数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

Vol. 37 (2017)
No. 6

两个正规 p - 超可解子群的积

毛月梅 [1,2], 马小箭 [1], 汤兴政 [2]

(1. 山西大同大学量子信息科学研究所, 山西 大同 037009)

(2. 中国科学技术大学数学学院, 安徽 合肥 230026)

摘 要: 本文研究了两个正规的 p - 超可解子群的积构成的极小非 p - 超可解群的结构的问题. 利用有限群论和群类论的一些基本方法, 获得了两个正规的 p - 超可解子群的积仍为 p - 超可解群的一些充分条件, 并推广了文 [1] 中关于超可解群的情况.

关键词: 有限群; 超可解群; p - 超可解群; Sylow 子群

MR(2010) **主题分类号**: 20D10; 20D15; 20D20 **中图分类号**: O152.1

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2017)06-1309-08

1 引言

有限群论研究中一个基本的事实是两个正规可解子群的积是可解群; 两个正规幂零子群的积是幂零群; 但是, 两个正规超可解 (p - 超可解) 子群的积不一定是超可解群 (p - 超可解群). 自然地, 产生了以下两个问题:

问题 1 在何种条件下, 两个正规超可解 (p - 超可解) 子群的积仍然是超可解 (p - 超可解) 的?

问题 2 (见文献 [2, 第 II 章, 问题 6.34]) 能分解为两个 (正规) 超可解 (p - 超可解) 子群的积的非超可解群 (p - 超可解群) 有什么样的结构?

许多群论学者都研究过问题 1, 比如, 文 [3–13]. 特别地, Baer[5] 证明了: 设 G 是两个正规超可解子群的积, 如果 G' 是幂零的, 那么 G 是超可解的; Friesen[7] 证明了: 设 G 是两个正规超可解子群 M 和 N 的积, 如果指数 $(|G:M|,|G:N|)=1$, 那么 G 是超可解的. 最近, 郭文彬和 Kondrat'ev 在文献 [8, 11] 中研究了能分解为两个正规超可解 (p - 超可解) 子群的积的极小非超可解 (非 p - 超可解) 群的结构, 他们证明了: G 是两个正规超可解 (p - 超可解) 子群的积的极小非超可解群 (非 p - 超可解群) 当且仅当 $G/F(G)$ 是准素数的极小非交换群. 令 $\mathfrak{P}_1$ 是由所有可以表示成两个超可解正规子群积的有限群所构成的群类. 记 $\mathfrak{P}$=$\{G|G$ 是非超可解的 $\mathfrak{P}_1$ - 群, 且 G 的任意 $\mathfrak{P}_1$- 真子群和非平凡商群都是超可解的 $\}$. 文 [1] 的第五章给出了 $\mathfrak{P}$- 群的结构.

作为此类问题的推广, 本文将讨论 p - 超可解群的情况. 令 $(\mathfrak{P}_1)_p$ 是由所有可以表示成两个 p - 超可解正规子群积的有限群所构成的群类. 记 $\mathfrak{P}_p$=$\{G|G$ 是非 p - 超可解的 $(\mathfrak{P}_1)_p$ - 群, 且 G 的任意 $(\mathfrak{P}_1)_p$ - 真子群和非平凡商群都是 p - 超可解的 $\}$. 本文将分类所有的 $\mathfrak{P}_p$ - 群.

本文中用符号 $\mathfrak{G}(\mathfrak{G}_p)$, $\mathfrak{U}(\mathfrak{U}_p)$ 分别表示所有群 (p - 群), 超可解群 (p - 超可解群) 组成的群类, 符号 $\mathfrak{A}(p-1)$ 表示所有幂指数整除 $p-1$ 的交换群作成的群类. 易见, $\mathfrak{U}$ 和 $\mathfrak{A}(p-1)$ 都

*收稿日期: 2016-05-27 接收日期: 2016-09-05

基金项目: 国家自然科学基金 (11371335).

作者简介: 毛月梅 (1980–), 女, 山西大同, 博士, 主要研究方向: 群论.

是饱和群系. 由文 [14, 引理 2.3] 知 $\mathfrak{U}_p$ 也是一个饱和群系. 文中所涉及的群均是有限群. 未交待的概念和符号参见文献 [2, 15].

