Vol. 37 (2017)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

对偶锥映像上的问题

张创亮
(广东工业大学应用数学学院, 广东 广州 510520)

摘 要: 本文研究了对偶锥映像上的一些非线性问题. 利用拓扑度理论和半序的方法, 获得了对偶锥映像的锐角原理, Debrunner-Flor 不等式和不动点定理的结果. 推广了一般单调映像的锐角原理和 Debrunner-Flor 不等式的一些结果.

关键词: 对偶锥映像; 锐角原理; Debrunner-Flor 不等式; 不动点
MR(2010) **主题分类号:** 47H05; 47H07 **中图分类号:** O177.91
文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2017)06-1245-08

1 引言

近年来, 非线性泛函分析在各个方面得到广泛的应用, 尤其在处理非线性积分方程方面所用的方法起到了不可忽视作用, 在国内外也有不少学者研究这个课题. 在郭大均 [1] 一书中介绍对偶映像的单调性、半连续性、次连续性等; Deimling[2] 也介绍一些很好的结果. 本文主要针对这些性质的一些问题在对偶锥映像上进行研究, 在对偶映像上成立的问题, 在对偶锥映像上不一定成立, 当然我们更希望可以把对偶映像的大部分性质搬到对偶锥映像上来.

本文总假设 E 是实 Banach 空间, E^* 表示其对偶空间, 本文中的 $\rightharpoonup$ 表示弱收敛, $\rightharpoondown$ 表示弱 * 收敛.

定义 1.1 [1] 如果 $P \subset E$ 是非空凸闭集, 并且满足下面两个条件

(1) $x \in P, \lambda \geq 0$, 则 $\lambda x \in P$;

(2) $P \bigcap (-P) = \{0\}$.

则称 P 是 E 的一个锥.

用 P^0 表示 P 的内点集, 如果 P^0 非空, 则称 P 是 E 的一个体锥. 如果任意的 $x \in E$ 都可以表示成 $x = y - z$ 的形式, 其中 $y \in P, z \in P$, 则称锥 P 是再生的. 易知 P 是 E 的一个体锥, 则 P 是再生的. 给定 E 的一个锥 P 后, 则可在 E 中的元素引入半序: $x \leq y$, 其中 $x, y \in E$, 如果 $y - x \in P$.

例 1 设 $E = L^p(\Omega), p \geq 1, 0 < \mathrm{mes}(\Omega) < +\infty$. 令 $P = \{\varphi : \varphi \in L^p(\Omega), \varphi(x) \geq 0\}$, 显然 P 是 $L^p(\Omega)$ 的一个锥, 但不是体锥.

定义 1.2 [2] 设 E 是实 Banach 空间, $P \subset E$, 则 $P^* = \{x^* \in E^* : x^*(x) \geq 0, \forall x \in P\}$, 则称 P^* 为 P 的对偶锥.

令 $A : P \to P^*$, 称 A 是对偶锥映像. 很显然, 对偶锥映像只是对偶映像 $T : E \to E^*$ 的一种特殊情况. 不难知道对偶锥可能不是对偶空间上的一个锥. 易知 P 是再生锥, 可得 P^* 是一个锥. 事实上, 只需验证 $P^* \bigcap (-P^*) = \{0^*\}$ 即可, 其中 0^* 表示零元素.

*收稿日期: 2016-09-27 接收日期: 2017-04-19
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11601093).
作者简介: 张创亮 (1992–), 男, 广东梅州, 硕士, 主要研究方向: 非线性泛函分析.

例 2 设 $E=R^2, P=\{(x,y):x\geq 0, y=0\}$, 则 $P^*=\{(u,v):u\geq 0, v\in R\}$ 不是 $E^*=R^2$ 的一个锥, 但它是 P 的对偶锥.

定义 1.3 [1] 设 E 是实 Banach 空间, $P\subset E$ 是一个锥, P^* 为 P 的对偶锥, 若映像 $A:P\to P^*$,

(1) 设 $x_0\in P$,A 在 x_0 处次连续, 是指若 $x_n\in P, x_n\to x_0$, 则 $Ax_n\rightharpoonup Ax_0$. 若 A 在 P 中每一点都次连续, 则称 A 在锥 P 上次连续.

