Vol. 37 (2017)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

具有幂零奇点的七次 Hamilton 系统 Abel 积分的零点个数估计

马慧龙, 杨纪华

(宁夏师范学院数学与计算机科学学院, 宁夏 固原 756000)

摘 要: 本文研究了具有幂零奇点的七次 Hamilton 系统的 Abel 积分的零点个数问题. 利用 Picard-Fuchs 方程法, 得到了 Abel 积分 $I(h)=\oint_{\Gamma_h} g(x,y)dx-f(x,y)dy$ 在 $(0,\frac{1}{4})$ 上零点个数 $B(n)\le 3\left[\frac{n-1}{4}\right]$, 其中 Γ_h 是 $H(x,y)=x^4+y^4-x^8=h$, $h\in(0,\frac{1}{4})$, 所定义的卵形线 $f(x,y)=\sum\limits_{1\le 4i+4j+1\le n} a_{ij}x^{4i+1}y^{4j}$ 和 $g(x,y)=\sum\limits_{1\le 4i+4j+1\le n} b_{ij}x^{4i}y^{4j+1}$ 是 x 和 y 的次数不超过 n 的多项式.

关键词: Hamilton 系统; 幂零奇点; Abel 积分; Picard-Fuchs 方程

MR(2010) **主题分类号**: 34C07; 34C05　　**中图分类号**: O175

文献标识码: A　　**文章编号**: 0255-7797(2017)06-1227-07

1 引言

考虑如下 Hamilton 系统的扰动向量场

$$\begin{cases}\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial y}+\varepsilon f(x,y),\\ \dot{y}=-\frac{\partial H}{\partial x}+\varepsilon g(x,y),\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 $0<|\varepsilon|\ll 1$, $H(x,y)$ 是关于 x 和 y 的 $m+1$ 次实多项式, $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 是关于 x 和 y 的次数不超过 n 的实多项式. 假设系统 (1.1) 的未扰动系统 $(1.1)_{\varepsilon=0}$ 有连续闭轨线族 $\{\Gamma_h\}$, Σ 为 Γ_h 的最大存在开区间, 即

$$\Gamma_h=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|H(x,y)=h,\ h\in\Sigma\}.$$

考虑以下积分

$$I(h)=\oint_{\Gamma_h} g(x,y)dx-f(x,y)dy,\quad h\in\Sigma,\tag{1.2}$$

(1.2) 式称为 Abel 积分. 寻找 Abel 积分零点个数的最小上界 $Z(m,n)$ 称为弱 Hilbert 16 问题或 Hilbert-Arnold 问题 [1]. 相关的研究很多. 例如, Khovansky 和 Varchenko 独立地证明了 $Z(m,n)$ 的有限性, 但是没有给出具体的表达式 [2,3]. 李承治和张芷芬得到了 $Z(2,2)=2$ [4]. 对于 $H(x,y)=y^2+x^3-x$, Horozov 和 Iliev 通过研究相应的 Picard-Fuchs 方程得到 $Z(2,n)\le 5n+15$ [5]. 另外, Petrov 分别研究了 Hamilton 函数 $H(x,y)=y^2-x+x^3$,

*收稿日期: 2016-07-29　　接收日期: 2017-06-20
基金项目: 国家自然科学基金 (11701306); 宁夏师范学院重点科研项目 (NXSFZD1708; NXSFZD1606).
作者简介: 马慧龙 (1975–), 男, 宁夏固原, 讲师, 主要研究方向: 微分方程及其应用.