2 准备知识

首先介绍两种 p - 群, 令

$$E_p(1,1,1)=\langle a,b|c=[a,b],a^p=b^p=c^p=[a,c]=[b,c]=1\rangle,p>2,$$
$$M_p(n,1)=\langle a,b|a^{p^n}=b^p=1,a^b=a^{1+p^{n-1}}\rangle,n\geq 2.$$

注意到 $M_p(n,1)$ 的极大子群只有 $\langle a^p\rangle=Z(M_p(n,1))$, 所以 $M_p(n,1)$ 是一个极小非交换 p - 群. 同样地, $E_p(1,1,1)$ 也是一个极小非交换 p - 群. 文 [1] 中的定理 5.2.6 已证明以下四类群是仅有的 $\mathfrak{P}$ - 群.

群 1 设 p,q 是两个素数, 其中 $q\mid p-1$ 且 $q>2$. $P=\mathrm{F}_pv_1+\mathrm{F}_pv_2+\cdots+\mathrm{F}_pv_q$ 是一个域 F_p 上的 q - 维向量空间. 设 ω 为 F_p 上的一个 q 次本原单位根. 令

$$\alpha=\begin{pmatrix}\omega&&&\\&\omega&&\\&&\ddots&\\&&&\omega\end{pmatrix}_{q\times q}\quad \beta=\begin{pmatrix}1&&&\\&\omega&&\\&&\ddots&\\&&&\omega^{q-1}\end{pmatrix}_{q\times q}\quad \gamma=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\ddots&1\\1&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}_{q\times q}$$

且令 $Q=\langle\alpha,\beta,\gamma\rangle$, 这里 Q 是由元素 α,β,γ 在矩阵的乘法运算下所生成的一个群, 于是 $Q\simeq E_q(1,1,1)$. 令 $G=P\rtimes Q$, $M=P\rtimes\langle\alpha,\beta\rangle$ 且 $N=P\rtimes\langle\alpha,\gamma\rangle$, 那么 M 和 N 是 G 的两个正规的超可解子群且 $G=MN$, 但 G 不是超可解的. 将群 G 记为 $E(p,q,1)$.

群 2 设 p,q 是两个素数, 其中 $q^n\mid p-1$ 且 $n\geq 2$. $P=\mathrm{F}_pv_1+\mathrm{F}_pv_2+\cdots+\mathrm{F}_pv_q$ 是一个域 F_p 上的 q - 维向量空间. 设 ω,θ 分别为 F_p 上的一个 q, q^n 次本原单位根. 令

$$\beta=\begin{pmatrix}\theta&&&\\&\theta\omega^1&&\\&&\ddots&\\&&&\theta\omega^{q-1}\end{pmatrix}_{q\times q},\quad \gamma=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\ddots&1\\1&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}_{q\times q}$$

且令 $Q=\langle\beta,\gamma\rangle$, 于是 $Q\simeq M_q(n,1)$. 令 $G=P\rtimes Q$, $M=P\rtimes\langle\beta\rangle$ 和 $N=P\rtimes\langle\beta^q,\gamma\rangle$, 那么 M 和 N 是 G 的两个正规的超可解子群且 $G=MN$, 但 G 不是超可解的. 将群 G 记为 $M(p,q,n,\theta,\omega)$, 根据文 [1] 中的命题 5.2.5, 群 $M(p,q,n,\theta,\omega)$ 可以简记为 $M(p,q,n)$.

设 $G=FH$, 如果 H 正则地作用在 F 上. 称 G 是一个以 F 为核以 H 为补的 Frobenius 群.

群 3 设 p 是一个素数且 $4\mid p-1$. $P=\mathrm{F}_pv_1+\mathrm{F}_pv_2$ 是域 F_p 上的一个 2 - 维向量空间. 设 θ 是 F_p 上的一个 4 次本原单位根. 令

$$\beta=\begin{pmatrix}\theta&0\\0&-\theta\end{pmatrix},\quad \gamma=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

且 $Q=\langle\beta,\gamma\rangle$, 那么 $Q\simeq Q_8$. 令 $G=P\rtimes Q$, $M=P\rtimes\langle\beta\rangle$ 且 $N=P\rtimes\langle\gamma\rangle$, 那么 M 和 N 均是 G 的正规超可解子群且 $G=MN$, 但 G 是一个非超可解的以 P 为核, 以 Q 为补的 Frobenius 群, 将 G 记为 $Q(p,2)$.