(2) 设 $x_0\in P$,A 在 x_0 处半连续, 是指若 $h\in E, x_n\in P, t_n>0, x_0+t_nh\in P, t_n\to 0^+$, 则 $Ax_n\rightharpoonup Ax_0$. 若 A 在 P 中每一点都半连续, 则称 A 在锥 P 上半连续.

显然, A 在 x_0 处次连续 $\Rightarrow$ A 在 x_0 处半连续. 反之不成立.

定义 1.4 [1] (1) 设 E 是实 Banach 空间, $P\subset E$ 是一个锥, P^* 为 P 的对偶锥, 若映像 $A:P\to P^*$, 若 A 称为在 P 上单调, 是指 $(Ax-Ay, x-y)\geq 0, \forall x,y\in P$.

(2) 若 A 称为在 P 上极大单调, 是指 $(Ax-f, x-y)\geq 0, \forall x\in P \Rightarrow y\in P, f(y)\in P^*$.

多值映像 $A:P\to 2^{P^*}$ 叫做单调的, 如果它的图像 $G(A)=\{[x,y]:x\in P, y=Ax\}$ 是 $P\times P^*$ 中的单调集. $A:P\to 2^{P^*}$ 叫做极大单调的, 如果它的图像 $G(A)$ 是 $P\times P^*$ 中的极大单调集.

定义 1.5 [3] 设 E 是实 Banach 空间, P 是一个锥, 对 $x,y\in P\backslash\{0\}$, 令

$$M(\frac{x}{y})=\inf\{\alpha:x\leq\alpha y\}, m(\frac{x}{y})=\sup\{\beta:\beta x\leq y\}, \tag{1.1}$$

其中 $\inf(\emptyset)=+\infty, \sup(\emptyset)=-\infty$. 易知对上述非空集合有关系式 $0\leq m(\frac{x}{y})\leq M(\frac{x}{y})$.

现在给 Hibert 投影距离的定义

$$\rho(x,y)=\ln\{\frac{M(\frac{x}{y})}{m(\frac{x}{y})}\}. \tag{1.2}$$

定义 1.6 设 E 是实 Banach 空间, $P\subset E$ 是一个体锥, P^* 是一个锥, 若映像 $A:P^0\to P^*\backslash\{0^*\}, \forall x_n, x_0\in P^0, n=1,2,\cdots, \rho(x_n,x_0)\to 0$, 则 $\rho(Ax_n, Ax_0)\to 0$, 称 A 在 x_0 处 Hilbert 投影距离连续.

定理 1.1 [1] 设 E 是自反实 Banach 空间, 映像 $T:E\to E^*$ 半连续、单调. 又设对于某个 $r>0$, 有

$$(Tx,x)\geq 0, \forall x\in\partial(\Omega_r), \tag{1.3}$$

其中 $\Omega_r=\{x:x\in E, \|x\|<r\}$, 那么方程 $Tx=0^*$ 在 $\overline{\Omega_r}$ 中必有解.

定理 1.2 [1] 设 E 是实 Banach 空间, K 是 E 中紧凸集, $G\subset K\times E^*$ 且 G 是单调集. 又设 $T:K\to E^*$ 是连续映像, $h\in E^*$. 于是, 必有 $u\in K$ 存在, 使得

$$(f+Tu-h, x-u)\geq 0, \forall [x,f]\in G \tag{1.4}$$

2 主要结果

引理 2.1 设 E 是自反实 Banach 空间, $P\subset E$ 是一个体锥, P^* 为 P 的对偶锥, 若映像 $A:P\to P^*$ 单调的, 那么 A 在 $x_0\in P^0$ 半连续且局部有界 $\Rightarrow$ A 在 x_0 处次连续.

参考文献 [1, 2] 共轭映像上类似的证明方法就可得到引理 2.1.

引理 2.2 [4] 设 E 是赋范线性空间, X 是 E 的凸子集, 若 X 是闭的当且仅当它是弱闭的.

下面定理是对定理 1.1 推广到对偶锥映射上.

定理 2.1 设 E 是自反实 Banach 空间, P^* 为 P 的对偶锥, 若映像 $A: P \to P^*$ 次连续、单调. 设任意 $r > 0$, 使得 $\Omega_r = \{x \in E : \|x\| < r\} \bigcap P \neq \emptyset$, 则 $Ax = 0^*$ 在 $\overline{\Omega_r}$ 有解.