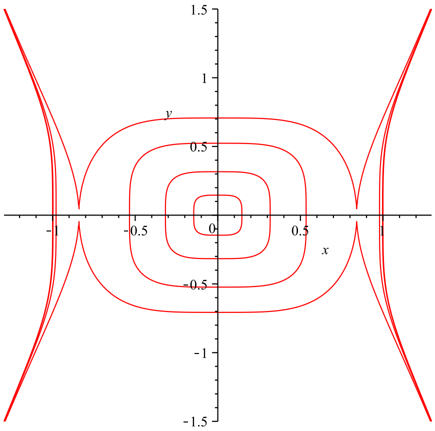

图 1: 系统 (1.4) 的相图

$H(x,y)=y^2+x^2-x^4$ 和 $H(x,y)=y^2-x^2+x^4$ 的相应 Abel 积分 $I(h)$ 的零点的个数 [6−9]. 对于 4 次 Hamilton 函数 $H(x,y)=-x^2+x^4+y^4$ 和 $H(x,y)=x^2+y^2+ax^4+y^4$, Zhou 和 Li 得到了相应 Abel 积分零点个数的上界 [10,11]. 当 $m>4$ 时, 由于很难得到 Abel 积分 $I(h)$ 的代数结构, 目前研究结果很少 [10].

受文献 [5, 10, 11] 的启发, 本文研究八次 Hamilton 函数

$$H(x,y)=x^4+y^4-x^8=h \tag{1.3}$$

相应的向量场

$$\begin{cases}\dot{x}=4y^3,\\ \dot{y}=-4x^3(1-2x^4)\end{cases} \tag{1.4}$$

在多项式 $f(x,y)=\sum\limits_{1\le 4i+4j+1\le n}a_{ij}x^{4i+1}y^{4j}$ 和 $g(x,y)=\sum\limits_{1\le 4i+4j+1\le n}b_{ij}x^{4i}y^{4j+1}$ 的扰动下 Abel 积分 $I(h)$ 的零点个数的上界 (计重数). 系统 (1.4) 有两个幂零鞍点 $S_1(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}},0)$ 与 $S_2(\frac{1}{\sqrt[4]{2}},0)$ 和一个幂零中心 $O(0,0)$. 卵形线 Γ_h 由 Hamilton 值 h 定义, 其中 $h\in(0,\frac{1}{4})$. 如图 1 所示.

记 $B(n)$ 为 Abel 积分 $I(h)$ 在 $(0,\frac{1}{4})$ 上的零点个数 (计重数), 其中 $n=\max\{\deg f,\deg g\}$. 本文的主要结果为

定理 1.1 对 Hamilton 函数

$$H(x,y)=x^4+y^4-x^8=h,\ \ h\in(0,\frac{1}{4}),$$

$B(n)\le 3[\frac{n-1}{4}]$. 而且 $B(1)=0$, 其中 $[\cdot]$ 是取整函数.

2 Abel 积分 $I(h)$ 的代数结构

由分部积分公式可知

$$\oint_{\Gamma_h}x^{4i+1}y^{4j}dy=-\frac{4i+1}{4j+1}\oint_{\Gamma_h}x^{4i}y^{4j+1}dx.$$

所以 Abel 积分 (1.2) 可化为 $I(h)=\oint_{\Gamma_h}P(x,y)dx$, 其中 $P(x,y)=\sum\limits_{1\le 4i+4j+1\le n}c_{ij}x^{4i}y^{4j+1}$. 下面只考虑如下形式的积分

$$I_{4i,4j+1}(h)=\oint_{\Gamma_h}x^{4i}y^{4j+1}dx. \tag{2.1}$$

记 $I_0(h)=\oint_{\Gamma_h}ydx,\ I_1(h)=\oint_{\Gamma_h}x^4ydx.$

引理 2.1 假设 $n\ge 5$, 对于 Hamilton 函数 (1.3), $I(h)$ 可表示为

$$I(h)=\alpha(h)I_0(h)+\beta(h)I_1(h), \tag{2.2}$$

其中 $\alpha(h)$ 和 $\beta(h)$ 是关于 h 的多项式, $\deg\alpha(h)\le[\frac{n-1}{4}]=k$, $\deg\beta(h)\le[\frac{n-1}{4}]-1=k-1$, 且 k 和 $k-1$ 分别是 $\deg\alpha(h)$ 和 $\deg\beta(h)$ 的最小上界.

证 分两步进行证明.

(1) 证明对 $n=4i+4j+1=4k+1\ge 5$, 积分 $I_{4i,4j+1}$ 可以表示为 $I_{l,m}$ $(l+m=4k-3)$ 和 $hI_{l,m}$ $(l+m=4k-7$ 或 $4k-3)$ 的线性组合.