群 4 设 p 是一个素数且 $4\nmid p-1$. $P=\mathrm{F}_pv_1+\mathrm{F}_pv_2$ 是域 F_p 上的一个 2 - 维向量空间. 令

$$\alpha=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad \gamma=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

且 $Q=\langle\alpha,\beta,\gamma\rangle$, 那么 $Q\simeq D_4$. 令 $G=P\rtimes Q$, $M=P\rtimes\langle\alpha,\beta\rangle$ 且 $N=P\rtimes\langle\alpha,\gamma\rangle$, 那么 M 和 N 均是 G 的正规超可解子群且 $G=MN$. 但 G 是一个非超可解群, 将 G 记为 $D(p,2)$.

引理 2.1 (见文献 [1, 定理 5.2.6]) 如果群 G 是一个 $\mathfrak{P}$ - 群, 那么 $|\pi(G)|=2$ 且存在素数 p,q 使得 G 与 $E(p,q,1)$, $M(p,q,n)$, $Q(p,2)$ 和 $D(p,2)$ 中的一个同构.

引理 2.2 (见文献 [15, 定理 1.8.17]) 假定 M 是群 G 的一个正规幂零子群, 如果 $M\cap\Phi(G)=1$, 则 M 是 G 的一些极小正规子群的直积.

引理 2.3 (见文献 [16, 定理 2.1.6]) 假定 G 是一个 p - 超可解群且 $O_{p'}(G)=1$, 那么 p 是 $\pi(G)$ 中的最大素数, G 是超可解的且 G 有正规的 Sylow p - 子群.

下述引理是显然的.

引理 2.4 假定 N 是群 G 的一个正规 p - 子群. 如果 $N\leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$, 那么 $G/C_G(N)\in\mathfrak{G}_p\mathfrak{A}(p-1)$.

引理 2.5 (见文献 [17, 第 1 章, 定理 1.4]) 设 N 是群 G 的一个极小正规 p - 子群. 如果 $G/C_G(N)\in\mathfrak{A}(p-1)$, 那么 $|N|=p$.

引理 2.6 (见文献 [15, 引理 1.7.11]) 假设 H/K 是群 G 的一个 pd - 主因子, 则 $O_p(G/C_G(H/K))=1$.

3 主要结果

定理 3.1 假定 G 是一个 $\mathfrak{P}_p$ - 群, 则存在素数 $q|p-1$ 使得 $\pi(G)=\{p,q\}$ 且 G 与 $E(p,q,1)$, $M(p,q,n)$, $Q(p,2)$ 和 $D(p,2)$ 中的某个群同构.

证 因为 G 是一个 $\mathfrak{P}_p$ - 群, 所以 G 是非 p - 超可解的 $(\mathfrak{P}_1)_p$ - 群且 G 的任意 $(\mathfrak{P}_1)_p$ - 真子群和任意非平凡商群均是 p - 超可解的. 不妨假设 $G=MN$, 其中 M,N 是 G 的两个正规的 p - 超可解子群. 通过以下步骤实现定理的证明.

(1) $O_{p'}(G)=\Phi(G)=1$ 且 G 是 p - 闭的可解群.

如果上面断言之一不成立, 那么 $N\neq 1$, 其中 $N=O_{p'}(G)$ 或 $N=\Phi(G)$. 易见, G/N 满足定理的假设. 对 $|G|$ 进行归纳知 G/N 是 p - 超可解的. 因此 G 是 p - 超可解的, 矛盾. 所以 $O_{p'}(G)=\Phi(G)=1$. 因为 M,N 是 p - 超可解的, 所以由引理 2.3 知 p 是 $\pi(M)$ 和 $\pi(N)$ 的最大素数, 且 M 和 N 均是超可解的. 又 $G=MN$, 因此 p 是 $\pi(G)$ 中的最大素数且 G 是 p - 闭的可解群.

(2) G 有唯一的极小正规子群 K 满足 G/K 是 p - 超可解的且 $K=F(G)=O_p(G)$.