证 由引理 2.2 可知 $\overline{\Omega_r}$ 有界弱闭集, 对任意的 $x \in P$, 令

$$F_x = \{y : y \in \overline{\Omega_r}, (Ax, x - y) \geq 0\},$$

很显然 F_x 是弱闭集, $F_x \subset \overline{\Omega_r}$, 任取 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m \in P$, 则 $\bigcap\limits_{i=1}^{m} F_{x_i} \neq \emptyset$. 事实上, 不妨令

$$E_0 = \overline{\operatorname{conv}\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}}, \quad F_0 = \overline{\operatorname{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}}.$$

易知 E_0 是至多 m 维向量闭子空间 F_0 的闭凸子集, 定义映像 $T: E_0 \to F_0$, 其中

$$Tx = (Ax, x_1)x_1 + (Ax, x_2)x_2 + \cdots + (Ax, x_m)x_m, \forall x \in E_0. \tag{2.1}$$

由于假设可知 A 是 E_0 上次连续, 从而可得 $T: E_0 \to F_0$ 是连续的, 令

$$\Omega_{r,0} = E_0 \bigcap \Omega_r = \{x \in E_0 : \|x\| < r\}.$$

现在先证明 $Tx = 0$ 在 $\overline{\Omega_{r,0}}$ 中必有解, 若 $0 \notin Tx, \forall x \in \overline{\Omega_{r,0}}$, 则由 Brouwer 度 $\deg(T, \Omega_{r,0}, 0) = 0$, 但 $\deg(I, \Omega_{r,0}, 0) = 1$, 其中 I 为恒等映射. 因此 A 与 I 在 $\Omega_{r,0}$ 不同伦, 从而存在 $x_0 \in \partial\Omega_{r,0}, 0 < t_0 < 1$, 使得 $t_0 Tx_0 + (1 - t_0)x_0 = 0$, 即 $Tx_0 = -s_0 x_0, s_0 = \frac{1-t_0}{t_0} > 0$, 则有

$$(Ax_0, x_1)x_1 + (Ax_0, x_2)x_2 + \cdots + (Ax_0, x_m)x_m = -s_0 x_0, \tag{2.2}$$

在式子 (2.2) 两端左边同时作用 Ax_0 得到

$$(Ax_0, x_1)^2 + (Ax_0, x_2)^2 + \cdots + (Ax_0, x_m)^2 = -s_0(Ax_0, x_0), \tag{2.3}$$

由于 $(Ax_0, x_0) \geq 0$, 因为 $x_0 \in \partial\Omega_{r,0} \subset P$, 故 $(Ax_0, x_i) = 0, i = 1, 2, \cdots, m$, 由 (2.2) 式可以知道 $x_0 = 0$, 这与 $x_0 \in \partial\Omega_{r,0}$ 矛盾. 这就得出了 $Tx = 0$ 在 $\overline{\Omega_{r,0}}$ 中有解 $\bar{x}$, 即

$$(A\bar{x}, x_1)x_1 + (A\bar{x}, x_2)x_2 + \cdots + (A\bar{x}, x_m)x_m = 0, \tag{2.4}$$

由于对偶锥的性质和 $x_i \geq 0$, 从而可以得到 $(A\bar{x}, x_i) = 0, i = 1, 2, \cdots, m$, 现任取 $x \in E_0$, 那么有 $x = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j x_j$, 其中 $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j = 1, \alpha \geq 0, j = 1, 2, \cdots, m$, 则 $(A\bar{x}, x) = 0$, 又 $\bar{x} \in E_0$, 从而 $(A\bar{x}, \bar{x}) = 0$ 此时注意到 A 的单调性

$$(Ax_i, x_i - \bar{x}) = (Ax_i - A\bar{x}, x_i - \bar{x}) \geq 0, i = 1, 2, \cdots, m, \tag{2.5}$$

所以 $\bar{x} \in \bigcap\limits_{i=1}^{m} F_{x_i} \neq \emptyset$. 因 E 是自反的, 故 $\bigcap\limits_{x \in P} F_x \neq \emptyset$. 设 $y \in \bigcap\limits_{x \in P} F_x$, 则有 $y \in \overline{\Omega_r}, (Ax, x-y) \geq 0, \forall x \in P$. 又 A 的次连续性, 从而可知半连续, $\forall h \in E$, 取 $x = y + th \in P, t > 0$ 得

$$(A(y + th), h) \geq 0, \tag{2.6}$$

令 $t \to 0^+$, 可得

$$(Ay, h) \geq 0, \forall h \in E, \tag{2.7}$$

故 $Ay = 0^*$.