事实上, 对 (1.3) 式两端同时关于 x 求导可得

$$y^3\frac{\partial y}{\partial x}+x^3-2x^7=0. \tag{2.3}$$

(2.3) 式两端同乘以 $x^{4i-7}y^{4j+1}dx$ 并沿着 Γ_h 积分可得

$$I_{4i,4j+1}=\frac{1}{2}\Big(I_{4i-4,4j+1}-\frac{4i-7}{4j+5}I_{4i-8,4j+5}\Big), \tag{2.4}$$

其中 $i\ge 2$. (1.3) 式两端同乘以 $x^{4i}y^{4j-3}$ 并沿着 Γ_h 关于 x 积分可得

$$I_{4i,4j+1}=hI_{4i,4j-3}+I_{4i+8,4j-3}-I_{4i+4,4j-3}. \tag{2.5}$$

由 (2.4) 式可得

$$I_{4i+8,4j-3}=\frac{1}{2}\Big(I_{4i+4,4j-3}-\frac{4i+1}{4j+1}I_{4i,4j+1}\Big), \tag{2.6}$$

把 (2.6) 式代入 (2.5) 可得

$$I_{4i,4j+1}=\frac{4j+1}{4i+8j+3}\Big(2hI_{4i,4j-3}-I_{4i+4,4j-3}\Big). \tag{2.7}$$

由 (2.5) 式可得

$$I_{4i-8,4j+5}=hI_{4i-8,4j+1}+I_{4i,4j+1}-I_{4i-4,4j+1}, \tag{2.8}$$

把 (2.8) 式代入 (2.4) 式可得

$$I_{4i,4j+1}=\frac{1}{4i+8j+3}\Big((4i+4j-2)I_{4i-4,4j+1}-(4i-7)hI_{4i-8,4j+1}\Big). \tag{2.9}$$

在 (2.7) 式中分别取 $(i,j)=(0,k),(1,k-1)$, 在 (2.9) 式中分别取 $(i,j)=(2,k-2),(3,k-3),\cdots,(k-1,1),(k,0)$, 可得

$$\mathbf{AJ}=\mathbf{B}, \tag{2.10}$$

其中 $\mathbf{J}=(I_{0,4k+1},I_{4,4k-3},I_{8,4k-7},\cdots,I_{4k-8,9},I_{4k-4,5},I_{4k,1})^T$,

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&\frac{4k+1}{8k+3}&0&0&\cdots&0&0&0\\0&1&\frac{4k-3}{8k-1}&0&\cdots&0&0&0\\0&0&1&0&\cdots&0&0&0\\0&0&0&1&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&1&0&0\\0&0&0&0&\cdots&0&1&0\\0&0&0&0&\cdots&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\frac{2(4k+1)}{8k+3}hI_{0,4k-3}\\\frac{2(4k-3)}{8k-1}hI_{4,4k-7}\\\frac{1}{8k-5}((4k-2)I_{4,4k-7}-hI_{0,4k-7})\\\frac{1}{8k-9}((4k-2)I_{8,4k-11}-5hI_{4,4k-11})\\\vdots\\\frac{1}{4k+11}((4k-2)I_{4k-12,9}-(4k-15)hI_{4k-16,9})\\\frac{1}{4k+7}((4k-2)I_{4k-8,5}-(4k-11)hI_{4k-12,5})\\\frac{1}{4k+3}((4k-2)I_{4k-4,1}-(4k-7)hI_{4k-8,1})\end{pmatrix}.$$

计算可得 $|A|=1$, 且 $\mathbf{B}$ 中元素仅含有积分 $I_{l,m}$ $(l+m=4k-3)$ 和 $hI_{l,m}$ $(l+m=4k-7$ 或 $4k-3)$.

(2) 用数学归纳法证明 $I(h)=\alpha(h)I_0(h)+\beta(h)I_1(h)$, 并且 $\deg\alpha(h)\le[\frac{n-1}{4}]$, $\deg\beta(h)\le[\frac{n-1}{4}]-1$.