设 K 是 G 的一个极小正规子群. 由定理假设知 G/K 是 p - 超可解的, 因为所有 p - 超可解群组成的群类是一个饱和群系, 所以 K 是 G 的一个唯一极小正规子群. 由 (1) 和引理 2.2 知 $1\neq F(G)=K_1\times K_2\times\cdots\times K_s$, 其中 K_i $(i=1,\cdots,s)$ 是 G 的一些极小正规子群. 显然, 由 K 的唯一性有 $K=F(G)$, 从而得 $K=F(G)=O_p(G)$.

(3) $M/K\in\mathfrak{A}(p-1)$, $N/K\in\mathfrak{A}(p-1)$ 且 G/K 是一个非交换 q - 群, 其中 $q|p-1$.

由 (2) 知 $F(M)=K$. 因为 M 是超可解的, 所以 $M/K=M/F(M)$ 是交换的. 由 (1) 知 $\Phi(M)=1$, 所以由引理 2.2, $K=A_1\times\cdots\times A_r$, 其中 A_i $(i=1,\cdots,r)$ 是 M 的极小正规子群. 因 M 是超可解的, 所以对任意的 i 均有 $M/C_M(A_i)\in\mathfrak{A}(p-1)$. 于是 $M/(C_M(A_1)\cap\cdots\cap C_M(A_r))\in\mathfrak{A}(p-1)$. 注意到

$$C_M(A_1)\cap\cdots\cap C_M(A_r)=C_M(K)=C_M(F(M))\leq F(M)=K.$$

所以 $M/K\in\mathfrak{A}(p-1)$. 同理可得 $N/K\in\mathfrak{A}(p-1)$.

假设 $|\pi(G/K)|\neq 1$, 令 $q\in\pi(G/K)$ 且 Q_1/K 和 Q_2/K 分别是 M/K 和 N/K 的 Sylow q - 子群. 由于 $M/K\in\mathfrak{A}(p-1)$, $N/K\in\mathfrak{A}(p-1)$, 所以 Q_1,Q_2 是 G 的正规超可解子群且 $(Q_1Q_2)/K$ 是 G/K 的一个正规的 Sylow q - 子群. 因此 Q_1Q_2 是 G 的一个 $(\mathfrak{P}_1)_p$ - 真子群, 由 G 的假设知 Q_1Q_2 是超可解的. 又因为 $K=F(G)=F(Q_1Q_2)$, 于是 $(Q_1Q_2)/K$ 是交换的. 因此 G/K 的任意 Sylow 子群在 G/K 中均是正规且交换的, 于是 G/K 是交换群. 又因 $M/K\in\mathfrak{A}(p-1)$, $N/K\in\mathfrak{A}(p-1)$, 所以 $G/K\in\mathfrak{A}(p-1)$. 由引理 2.5 知 K 是循环的, 那么 G 是超可解的, 矛盾. 所以 $|\pi(G/K)|=1$ 且存在一个素数 $q<p$ 使得 G/K 是一个 q - 群. 显然, G/K 是非交换的且 $q|p-1$. 因此 (3) 成立.

(4) G 是一个 $\mathfrak{P}$ - 群.

显然, G 是一个非超可解的 $\mathfrak{P}_1$ - 群. 由 (2) 和 (3), G 的任意非平凡商群是超可解的.

另一方面, 设 A 是 G 的一个 $\mathfrak{P}_1$ - 真子群. 易见, A 是 G 的一个 $(\mathfrak{P}_1)_p$ - 真子群. 由 G 的假设知 A 是 p - 超可解的. 由于 G 是 p - 闭的, 所以 A 也是 p - 闭的. 又因为 $\pi(G)=\{p,q\}$, 所以 A 是超可解的. 故 G 是一个 $\mathfrak{P}$ - 群.

(5) 得出最后结论.

由 (3), (4) 和引理 2.1 知 G 同构于 $E(p,q,1)$, $M(p,q,n)$, $Q(p,2)$ 和 $D(p,2)$ 中的某个群. 容易验证 $E(p,q,1)$, $M(p,q,n)$, $Q(p,2)$ 和 $D(p,2)$ 都是 $\mathfrak{P}_p$ - 群. 定理得证.

定义 3.2 设 A 是一个群, 如果 G 存在子群 H,K 使得 $H\trianglelefteq K$ 且 $K/H\cong A$, 则称 G 有一个 A - 截断.