推论 2.1 设 E 是自反实 Banach 空间, $P \subset E$ 是一个体锥, P^* 为 P 的对偶锥, 若映像 $A : P \to P^*$ 半连续、单调的, ∂P 是连续的, 在 P^0 处局部有界. 设任意 $r > 0$, 使得 $\Omega_r = \{x \in E : \|x\| < r\} \bigcap P \neq \emptyset$, 则 $Ax = 0^*$ 在 $\overline{\Omega_r}$ 有解.

证 由引理 2.2 可知 $\overline{\Omega_r}$ 有界弱闭集, 对任意的 $x \in P$, 令

$$F_x = \{y : y \in \overline{\Omega_r}, (Ax, x - y) \geq 0\}.$$

很显然 F_x 是弱闭集, $F_x \subset \overline{\Omega_r}$. 任取 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m \in P$, 要证 $\bigcap\limits_{i=1}^{m} F_{x_i} \neq \emptyset$. 令

$$E_0 = \overline{\mathrm{conv}\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}}.$$

定义 $Tx = (Ax, x_1)x_1 + (Ax, x_2)x_2 + \cdots + (Ax, x_m)x_m, x \in E_0$, 由于 A 在 P^0 处半连续且局部有界, 由引理 2.1 可知 A 在 P^0 是次连续, 又 A 在 ∂P 是连续的, 从而可知 T 在 E_0 上连续. 接下来按照定理 2.1 证明即可.

注 1 定理 2.1 和推论 2.1 是单调映像锐角原理的推广.

下面来讨论一下著名的 Debrunner-Flor 不等式.

定理 2.2 设 E 是实 Banach 空间, P 是 E 的一个体锥, K 是 P 中紧凸子集, $G \subset K \times P^*$ 且 G 是单调集. 又设 $T : K \to P^*$ 是连续对偶锥映像, $h \in P^*$. 于是, 必有 $u \in K$ 存在, 使得

$$(f + Tu - h, x - u) \geq 0, \forall [x, f] \in G. \tag{2.8}$$

证 参考文献 [1] 的类似证明方法即可.

此外还有有限维空间的 Debrunner-Flor 不等式和一般空间的 Debrunner-Flor 不等式在对偶锥映像上是否成立, 本文不再谈论, 有兴趣的读者可以自行验证.

定理 2.3 设 E 是实 Banach 空间, $P \subset E$ 是一个锥, P^* 为 P 的对偶锥, 且 P^* 是一个锥, 若映像 $A : P \to P^*$ 是增算子, 对任意的 $x, y \in P, y - x \in P$, 则 $(Ax - Ay, x - y) \geq 0$.

证 $\forall x, y \in P, y - x \in P$, 则有 $x \leq y$, 又由于 A 是增算子, 那么 $Ax \leq Ay$, 根据 P^* 是一个锥, 就有 $Ay - Ax \in P^*$, 则 $(Ax - Ay, x - y) \geq 0$.

定理 2.4 设 E 是实 Banach 空间, P 是 E 的一个锥, 若 $A : P \to P^*$ 半连续、单调, 则 T 必是极大单调.

证 证明方法与文献 [2] 类似.

引理 2.3 [3] 设 E 是实 Banach 空间, $P \subset E$ 是一个体锥, 对 $x, y \in P^0$, $\rho(x, y)$ 是 P^0 上的一个拟距离, 即满足

(1)$x \in P^0 \Rightarrow \rho(x, x) = 0$,

(2)$x, y \in P^0 \Rightarrow \rho(x, y) = \rho(y, x)$,

(3)$x, y, z \in P^0 \Rightarrow \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$.

另外易知

(4)$x, y \in P^0, \alpha > 0, \beta > 0 \Rightarrow \rho(\alpha x, \beta y) = \rho(x, y)$, (5)$\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=\alpha y$, 其中 $\alpha>0$.

令 $P_1=P^0\bigcap\{x:x\in E,\|x\|=1\}$, 于是由 (5) 知 (P_1,ρ) 是一个距离空间.

(6) 设范数关于单调的 (即 $0\le x\le y\Rightarrow\|x\|\le\|y\|$), 则 (P_1,ρ) 是完备的距离空间.

当 P^* 是体锥时也有上面类似结果.