事实上, 由 (2.7) 和 (2.9) 式可得

$$\begin{aligned}&I_{0,5}=\frac{10}{11}hI_0-\frac{5}{11}I_1,\ I_{0,9}=\frac{18}{19}hI_{0,5}-\frac{9}{19}I_{4,5},\\&I_{4,5}=\frac{2}{3}hI_1-\frac{1}{3}I_{8,1},\ I_{8,1}=-\frac{1}{11}hI_0+\frac{6}{11}I_1.\end{aligned} \tag{2.11}$$

即当 $k=1,2$ 时结论成立, 其中 $n=4k+1$. 假设当 $k\le s-1$ 时, 结论成立. 那么当 $k=s$ 时, 由等式 (2.10) 和第 1 步的结论可得

$$\begin{aligned}I(h)=&\sum_{l+m=4k-3}A_{l,m}I_{l,m}+h\sum_{l+m\le4k-3}B_{l,m}I_{l,m}\\=&\alpha^{4k-3}(h)I_0+\beta^{4k-3}(h)I_1+h(\gamma^{4k-3}(h)I_0+\delta^{4k-3}(h)I_1)\\:=&\alpha(h)I_0+\beta(h)I_1,\end{aligned}$$

其中 $\deg\alpha^{4k-3}(h), \deg\gamma^{4k-3}(h)\le k-1$, $\deg\beta^{4k-3}(h), \deg\delta^{4k-3}(h)\le k-2$. 因此

$$\begin{aligned}&\deg\alpha(h)\le\max\{\deg\alpha^{4k-3}(h),\ 1+\deg\gamma^{4k-3}(h)\}\le k,\\&\deg\beta(h)\le\max\{\deg\beta^{4k-3}(h),\ 1+\deg\delta^{4k-3}(h)\}\le k-1.\end{aligned}$$

即对任意的 n, $\deg\alpha(h)\le k=\left[\frac{n-1}{4}\right]$, $\deg\beta(h)\le k-1=\left[\frac{n-1}{4}\right]-1$, 并且 k 和 $k-1$ 分别是 $\deg\alpha(h)$ 和 $\deg\beta(h)$ 的最小上界. 证毕.

3 Picard-Fuchs 方程和 Riccati 方程

本小节将得到 I_0 和 I_1 满足的 Picard-Fuchs 方程.

引理 3.1 对于 Hamilton 函数 (1.3), I_0 和 I_1 满足 Picard-Fuchs 方程

$$4h(4h-1)\begin{pmatrix}I_0'\\I_1'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6h-2&7\\-h&14h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_0\\I_1\end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

证 (1.3) 式两端同时关于 h 求导可得 $\frac{\partial y}{\partial h}=\frac{1}{4y^3}$, 进而可得

$$I'_{4i,4j+1}=\frac{4j+1}{4}\oint_{\Gamma_h}x^{4i}y^{4j-3}dx, \tag{3.2}$$

所以

$$I_{4i,4j+1}=\oint_{\Gamma_h}x^{4i}y^{4j+1}dx=\frac{4}{4j+5}I'_{4i,4j+5}. \tag{3.3}$$

(3.2) 式两端同乘以 h 可得

$$\begin{aligned}hI'_{4i,4j+1}=&\frac{4j+1}{4}\oint_{\Gamma_h}x^{4i}y^{4j-3}(x^4+y^4-x^8)dx\\=&I'_{4i+4,4j+1}+\frac{4j+1}{4j+5}I'_{4i,4j+5}-I'_{4i+8,4j+1}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}I_{4i,4j+1}=&\oint_{\Gamma_h}x^{4i}y^{4j+1}dx=-\frac{4j+1}{4i+1}\oint_{\Gamma_h}x^{4i+1}y^{4j}dy\\=&-\frac{4j+1}{4i+1}\oint_{\Gamma_h}x^{4i+4}y^{4j-3}(2x^4-1)dx\\=&-\frac{1}{4i+1}\Big(8I'_{4i+8,4j+1}-4I'_{4i+4,4j+1}\Big).\end{aligned} \tag{3.5}$$

由 (3.3)–(3.5) 式可得

$$I_{4i,4j+1}=\frac{4}{4i+8j+3}(2hI'_{4i,4j+1}-I'_{4i+4,4j+1}). \tag{3.6}$$

在 (3.6) 式中分别取 $(i,j)=(0,0)$ 和 $(1,0)$ 可得

$$I_{01}=\frac{8h}{3}I'_{01}-\frac{4}{3}I'_{41},\quad I_{41}=\frac{8h}{7}I'_{41}-\frac{4}{7}I'_{81}. \tag{3.7}$$

注意到 (2.11) 式即可得结论成立. 证毕.