推论 3.3 假设 $G=MN$, 其中 M,N 是 G 的正规 p - 超可解子群. 那么 G 是 p - 超可解的当且仅当 G 没有 A 截断, 这里 A 与 $E(p,q,1)$, $M(p,q,n)$, $Q(p,2)$ 和 $D(p,2)$ 中的某个群同构.

命题 3.4 假设 $G=MN$, 这里 M,N 是 G 的正规 p - 超可解子群. 如果 $\pi(p-1)\cap\pi(M)\cap\pi(N)=\varnothing$, 那么 G 是 p - 超可解的.

证 因为 $G/(M\cap N)=M/(M\cap N)\times N/(M\cap N)$, 所以只需证明包含于 $M\cap N$ 的 G 的 pd - 主因子均是循环的即可. 令 H/K 是 G 的一个包含在 $M\cap N$ 中的 pd - 主因子. 由引理 2.6 知 $O_p(G/C_G(H/K))=1$. 又因 M/K 是 p - 超可解的, 所以 $H/K\leq Z_{\mathfrak{U}}(M/K)$. 由引理 2.4, $M/C_M(H/K)\in\mathfrak{G}_p\mathfrak{A}(p-1)$. 注意到

$$MC_G(H/K)/C_G(H/K)\cong M/C_M(H/K)\in\mathfrak{G}_p\mathfrak{A}(p-1)$$

且

$$O_p(MC_G(H/K)/C_G(H/K))\trianglelefteq G/C_G(H/K).$$

所以
$$O_p(MC_G(H/K)/C_G(H/K))=1.$$
从而
$$MC_G(H/K)/C_G(H/K)\cong M/C_M(H/K)\in\mathfrak{A}(p-1).$$
同理可得
$$NC_G(H/K)/C_G(H/K)\cong N/C_N(H/K)\in\mathfrak{A}(p-1).$$
由于 $\pi(p-1)\cap\pi(M)\cap\pi(N)=\varnothing$, 所以
$$\pi(p-1)\cap\pi(MC_G(H/K)/C_G(H/K))\cap\pi(NC_G(H/K)/C_G(H/K))=\varnothing.$$
因此 $[MC_G(H/K)/C_G(H/K),NC_G(H/K)/C_G(H/K)]=1$, 从而有 $G/C_G(H/K)\in\mathfrak{A}(p-1)$. 由引理 2.5 知 H/K 是循环的. 所以 G 是 p - 超可解的.

定义 3.5 设 p 是一个素数, H 是一个初等交换 p - 群. 如果 $|H|=p^n$, 那么记 $r(H)=n$, 并且称 H 的秩为 n.

定理 3.6 假设 $G=MN$, 其中 M,N 是 G 的正规 p - 超可解子群. 设 q 是 $\pi(p-1)\cap\pi(M)\cap\pi(N)$ 的最小素数. 如果 G 的任何包含于 $M\cap N$ 的 pd - 主因子 H/K 都满足 $r(H/K)<q$, 那么 G 是 p - 超可解的.

证 由命题 3.4, 不妨假设 $\pi(p-1)\cap\pi(M)\cap\pi(N)\neq\varnothing$. 假设定理不成立, 并设 G 是使得 $|G|$ 最小的反例. 按照以下步骤得出矛盾:

(1) $\Phi(G)\cap M=\Phi(G)\cap N=1$.

假设上面的断言之一不成立, 即 $\Phi(G)\cap M\neq1$ 或 $\Phi(G)\cap N\neq1$. 不妨假设 $\Phi(G)\cap M\neq1$, 令 $A=\Phi(G)\cap M$. 由于 $M/A\cap NA/A=(M\cap N)A/A$, 所以 $(G/A,M/A,NA/A)$ 满足定理的假设. 由 G 的选取知 G/A 是 p - 超可解的. 因此 G 是 p - 超可解的, 矛盾.

(2) $O_{p'}(M)=O_{p'}(N)=1$ 且 G 是 p - 闭的可解群.

假定 $O_{p'}(M)\neq1$ 或者 $O_{p'}(N)\neq1$, 这两种情况是类似的, 所以不妨设 $B=O_{p'}(M)\neq1$. 通过与 (1) 相似的讨论, 知 G/B 是 p - 超可解的, 由此得 G 是 p - 超可解的, 矛盾. 所以 $O_{p'}(M)=O_{p'}(N)=1$. 由引理 2.5 知 p 是 $\pi(M)$ 和 $\pi(N)$ 的最大素数因子且 M,N 都是 p - 闭的超可解子群. 因 $G=MN$, 所以 p 是 $\pi(G)$ 的最大素因子且 G 是 p - 闭的可解群.