注 2 若 P 是一个体锥, $A:P_1\to P_1^*$ 其中 $P_1^*=P^{0^*}\bigcap\{f:f\in E^*,\|f\|=1\}$, P^{0^*} 表示锥 P^* 的内点集且非空, 一般会认为利用完备的度量空间和 Banach 压缩映像原理可以得出 A 有不动点, 这种想法显然不对, 因为 A 是将 P_1 中元素映射成共轭空间上的泛函, 不是 P_1 本身的元素, 若 E 是 Hilbert 空间, 则上述的想法是对的, 因为每个 Hilbert 空间的泛函就是它本身, 一般情况下, 我们比较感兴趣的是 Banach 空间上的性质, 以致下面定理为了得到不动点, 引入了线性算子作用在共轭空间上.

定理 2.5 设 E 是实 Banach 空间, $P\subset E$ 是一个体锥, 设范数关于 P 单调的, P^* 是一个体锥, $A:P^0\to P^{0^*}$ 是正增 p 齐次的, $0<p<1$, $j:P^*\to P^0$ 是增的线性算子, 则 jA 在 P^0 中必有唯一的不动点.

证 假定 $0<p<1$, 由 $m(\dfrac{x}{y})y\le x\le M(\dfrac{x}{y})y$ 和 A 的增正 p 齐次性知

$$[m(\frac{x}{y})]^pAy\le Ax\le[M(\frac{x}{y})]^pAy, \tag{2.9}$$

由于 j 是增线性算子

$$[m(\frac{x}{y})]^pjAy\le jAx\le[M(\frac{x}{y})]^pjAy, \tag{2.10}$$

那么

$$M(\frac{jA(x)}{jA(y)})\le[M(\frac{x}{y})]^p, m(\frac{jA(x)}{jA(y)})\ge[m(\frac{x}{y})]^p, \tag{2.11}$$

根据 Hilbert 投影距离的定义知

$$\rho(jA(x),jA(y))=\ln\{\frac{M(\frac{jA(x)}{jA(y)})}{m(\frac{jA(x)}{jA(y)})}\}\le p\ln\{\frac{M(\frac{x}{y})}{m(\frac{x}{y})}\}=p\rho(x,y). \tag{2.12}$$

定义 $j_1A(x)=\dfrac{jA(x)}{\|jA(x)\|}$, 则 $j_1A:P_1\to P_1$, 利用引理 2.4, 可知 (P_1,ρ) 是完备的距离空间, 由 Banach 压缩映像原理, 那么 j_1A 在 P_1 中有唯一不动点. 设其为 x_0, 则 $j_1A(x_0)=x_0$. 令 $x_1=\|jA(x_0)\|^{\frac{1}{1-p}}x_0$, 则

$$A(x_1)=\|jA(x_0)\|^{\frac{p}{1-p}}A(x_0); \tag{2.13}$$

$$jA(x_1)=\|jA(x_0)\|^{\frac{p}{1-p}}jA(x_0)=\|jA(x_0)\|^{\frac{p}{1-p}+1}j_1A(x_0)=\|jA(x_0)\|^{\frac{1}{1-p}}x_0=x_1. \tag{2.14}$$

故 jA 在 P^0 中有不动点 x_1. 现在证明它的不动点是唯一的, 假设它还有另一个不动点 $x_2, jA(x_2)=x_2$, 因

$$\rho(x_1,x_2)=\rho(jAx_1,jAx_2)\le p\rho(x_1,x_2)\Rightarrow\rho(x_1,x_2)=0,$$

可知

$$x_1=tx_2, t>0, x_1=jA(x_1)=jA(tx_2)=t^pjA(x_2)=t^px_2,$$

则可以推出 $t=1$, 即是 $x_1=x_2$.

注 3 在这里取 $P=P^*$, 此时在这里的线性增算子定义 $j=I$ 为恒等算子, 此时只需要讨论 $A:P^0\to P^0$, 这个结果在文献 [1] 中可以查阅.

若应用注 3 里面的条件, 就会有下面例子的成立.

例 3 设非线性积分方程 $\varphi(x)=\int_G f(x,y)[\varphi(y)]^p dy$, 其中 $0<p<1, f(x,y)$ 在 $G\times G$ 非负连续且 $\int_G f(x,y)dy>0, G$ 表示 R^n 中某有界闭区域, 那么非线性积分方程在 G 上具有唯一的恒正连续解.