容易得到 $I_0(h)=\oint_{\Gamma_h} ydx=\iint_{int(\Gamma_h)} dxdy\neq 0$, 所以可得如下引理.

引理 3.2 对于 Hamilton 函数 (1.3), $\omega(h)=\frac{I_1(h)}{I_0(h)}$ 满足如下的 Riccati 方程

$$4h(4h-1)\omega'(h)=-7\omega^2(h)+2(4h+1)\omega(h)-h. \tag{3.8}$$

证 由于 $\omega'(h)=\frac{I'_1I_0-I'_0I_1}{I_0^2}$, 结合 (3.1) 式即可得 (3.8) 式. 证毕.

4 主要结果的证明

引理 4.1 设 $W(h)=\frac{I(h)}{I_0(h)}$, 则 $W(h)$ 满足

$$4h(4h-1)\beta(h)W'(h)=-7W^2(h)+F_1(h)W(h)+F_0(h), \tag{4.1}$$

其中 $\deg F_0(h)\le 2p$, $F_1(h)=4h(4h-1)\beta'(h)+2(4h+1)\beta(h)+14\alpha(h)$,

$$F_0(h)=4h(4h-1)\big(\alpha'(h)\beta(h)-\alpha(h)\beta'(h)\big)-h\beta^2(h)-2(4h+1)\alpha(h)\beta(h)-7\alpha^2(h).$$

证 因为 $W(h)=\frac{I(h)}{I_0(h)}=\alpha(h)+\beta(h)\omega(h)$, 所以 $W'(h)=\alpha'(h)+\beta'(h)\omega(h)+\beta(h)\omega'(h)$. 注意到 (3.8) 式即可得证. 证毕.

引理 4.2 假设 $\Sigma_0=(a,b)\subset\Sigma$, 则在 Σ_0 上有 $\#W(h)\le\#F_0(h)+\#\beta(h)+1$, 其中 $\#W(h)$ 表示 $W(h)$ 在 Σ_0 上零点的个数 (计重数).

证 分两步进行证明.

(1) 如果 $\alpha(h)$ 和 $\beta(h)$ 没有公因子, 则 $W(h)$ 和 $\beta(h)$ 没有公共零点. 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$ 是 $\beta(h)$ 在 Σ_0 中的所有根, $\xi_0=a,\ \xi_{k+1}=b,\ \xi_j<\xi_{j+1},\ j=0,1,2,\cdots,k$. 设 $F_0(h)$ 在 (ξ_j,ξ_{j+1}) 中有 η_j 个零点. 记 $h_1,\ h_2$ 是 $W(h)$ 在 (ξ_j,ξ_{j+1}) 中的两个相邻零点, 则

$$4h_i(4h_i-1)\beta(h_i)W'(h_i)=F_0(h_i),\ i=1,2,$$

所以在 (ξ_j,ξ_{j+1}) 中 $F_0(h_1)F_0(h_2)\le 0$, 也就是说 $W(h)$ 在 (ξ_j,ξ_{j+1}) 中的任何两个相邻零点之间至少有 $F_0(h)$ 的一个零点. 因此 $W(h)$ 在 (ξ_j,ξ_{j+1}) 中至多有 η_j+1 个零点, 进而可得

$$\#W(h)\le\sum_{j=0}^{n}(\eta_j+1)=\#F_0(h)+\#\beta(h)+1.$$

(2) 如果 $\alpha(h)$ 和 $\beta(h)$ 有公因子 $\nu(h)$, 记 $W(h)=\nu(h)W_1(h), W_1(h)=\bar\alpha(h)+\bar\beta(h)\omega(h)$, 其中 $\alpha(h)=\nu(h)\bar\alpha(h),\ \beta(h)=\nu(h)\bar\beta(h)$. 对于 $W_1(h)$ 按照 (1) 的证明过程可得结论成立. 证毕.