(3) K 是包含于 $M\cap N$ 的 G 的唯一极小正规子群且 $K=O_p(G)=F(M)=F(N)$.

设 K 是 G 的包含于 M 的极小正规子群. 显然, $(G/K,M/K,NK/K)$ 满足定理假设, 那么由 G 的选取知 G/K 是 p - 超可解的. 因此 K 是 G 的包含于 M 的唯一极小正规子群. 由 (1) 和引理 2.2 知 $F(M)=K_1\times K_2\times\cdots\times K_n$, 其中 K_i $(i=1,\cdots,n)$ 是 G 的极小正规子群. 由 K 的唯一性知 $F(M)=K$. 令 H 是 G 的包含于 N 的极小正规子群. 同理可得 G/H 是 p - 超可解的, H 是 G 的包含于 N 的唯一的极小正规子群且 $F(N)=H$. 显然, $K=H$. 又因为
$$1\neq O_p(G)=O_p(M)O_p(N)\leq F(M)F(N)=K,$$
所以 (3) 成立.

(4) 设 A,B 是 G 的两个正规子群且 $A\leq M,B\leq N$, 那么 (AB,A,B) 满足定理假设.

如果 $\pi(A)\cap\pi(B)=\varnothing$, 由于 AB 是超可解的, 所以 (AB,A,B) 仍满足假设条件. 因此假设 $\pi(A)\cap\pi(B)\neq\varnothing$, 令 q' 是 $\pi(A)\cap\pi(B)$ 中的最小的素数. 显然, $q'\geq q$. 如果断言不成立,

那么存在 AB 的一个包含于 $A\cap B$ 的主因子 H/K 使得 $r(H/K)\geq q'$. 显然, $A\cap B$ 是 G 的包含于 $M\cap N$ 的正规子群, 所以由 Jordan-Hölder 定理可知 $M\cap N$ 含有一个 G 的主因子 H'/K' 使得 $r(H'/K')\geq r(H/K)\geq q'\geq q$, 而这与定理假设矛盾, 所以 (4) 成立.

(5) $M/K\in\mathfrak{A}(p-1)$, $N/K\in\mathfrak{A}(p-1)$ 且 G/K 是一个非交换 q - 群, 其中 $q\mid p-1$.

由 (1), $\Phi(M)=\Phi(N)=1$. 类似于定理 3.1 的步骤 (3) 的证明, 有

$$M/K\in\mathfrak{A}(p-1),\ \ N/K\in\mathfrak{A}(p-1).$$

假定 $|\pi(G/K)|\geq 2$. 设 $r\in\pi(G/K)$ 且 R_1/K, R_2/K 分别是 M/K, N/K 的 Sylow r - 子群. 因为 $M/K, N/K$ 都是交换群且 M, N 都是超可解群, 所以 $R_1\leq M, R_2\leq N$ 是 G 的两个超可解正规子群. 记 $R=R_1R_2$. 易见, $G\neq R$ 且 R/K 是 G/K 的正规的 Sylow r - 子群. 所以由 (4) 知 R 是 p - 超可解的. 由引理 2.4 知 $R/C_R(K)\in\mathfrak{G}_p\mathfrak{A}(p-1)$. 因为

$$RC_G(K)/C_G(K)\simeq R/C_R(K)\in\mathfrak{G}_p\mathfrak{A}(p-1)$$

且 $O_p(G/C_G(K))=1$, 所以

$$RC_G(K)/C_G(K)\in\mathfrak{A}(p-1).$$

又因为 $K\leq C_G(K)$, 所以 $RC_G(K)/C_G(K)$ 是 $G/C_G(K)$ 的正规交换的 Sylow r - 子群, 这就推出 $G/C_G(K)$ 是一个交换群. 因此 $G/C_G(K)\in\mathfrak{A}(p-1)$. 由引理 2.5 知 K 是循环的. 因为 K 是 G 的正规 Sylow p - 子群, 所以 G 是 p - 超可解的, 矛盾. 因此 $|\pi(G/K)|=1$, 即存在一个素数 $r<p$ 使得 G/K 是一个 r - 群. 显然, G/K 是非交换的且 $r\mid p-1$.