当知道 P 和 P^* 是一个体锥, 假设 $A:P_1\to P_1^*$ 是 p 正齐次的, $0<p<1$, 并且是增的, 得出 A 在 P_1 上是一个 Hilbert 投影距离连续算子.

事实上, 假定 $0<p<1$, $\forall x,y\in P_1$, 由 $m(\frac{x}{y})y\le x\le M(\frac{x}{y})y$, A 的增正 p 齐次性知

$$[m(\frac{x}{y})]^pAy\le Ax\le[M(\frac{x}{y})]^pAy,$$

则

$$M^*(\frac{A(x)}{A(y)})\le[M(\frac{x}{y})]^p, m^*(\frac{A(x)}{A(y)})\ge[m(\frac{x}{y})]^p,$$
$$\rho(A(x),A(y))=\ln\{\frac{M^*(\frac{A(x)}{A(y)})}{m^*(\frac{A(x)}{A(y)})}\}\le p\ln\{\frac{M(\frac{x}{y})}{m(\frac{x}{y})}\}=p\rho(x,y). \tag{2.15}$$

若 $\forall x,y\in P_1,\rho(x,y)\to 0$, 则 $\rho(Ax,Ay)\to 0$, 即是 A 在 P_1 上 Hilbert 投影距离连续. 显然 Hilbert 投影距离连续并不能推出依范数连续.

首先思考当 Hilbert 投影距离连续时要满足什么条件就可推出依范数连续, 反之也是否能成立, 下面定理就是所要讨论的结果.

定理 2.6 设 E 是实 Banach 空间, P 和 P^* 是一个体锥, 范数分别关于 P 和 P^* 单调的, 映像 $A:P_1\to P_1^*$, 若 A 在 P_1 上 Hilbert 投影距离连续, 则它是依范数连续.

证 任意取 $x_n,x_0\in P_1$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|=0$. 又因 $m(\frac{x_n}{x_0})x_0\le x_n\le M(\frac{x_n}{x_0})x_0$, 由于范数关于 P 单调的, 则

$$m(\frac{x_n}{x_0})\|x_0\|\le\|x_0\|\le M(\frac{x_n}{x_0})\|x_0\|, \tag{2.16}$$

即是

$$m(\frac{x_n}{x_0})\le 1\le M(\frac{x_n}{x_0}), \tag{2.17}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|=0$. 故 $M(\frac{x_n}{x_0})$ 是有界的. 即 $\exists a>0$ 使得 $M(\frac{x_n}{x_0})\le a$, 那么

$$m(\frac{x_n}{x_0})\le 1\le M(\frac{x_n}{x_0})\le a.$$

由 Bolzano-Weierstrass 定理知 $M(\frac{x_n}{x_0}), m(\frac{x_n}{x_0})$ 有收敛子列, 任给 $\varepsilon>0$, 取 $0<\varepsilon_0<1$, 使得 $\ln\frac{1+\varepsilon_0}{1-\varepsilon_0}<\varepsilon$, 于是存在 $N_1>0$, 使得对任意的 $n_j>N_1$, 恒有 $1-\varepsilon_0<m(\frac{x_{n_j}}{x_0})\le 1$, 存在

$N_2 > 0$, 使得对任意的 $n_j > N_2$, 恒有 $1 < M(\frac{x_{n_j}}{x_0}) \le 1 + \varepsilon_0$, 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 对任意的 $n_j > N$, 有

$$1 - \varepsilon_0 < m(\frac{x_{n_j}}{x_0}) \le 1, 1 < M(\frac{x_{n_j}}{x_0}) \le 1 + \varepsilon_0, \tag{2.18}$$

故当 $n > N$ 时, 恒有

$$\rho(x_n, x_0) = \ln\{\frac{M(\frac{x_n}{x_0})}{m(\frac{x_n}{x_0})}\} \le \ln\frac{1+\varepsilon_0}{1-\varepsilon_0}. \tag{2.19}$$