定理 1.1 的证明 当 $n\ge 5$ 时, 因为 $W(h)=\frac{I(h)}{I_0(h)}$, 且 $I_0(h)\neq 0$, 所以在 $(0,\frac14)$ 上, $W(h)$ 与 $I(h)$ 的零点个数相同. 由引理 4.2 知

$$B(n)\le\#F_0(h)+\#\beta(h)+1\le 2\Big[\frac{n-1}{4}\Big]+\Big[\frac{n-1}{4}\Big]-1+1=3\Big[\frac{n-1}{4}\Big].$$

当 $n=1$ 时, $I(h)=c_0I_0$, 其中 c_0 为非零常数. 因为 $I_0\neq 0$, 所以 $B(1)=0$. 证毕.

参 考 文 献

[1] Arnold V. Loss of stability of self-oscillation close to resonance and versal deformation of equivariant vector fields[J]. Funct. Anal. Appl., 1977, 11: 1–10.

[2] Khovansky A. Real analytic manifolds with finiteness properties and complex Abelian integrals[J]. Funct. Anal. Appl., 1984, 18: 119–128.

[3] Varchenko A. Estimate of the number of zeros of an Abelian integral depending on a parameter and limit cycles[J]. Funct. Anal. Appl., 1984, 18: 98–108.

[4] Li C, Zhang Z. Remarks on 16th weak Hilbert problem for $n = 2$[J]. Nonlinearity, 2002, 15: 1975–1992.

[5] Horozov E, Iliev I. Linear estimate for the number of zeros of Abelian integrals with cubic Hamiltonians[J]. Nonlinearity, 1998, 11: 1521–1537.

[6] Petrov G. Number of zeros of complete elliptic integrals[J]. Funct. Anal. Appl., 1984, 18: 148–149.

[7] Petrov G. Elliptic integrals and their nonoscillation[J]. Funct. Anal. Appl., 1986, 20: 37–40.

[8] Petrov G. Complex zeros of an elliptic integral[J]. Funct. Anal. Appl., 1987, 21: 247–248.

[9] Petrov G. Complex zeros of an elliptic integral[J]. Funct. Anal. Appl., 1989, 23: 160–161.

[10] Zhou X, Li C. Estimate of the number of zeros of Abelian integrals for a kind of quartic Hamiltonians with two centers[J]. Appl. Math. Comput., 2008, 204: 202–209.

[11] Zhou X, Li C. On the algebraic structure of Abelian integrals for a kind of pertubed cubic Hamiltonian systems[J]. J. Math. Anal. Appl., 2009, 359: 209–215.

ON THE NUMBER OF ZEROS FOR ABEL INTEGRALS OF HAMILTON SYSTEM OF SEVEN DEGREE WITH NILPOTENT SINGULARITIES

MA Hui-long, YANG Ji-hua

(*School of Mathematics and Computer Science, Ningxia Normal University, Guyuan 756000, China*)

Abstract: In this paper, we study the number of zeros for Abel integrals of Hamilton system of seven degree with nilpotent singularities. By using the Picard-Fuchs equation method, we derive that the number of zeros of Abel integrals $I(h) = \oint_{\Gamma_h} g(x,y)dx - f(x,y)dy$ on the open interval $(0, \frac{1}{4})$ is at most $3[\frac{n-1}{4}]$, where Γ_h is an oval lying on the algebraic curve $H(x,y) = x^4 + y^4 - x^8 = h$, $h \in (0, \frac{1}{4})$, $f(x,y) = \sum\limits_{1\le 4i+4j+1\le n} x^{4i+1}y^{4j}$ and $g(x,y) = \sum\limits_{1\le 4i+4j+1\le n} x^{4i}y^{4j+1}$ are polynomials of x and y of degrees not exceeding n.

Keywords: Hamilton system; nilpotent singularity; Abel integral; Picard-Fuchs equation

2010 MR Subject Classification: 34C07; 34C05