如果 $r=q$, 那么 (5) 成立. 假定 $r\neq q$. 因为 $\pi(G)=\{p,r\}$, 所以 $p=q$ 且 $p>r$. 因此 $r\notin\pi(M)\cap\pi(N)$. 又因为 $G=MN$, 所以 M 和 N 中有一个包含 G 的某个 Sylow r - 子群. 不妨假设 M 包含 G 的某个 Sylow r - 子群. 由 (3) 知 K 是 G 的包含于 $M\cap N$ 的正规 Sylow p - 子群, 所以 $G=M$, 因此 G 是 p - 超可解的, 矛盾. 故 (5) 成立.

(6) 得出最终矛盾.

由 (5), $\pi(G)=\{p,q\}$ 且 $q\mid p-1$. 因为 K 是 G 的一个包含于 $M\cap N$ 的极小正规子群, 所以由定理假设知 $r(K)<q$, 即 $|K|<p^q$. 由 (5) 和推论 3.3 知 G 中存在一个截断 H/J 使得 H/J 同构于 $E(p,q,1)$, $M(p,q,n)$, $Q(p,2)$ 和 $D(p,2)$ 中的某个群. 如果 H/J 同构于 $Q(p,2)$ 或 $D(p,2)$, 那么 $q=2$. 注意到 H/J 的 Sylow p - 子群的阶为 p^q. 因为 K 是 G 的一个 Sylow p - 子群, 所以 $|K|\geq p^q$, 矛盾. 定理得证.

定理 3.7 假设 $G=MN$, 其中 M,N 是 G 的正规 p - 超可解子群. 设 q 是 $\pi(p-1)\cap\pi(M)\cap\pi(N)$ 的最小素数且 P 是 $M\cap N$ 的一个 Sylow p - 子群. 如果 $r(P/\Phi(P))<q$, 那么 G 是 p - 超可解的.

证 不妨假设 $\pi(p-1)\cap\pi(M)\cap\pi(N)\neq\varnothing$. 令 q' 是

$$\pi(p-1)\cap\pi(M/O_{p'}(M))\cap\pi(NO_{p'}(M)/O_{p'}(M))$$

的最小素数, 显然 $q'\geq q$. 因为

$$M/O_{p'}(M)\cap NO_{p'}(M)/O_{p'}(M)=(M\cap N)O_{p'}(M)/O_{p'}(M),$$

所以 $PO_{p'}(M)/O_{p'}(M)$ 为 $M/O_{p'}(M) \cap NO_{p'}(M)/O_{p'}(M)$ 的一个 Sylow p - 子群且

$$r(PO_{p'}(M)/O_{p'}(M)/\Phi(PO_{p'}(M)/O_{p'}(M))) = r(P/\Phi(P)) < q \leq q'.$$

于是 $(G/O_{p'}(M), M/O_{p'}(M), NO_{p'}(M)/O_{p'}(M))$ 满足定理的假设. 对 $|G|$ 进行归纳知 $G/O_{p'}(M)$ 是 p - 超可解的, 因此 G 是 p - 超可解的. 所以不失一般性, 可以假设 $O_{p'}(M) = 1$ 或 $O_{p'}(N) = 1$. 由引理 2.3 知 M, N 均是 p - 闭的. 因此 $P \trianglelefteq G$, 于是 $\Phi(P) \trianglelefteq G$. 由于 $r(P/\Phi(P)) < q$, 所以 $(G/\Phi(P), M/\Phi(P), N/\Phi(P))$ 满足定理 3.6 的假设. 注意: 如果

$$\pi(p-1) \cap \pi(M/\Phi(P)) \cap \pi(N/\Phi(P)) = \varnothing,$$

仍然认为 $(G/\Phi(P), M/\Phi(P), N/\Phi(P))$ 满足定理 3.6 的假设. 所以对 $|G|$ 进行归纳有 $G/\Phi(P)$ 是 p - 超可解的, 从而知 G 是 p - 超可解的.

