 3.1 假设 $f_1 < 0$ 成立. 设 i 是一个正整数, 若 $i \neq j$ 时, $\chi_i \neq \chi_j$, 则存在一个正常数 δ 使得系统 (3.1) 在分支点 $(\chi_i; u^*, v^*)$ 邻域中的非常数正解可以表示为

$$\chi(s) = \chi_i + s^2\tilde{\chi}(s),\ u(s) = u^* + s\phi_i + s^2\tilde{u}(s),\ v(s) = v^* + sb_i\phi_i + s^2\tilde{v}(s),\ s \in (-\delta, \delta), \tag{3.2}$$

其中 $b_i = \frac{d_1\mu_i - f_1}{f_2} < 0$, $\tilde{\chi}(s), \tilde{u}(s), \tilde{v}(s)$ 是关于 s 的光滑函数, 且满足 $\displaystyle\int_0^l (\tilde{u}(s) + b_i\tilde{v}(s))\phi_i dx = 0$.

证 由定理的假设条件知

$$\mathrm{Ker}F_{(u,v)}(\chi_i; u^*, v^*) = \mathrm{span}\left\{U_0\right\},\quad U_0 = (\phi_i, b_i\phi_i),\quad b_i = \frac{d_1\mu_i - f_1}{f_2} < 0.$$

考虑 $F_{(u,v)}(\chi_i; u^*, v^*)$ 的共轭算子 $F^*_{(u,v)}(\chi_i; u^*, v^*)$. 易于验证

$$\mathrm{Ker}F^*_{(u,v)}(\chi_i; u^*, v^*) = \mathrm{span}\left\{U_0^*\right\},\quad U_0^* = (\phi_i, b_i^*\phi_i),\quad b_i^* = \frac{f_2}{d_2\mu_i - g_2} < 0.$$

由 Frédholm 二择一定理,

$$\mathrm{Range}F_{(u,v)}(\chi_i; u^*, v^*) = [\mathrm{Ker}F^*_{(u,v)}(\chi_i; u^*, v^*)]^{\perp}.$$

因此 codim $\mathrm{Range}F_{(u,v)}(\chi_i; u^*, v^*) = 1$. 由于

$$\left\langle F_{\chi,(u,v)}(\chi_i; u^*, v^*)U_0, U_0^*\right\rangle = -\int_0^l \mu_i v^* b_i^* \phi_i^2 dx > 0,$$

故 $F_{\chi,(u,v)}(\chi_i; u^*, v^*)U_0 \notin \mathrm{Range}F_{(u,v)}(\chi_i; u^*, v^*)$. 由局部分支定理 [11], 系统 (3.1) 存在一条由点 $(\chi_i; u^*, v^*)$ 分支出的非平凡解曲线 $(\chi(s); u(s), v(s))$, 其中 $u(s) = u^* + s\phi_i + s^2\tilde{u}(s)$, $v(s) = v^* + sb_i\phi_i + s^2\tilde{v}(s)$, $\chi(s) = \chi_i + s\beta(s)$, $s \in (-\delta, \delta)$, $\tilde{\chi}(s), \tilde{u}(s), \tilde{v}(s)$ 是关于 s 的光滑函数, 且满足 $\displaystyle\int_0^l (\tilde{u}(s) + b_i\tilde{v}(s))\phi_i dx = 0$.

为了证明 (3.2) 式, 只需要证明 $\beta(0) = 0$. 为方便起见, 记 $f_{11} = f_{uu}(u^*, v^*)$, $f_{12} = f_{uv}(u^*, v^*)$, $g_{11} = g_{uu}(u^*, v^*)$, $g_{12} = g_{uv}(u^*, v^*)$. 将 $(\chi(s); u(s), v(s))$ 代入 (3.1) 式的第一个方程, 关于 s 求导两次后令 $s = 0$ 得

$$2d_1\Delta\tilde{u}(0) + 2f_1\tilde{u}(0) + 2f_2\tilde{v}(0) + f_{11}\phi_i^2 + 2f_{12}b_i\phi_i^2 = 0, \tag{3.3}$$