由任意的 ε, 可以知道 $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$. 由假设映像 $A : P_1 \to P_1^*$ 是 Hilbert 投影距离连续, 对上面的 $\rho(x_n, x_0) \to 0$, 则 $\rho(Ax_n, Ax_0) \to 0$. 当 $\rho(Ax_n, Ax_0) \to 0 \Rightarrow \dfrac{M^*(\frac{Ax_n}{Ax_0})}{m^*(\frac{Ax_n}{Ax_0})} \to 1$. 若对 $Ax_n, Ax_0 \in P_1^*$, 有 $m^*(\frac{Ax_n}{Ax_0})Ax_0 \le Ax_n \le M^*(\frac{Ax_n}{Ax_0})Ax_0$, 由于范数关于 P^* 单调的, 则

$$m^*(\frac{Ax_n}{Ax_0}) \le 1 \le M^*(\frac{Ax_n}{Ax_0}). \tag{2.20}$$

那么

$$M^*(\frac{Ax_n}{Ax_0}) \to 1, m^*(\frac{Ax_n}{Ax_0}) \to 1, 0 \le Ax_n - m^*(\frac{Ax_n}{Ax_0})Ax_0 \le [M^*(\frac{Ax_n}{Ax_0}) - m^*(\frac{Ax_n}{Ax_0})]Ax_0.$$

故

$$\begin{aligned} \|Ax_n - Ax_0\| &= \|Ax_n - m^*(\frac{Ax_n}{Ax_0})Ax_0\| + \|m^*(\frac{Ax_n}{Ax_0})Ax_0 - Ax_0\| \\ &\le [M^*(\frac{Ax_n}{Ax_0}) - m^*(\frac{Ax_n}{Ax_0})]\|Ax_0\| + [1 - m^*(\frac{Ax_n}{Ax_0})]\|Ax_0\| \\ &= [M^*(\frac{Ax_n}{Ax_0}) - m^*(\frac{Ax_n}{Ax_0})] + [1 - m^*(\frac{Ax_n}{Ax_0})] \to 0 \ (n \to \infty), \end{aligned} \tag{2.21}$$

故 A 在 P_1 上依范数连续.

定理 2.7 设 E 是实 Banach 空间, P 和 P^* 是一个体锥, 范数分别关于 P 和 P^* 单调的, 映像 $A : P_1 \to P_1^*$, 若 A 在 P_1 上是依范数连续, 则它是 Hilbert 投影距离连续.

证 若对取 $x_n, x_0 \in P_1$ 使得 $\rho(x_n, x_0) \to 0$, 根据定理 2.6 的证明可以知道 $\|x_n - x_0\| \to 0$, 由假设 $A : P_1 \to P_1^*$ 是依范数连续, 故 $\|Ax_n - Ax_0\| \to 0$, 接下来同样按定理 2.6 类似证明可以得出 $\rho(Ax_n, Ax_0) \to 0$.

注 4 由定理 2.6, 定理 2.7 可以知道当 P 和 P^* 是一个体锥, 范数关于 P 和 P^* 单调时, 可以得出映像 $A : P_1 \to P_1^*$ 是 Hilbert 投影距离连续与依范数连续等价.

参 考 文 献

[1] 郭大均. 非线性泛函分析 (第 3 版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2015.

[2] Deimling K. Nonlinear functional analysis[M]. Berlin: Springer Press, 1985.

[3] Bauer F L. An elementary proof of the Hopf inequality for positive operators[J]. Numer. Math., 1965, 17: 331–337.

[4] Conway J B. A course in functional analysis (2nd ed.)[M]. New York: Springer Press, 1990.

[5] Chen Y Q, Cho Y J. Monotone type operators in nonreflexive Banach space[J]. Fixed Point Theory Appl., 2014, 2014: 119.

[6] 梁展东. Hilbert 投影距离与范数的关系 [J]. 系统科学与数学, 1988, 8(1): 88–91.

[7] Browder F E. Degree of mapping for nonlinear mappings of monotone type[J]. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1983, 80: 1771–1773.

[8] 魏利, 刘元星. Banach 空间中 $m-d$ 增生映射零点的强弱收敛定理 [J]. 数学杂志, 2016, 36(3): 573–583.

[9] 崔玉军, 邹玉梅. 非线性算子的歧点 [J]. 数学杂志, 2011, 31(3): 476–480.

PROBLEMS OF DUAL CONE MAPPING

ZHANG Chuang-liang

(*College of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520, China*)

Abstract: In this paper, we study some nonlinear problems of dual cone mapping. By using topological degree theory and partial order methods, we get the results of the acute angle principle, Debrunner-Flor inequality and fixed point theorem for dual cone mapping. Some results in the document are improved and extended.

Keywords: dual cone mapping; acute angle principle; Debrunner-Flor inequality; fixed point

2010 MR Subject Classification: 47H05; 47H07