推论 3.8 假设 $G = MN$, 其中 M, N 是 G 的正规超可解子群. 若对任意的 $p \in \pi(M \cap N)$, 令 q 是 $\pi(p-1) \cap \pi(M) \cap \pi(N)$ 的最小素数, 如果对于 G 的任意包含于 $M \cap N$ 的 pd - 主因子 H/K 均有 $r(H/K) < q$, 那么 G 是超可解的.

推论 3.9 假设 $G = MN$, 其中 M, N 是 G 的正规超可解子群. 若对任意的 $p \in \pi(M \cap N)$, 令 q 是 $\pi(p-1) \cap \pi(M) \cap \pi(N)$ 的最小素数, 如果 P 是 $M \cap N$ 的一个 Sylow p - 子群且满足 $r(P/\Phi(P)) < q$, 那么 G 是超可解的.

参 考 文 献

[1] 汤兴政. 有限群的超可解性和关于正规超可解群的积的一些问题 [D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2016.

[2] Guo Wenbin. Structure theory for Canonical classes of finite groups[M]. Berlin: Springer, 2015.

[3] Arroyo-Jordá M, Arroyo-Jordá P, Martínez-Pastor A, Pérez-Ramos M D. On finite products of groups and supersolubility[J]. J. Alg., 2010, 323: 2922–2934.

[4] Asaad M, Shaalan A. On the supersolvability of finite groups[J]. Arch. Math., 1989, 53(4): 318–326.

[5] Baer R. Classes of finite groups and their properties[J]. Illinois J. Math., 1957, 1: 115–187.

[6] Ballester-Bolinches A, Pérez-Ramos M D, Pedraza-Aguilera M C. Mutually permutable products of finite groups[J]. J. Alg., 1999, 213(1): 369–377.

[7] Friesen D R. Products of normal supersolvable subgroups[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1971, 30(1): 46-48.

[8] Guo Webin, Kondrat'ev A S. Finite minimal non-supersolvable groups decomposable into the product of two normal supersolvable subgroups[J]. Commun. Math. Stat. 2015, 3(2): 285–290.

[9] Guo Webin, Shum K P, Skiba A N. X-quasinormal subgroups[J]. Sib. Math. J., 2007, 48(4): 593–605.

[10] Guo Wenbin, Skiba A N. On quasisupersoluble and p-quasisupersoluble finite groups[J]. Alg. Coll., 2010, 17(4): 549–556.

[11] Guo Wenbin, Kondrat'ev A S. New examples of finite non-supersolvable groups factored by two normal supersoluble subgroups[J]. International Conference "Mal'tsev meeting" Collection of Abstracts, p.92. Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk: Novosibirsk State University, 2012, 12–16.

[12] Guo Wenbin, Skiba A N. On the intersection of the $\mathfrak{F}$-maximal subgroups and the generalized $\mathfrak{F}$-hypercentre of a finite group[J]. J. Alg., 2012, 366: 112–125.

[13] Huppert B. Monomiale darstellung endlicher gruppen [J]. Nagoya J. Math., 1953, 6: 93–94.

[14] 查明明, 郭文彬, 李保军. 关于有限群的 p - 超可解性 [J]. 数学杂志, 2007, 27(5): 562–568.

[15] Guo Wenbin. The theory of classes of groups [M]. Beijing, New York: Science Press; Kluwer, Academic Publishers, 2000.

[16] Ballester-Bolinches A, Esteban-Romero R, Asaad M. Products of finite groups[M]. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2010.

[17] Weinstein M. Between nilpotent and solvable [M]. Passaic, New York, Jersey: Polygonal Publishing House, 1982.

THE PRODUCT OF TWO NORMAL P-SUPERSOLUBLE SUBGROUPS

MAO Yue-mei[1,2], MA Xiao-jian[1], TANG Xing-zheng[2]

(*1. Institute of Quantum Information Science, Shanxi Datong University, Datong 037009, China*)

(*2. School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*)

Abstract: In this paper, we study the stucture of minimal non-p-supersoluble groups which are the product of two normal p-supersoluble subgroups. By using basic methods of finite group theory, some sufficient conditions under which the product of two normal p-supersoluble subgroups is still p-supersoluble are obtained. Meanwhile, some results in [1] about supersoluble groups can be generalized.

Keywords: finite groups; supersoluble groups; p-supersoluble groups; Sylow subgroups

2010 MR Subject Classification: 20D10; 20D15; 20D20