(3.3) 式与 ϕ_i 作 L^2 - 内积, 运用 Green's 公式并注意

$$\langle\phi_i^2, \phi_i\rangle = 0,\ \langle\Delta\tilde{u}(0), \phi_i\rangle = -\lambda_i\langle\tilde{u}(0), \phi_i\rangle,\ \langle\Delta\tilde{v}(0), \phi_i\rangle = -\lambda_i\langle\tilde{v}(0), \phi_i\rangle, \tag{3.4}$$

可得

$$(-\lambda_i d_1 + f_1)\langle\tilde{u}(0), \phi_i\rangle + f_2\langle\tilde{v}(0), \phi_i\rangle = 0. \tag{3.5}$$

另一方面, 将 $(\chi(s);u(s),v(s))$ 代入 (3.1) 式的第二个方程, 关于 s 求导两次后令 $s=0$ 得

$$\begin{aligned}&2d_2\Delta\tilde{v}(0)+2\chi'(0)v^*\mu_i\phi_i-2\chi_ib_i\{(\phi_i')^2-\mu_i\phi_i^2\}\\-\ &2\chi_iv^*\Delta\tilde{u}(0)+2g_1\tilde{u}(0)+2g_2\tilde{v}(0)+g_{11}\phi_i^2+2g_{12}b_i\phi_i^2+g_{22}b_i^2\phi_i^2=0.\end{aligned}\tag{3.6}$$

将 (3.6) 式与 ϕ_i 作 L^2 - 内积, 结合 (3.4) 式, 并注意到 $\langle(\phi_i')^2,\phi_i\rangle=0$ 可得

$$\chi'(0)v^*\lambda_i\langle\phi_i,\phi_i\rangle+(g_2-d_2\mu_i)\langle\tilde{v}(0),\phi_i\rangle+(g_1+\chi_iv^*\mu_i)\langle\tilde{u}(0),\phi_i\rangle=0.\tag{3.7}$$

由 χ_i 的定义式 (2.4), 得 $g_1+\chi_iv^*\mu_i=\frac{(f_1-d_1\mu_i)(g_2-d_2\mu_i)}{f_2}$, 则 (3.7) 式等价于

$$\chi'(0)v^*\lambda_i\langle\phi_i,\phi_i\rangle+\frac{g_2-d_2\mu_i}{f_2}[(f_1-d_1\lambda_i)\langle\tilde{u}(0),\phi_i\rangle+f_2\langle\tilde{v}(0),\phi_i\rangle]=0,\tag{3.8}$$

将 (3.5) 式代入 (3.8) 式, 得 $\beta(0)=\chi'(0)=0$. 定理得证.

4 分支方向

在这一小节, 讨论定理 3.1 中所得到的局部分支解的分支方向. 本小节的目的是求出 $\tilde{\chi}(0)$ 具体的表达式, 它决定了分支曲线 (3.2) 在点 $(\chi_i;u^*,v^*)$ 处相应于平凡解曲线 Γ 的分支方向. 如果 $\tilde{\chi}(0)>0$, 则通常称分支为超临界的; 如果 $\tilde{\chi}(0)<0$, 则称分支为次临界的. 下面的定理告诉我们 $\tilde{\chi}(0)$ 可由四个 L^2 - 内积

$$(A,B,C,D):=(\langle\tilde{u}(0),\phi_i^2\rangle,\langle\tilde{u}(0),(\phi_i')^2\rangle,\langle\tilde{v}(0),\phi_i^2\rangle,\langle\tilde{v}(0),(\phi_i')^2\rangle)\tag{4.1}$$

来表示.

定理 4.1 (3.2) 式中的函数 $\tilde{\chi}(s)$ 满足

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}(0)=\ &-\tfrac{1}{\mu_iv^*}[(\tfrac{f_{11}+f_{12}}{b_i^*}+g_{11}+g_{12}b_i+\chi_i\mu_ib_i)A-\chi_ib_iB+(\tfrac{f_{12}}{b_i^*}+g_{12}+g_{22}b_i)C\\&+\chi_iD+\tfrac{1}{4l}(\tfrac{f_{111}+3f_{112}b_i}{b_i^*}+g_{111}+3g_{112}b_i+3g_{122}b_i^2)],\end{aligned}\tag{4.2}$$

其中 $f_{111}:=f_{uuu}(u^*,v^*)$, $f_{112}:=f_{uuv}(u^*,v^*)$, $g_{111}:=g_{uuu}(u^*,v^*)$, $g_{112}:=g_{uuv}(u^*,v^*)$, $g_{122}:=g_{uvv}(u^*,v^*)$.

关于 (A,B,C,D), 有如下引理.

引理 4.2 (A,B,C,D) 满足下述代数方程组

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}2f_1-4d_1\mu_i & 4d_1 & 2f_2 & 0\\ 4d_1\mu_i^2 & 2f_1-4d_1\mu_i & 0 & 2f_2\\ 2g_1+4\lambda_i\chi_iv^* & -4\chi_iv^* & 2g_2-4d_2\mu_i & 4d_2\\ -4\lambda_i^2\chi_iv^* & 2g_1+4\lambda_i\chi_iv^* & 4d_2\mu_i^2 & 2g_2-4d_2\mu_i\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}A\\B\\C\\D\end{pmatrix}\\=\ &\begin{pmatrix}-\frac{3}{2l}(f_{11}+2f_{12}b_i)\\ -\frac{(\pi i)^2}{2l^3}(f_{11}+2f_{12}b_i)\\ -\frac{3}{l}(\chi_i\mu_ib_i+\frac12g_{11}+g_{12}b_i+\frac12g_{22}b_i^2)+\frac{(\pi i)^2}{l^3}\chi_ib_i\\ -\frac{(\pi i)^2}{l^3}(\chi_i\mu_ib_i+\frac12g_{11}+g_{12}b_i+\frac12g_{22}b_i^2)+\frac{3(\pi i)^4}{l^5}\chi_ib_i\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{4.3}$$

证 令 (3.3) 式与 (3.6) 式各自分别与 ϕ_i^2 和 $(\phi_i')^2$ 作 L^2 - 内积, 通过分部积分并注意到

$$\langle \phi_i^2, \phi_i^2 \rangle = \frac{3}{2l},\ \langle \phi_i^2, (\phi_i')^2 \rangle = \frac{(\pi i)^2}{2l^3},\ \langle (\phi_i')^2, (\phi_i')^2 \rangle = \frac{3(\pi i)^4}{2l^5},$$

易得到 (4.3) 式. 证明从略.

定理 4.1 的证明 将 $(\chi(s); u(s), v(s))$ 分别代入 (3.1) 式的两个方程, 关于 s 求导三次后令 $s=0$ 得

$$\begin{aligned}
&6d_1\Delta\tilde{u'}(0) + 6f_1\tilde{u'}(0) + 6f_2\tilde{v'}(0) + 6(f_{11}+f_{12}b_i)\tilde{u}(0)\phi_i + 6f_{12}\tilde{v}(0)\phi_i \\
&+(f_{111}+3f_{112}b_i)\phi_i^3 = 0, \qquad (4.4)\\
&6d_2\Delta\tilde{v'}(0) - 6\tilde{\chi}(0)v^*\Delta\phi_i - 6\chi_i\nabla\{\tilde{v}(0)\phi_i' + b_i\phi_i\nabla\tilde{u}(0) + v^*\nabla\tilde{u'}(0)\} + 6g_1\tilde{u'}(0) + 6g_2\tilde{v'}(0) \\
&+6(g_{11}+g_{12}b_i)\tilde{u}(0)\phi_i + 6(g_{12}+g_{22}b_i)\tilde{v}(0)\phi_i + (g_{111}+3g_{112}b_i+3g_{122}b_i^2)\phi_i^3 = 0. \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

将 (4.4), (4.5) 式分别与 ϕ_i 作 L^2 - 内积, 由分部积分得

$$\begin{aligned}
&6(f_1 - d_1\lambda_i)\langle\tilde{u'}(0),\phi_i\rangle + 6f_2\langle\tilde{v'}(0),\phi_i\rangle + 6(f_{11}+f_{12}b_i)\langle\tilde{u}(0),\phi_i^2\rangle \\
&+6f_{12}\langle\tilde{v}(0),\phi_i^2\rangle + (f_{111}+3f_{112}b_i)\langle\phi_i^3,\phi_i\rangle = 0, \qquad (4.6)\\
&-6d_2\mu_i\langle\tilde{v'}(0),\phi_i\rangle + 6\tilde{\chi}(0)v^*\mu_i\langle\phi_i,\phi_i\rangle + 6\chi_i\{\langle\tilde{v}(0),(\phi_i')^2\rangle - b_i\langle\tilde{u}(0),(\phi_i')^2 - \mu_i\phi_i^2\rangle \\
&+v^*\mu_i\langle\tilde{u'}(0),\phi_i\rangle\} + 6g_1\langle\tilde{u'}(0),\phi_i\rangle + 6g_2\langle\tilde{v'}(0),\phi_i\rangle + 6(g_{11}+g_{12}b_i)\langle\tilde{u}(0),\phi_i^2\rangle \\
&+6(g_{12}+g_{22}b_i)\langle\tilde{v}(0),\phi_i^2\rangle + (g_{111}+3g_{112}b_i+3g_{122}b_i^2)\langle\phi_i^3,\phi_i\rangle = 0. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

再次注意到 $\langle\phi_i,\phi_i\rangle = 1$, 并且在 (4.6) 和 (4.7) 式中 $\langle\tilde{u'}(0),\phi_i\rangle$ 和 $\langle\tilde{v'}(0),\phi_i\rangle$ 的系数间对应成比例, 将 (4.7) 式代入 (4.6) 式即得 (4.2) 式. 定理 4.1 证毕.

参 考 文 献

[1] Sáez E, González-Olivares E. Dynamies of a predator-prey model [J]. SIAM J. Appl. Math., 1999, 59(3): 1867–1878.

[2] Holling C S. The functional response of invertebrate predators to prey density [J]. Mem. Ent. Soc. Can., 1965, 45(4): 3–60.

[3] Braza P A. The bifurcation structure of the Holling-Tanner model for predator-prey interations using two-timings [J]. SIAM J. Appl. Math., 2003, 63(2): 889–904.

[4] Collings J B. Bifurcation and stability analysis of a tempreture-dependent of predator-prey interation model incorporating a prey-refuge [J]. Bull. Math. Biol., 1995, 57(3): 63–76.

[5] May R M. Limit cycles in predator-prey communities [J]. Sci., 1972, 77(2)：900–902.

[6] Peng Rui, Wang Mingxin. Positive steady-states of the Holling-Tanner prey-predator model with diffusion [J]. Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect A., 2005, 135(4): 149–164.

[7] Peng Rui, Wang Mingxin. Global stability of the equilibrium of a diffusive Holling-Tanner prey-predator model [J]. Appl. Math. Lett., 2007, 20(3): 664–670.

[8] 张艳红. 三种群的竞争系统全局解的一致有界性 [J]. 数学杂志, 2012, 32(6): 1129–1135.

[9] Chen Xueyong, Zhang Jincai. The behavior of the solutions to a multi-group chemotaxis model with reproduction term [J]. J. Math., 2011, 31(5): 853–860.

[10] Wang Xiaoli, Wang Wendi, Zhang Guohong. Global bifurcation of solutions for a predator-prey model with prey-taxis [J]. Math. Meth. Appl. Sci., 2015, 38(2): 431–443.

[11] Crandall M G, Rabinowitz P H. Bifurcation from simple eigenvalues [J]. J. Funct. Anal., 1971, 8(4):321–340.

BIFURCATION STRUCTURES FOR A HOLLING-TANNER PREDATOR-PREY MODEL WITH PREY-TAXIS

ZHANG Xiao-jie, ZHANG Li-na

(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070 ,China*)

Abstract: In this paper, we study pattern formations in a Holling-Tanner predator-prey model with prey-taxis. By using the linear analysis method and the classical bifurcation theory, it is proved that the branches of nonconstant solutions can bifurcate from the positive equilibrium only when the retreating behavior of predators occurs. Furthermore, the directions of the branches near the bifurcation points are obtained.

Keywords: Holling-Tanner predator-prey model; prey-taxis; bifurcation; non-constant positive steady-states

2010 MR Subject Classification: 35B32; 35B36