Vol. 37 ( 2017 )
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

# 基于 EV 模型 ND 样本加权和的相合性

兰冲锋

(阜阳师范学院经济学院, 安徽 阜阳 236037)
(区域物流规划与现代物流工程安徽省重点实验室, 安徽 阜阳 236037)

**摘 要**: 本文研究变系数 EV 模型的 ND 样本加权和的相合性问题. 利用 ND 序列的 Bernstein 型不等式和截尾的方法, 获得了 ND 样本加权和 $\sum\limits_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)Y_i$ 的强、弱相合性, 推广了独立随机变量加权和的相合性.

**关键词**: 变系数 EV 模型; ND 样本; 加权和; 相合性
MR(2010) **主题分类号**: 62D05 **中图分类号**: O212.2
**文献标识码**: A **文章编号**: 0255-7797(2017)05-1047-07

## 1 引言

在一维线性结构关系 EV(errors-in-variables) 模型 [1] 中, 如果参数 $a, b$ 是实变量 $t$ 的有界连续函数 $a(t), b(t), t \in (0,1), (b(t) \neq 0)$, 可得到下列变系数一维线性结构关系的 EV 模型

$$\begin{cases} y = a(t) + b(t)x, \\ Y = y + \epsilon, \\ X = x + u, \end{cases}$$

其中 $X, Y$ 是随机变量, $(\epsilon, u)$ 是测量误差, $t$ 是一实变量, 可以是温度、时间等, 假定 $t$ 在一个闭区间上变化, 可通过变换使得 $t \in [0,1]$.

目前关于变系数 EV 模型的讨论还处在起步阶段, 但是也取得了一些成果, 如欧阳 [2] 初步研究了这类模型, 他利用加权正交回归最小二乘法给出了该模型的一维线性结构的参数估计, 并得到了该估计的强、弱相合性; 崔 [3] 给出了变系数线性 EV 模型参数的调整加权最小二乘估计及其渐近性质; 方和胡 [4] 讨论了核实数据下非线性 EV 模型中经验似然降维推断等. 而本文则研究变系数 EV 模型的 ND 样本加权和的相合性问题, 为此先讨论 EV 模型的权函数问题.

设 $t_0 \in (0,1)$, 要对 $t_0$ 处的 $a(t_0), b(t_0)$ 进行参数估计. 然而不可能在 $t_0$ 处作 $n$ 次观测, 只能在 $t_0$ 处附近作 $n$ 次观测. 设 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是 $[0,1]$ 上 $n$ 个设计点, 满足

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq, \cdots, \leq t_n \leq 1.$$

*收稿日期: 2014-01-24 接收日期: 2015-04-21
基金项目: 国家自然科学基金资助 (71571174); 安徽省高校自然科学研究重点项目基金资助 (KJ2016A876; KJ2015A182)
作者简介: 兰冲锋 (1981–), 男, 安徽阜阳, 讲师, 主要研究方向: 概率极限理论.

对每个点 $t_i$ 处 $(Y, X)$ 作观测, 得到 $n$ 组观测值 $(Y_i, t_i, X_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 当利用这 $n$ 组观测值来估计 $t_0$ 处的参数 $a(t_0), b(t_0)$ 时, 此时应该注意到 $t_i$ 处的观测值 $(Y_i, t_i, X_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 相对于 $t_0$ 来说它们的重要程度并不一样, 这种重要程度可用实变量 $t_i$ 的权函数 $W_{ni}(t_0)$ 来度量. 下面给出权函数的定义.

设 $(Y_i, t_i, X_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是取自母体 $(Y, X)$ 的样本, $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是 $[0, 1]$ 上的 $n$ 个设计点, $t_0$ 是 $(0, 1)$ 内的某一个点, 实变量 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 的函数 $W_{ni}(t_0) = W_{ni}(t_0, t_1, t_2, \cdots, t_n)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 称为实变量权函数 (简称为权函数), 如果它满足

(1) $W_{ni}(t_0) > 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$;

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) = 1$.

选定一维概率密度函数 $k(\cdot)$ 及窗宽 $h_n \in (0, 1/2), h_n \to 0$ $(n \to \infty)$, 则有

$$W_{ni}(t_0) = \frac{k[(t_i - t_0)/h_n]}{\sum\limits_{i=1}^{n} k[(t_i - t_0)/h_n]}$$

为权函数, 称之为核权函数.

在文 [5] 中提出了这样一个问题: 在何种条件下, 当 $n \to \infty$ 时有

$$\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(x_0) Y_i \to E(Y|X = x_0) \text{ a.s..}$$

欧阳 [6] 研究了上式中的权函数 $W_{ni}(x_0)$ 为实变量核权函数 $W_{ni}(t_0)$ 时, 独立随机变量序列 $\{Y_i\}_{i=1}^{n}$ 加权和 $\sum\limits_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0) Y_i$ 的相合性, 付和吴 [7] 研究了 NA 同分布序列 $\{Y_i\}_{i=1}^{n}$ 加权和的相合性, 而有关此问题的讨论的其他文献目前的报道较少. 本文在此基础上进行推广, 研究变系数 EV 模型的 ND 样本 $\{Y_i\}_{i=1}^{n}$ 加权和的相合性, 获得了与独立随机变量样本加权和相同的结论. 为此, 需给出 ND 序列的概念.

**定义** [8] 称随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, n \geq 2$ 是 ND (Negatively Dependent) 的, 若对任意 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in R$, 有

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n}(X_j \leq x_j)\right) \leq \prod_{j=1}^{n} P(X_j \leq x_j), \ \ P\left(\bigcap_{j=1}^{n}(X_j > x_j)\right) \leq \prod_{j=1}^{n} P(X_j > x_j).$$

如果 $\forall n \geq 2$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都是 ND 的, 则称随机变量列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是 ND 列.

文献 [9] 举例说明了 NA 序列一定是 ND 序列, 但 ND 序列不一定是 NA 序列, 这说明 ND 序列是比 NA 序列更弱、更广泛的一种随机变量序列. 因此, 对 ND 列的研究在理论和实践中都是十分有意义的. 自从 1993 年 Bozorgnia 等 [8] 提出 ND 相依概念以来, 已经引起了越来越多的学者的关注, 也取得了许多的研究成果, 例如文献 [8–10] 等.

## 2 引理

为了得出本文的主要结论, 本节先给出一些相关的引理.

**引理 1** [8] 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是 ND 的, $\forall m \geq 2, A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的两两不交的非空子集. 如果 $f_i, i = 1, 2, \cdots, m$ 是对每个变元都非降 (或都非升) 的函数, 则 $f_1(X_j, j \in A_1), f_2(X_j, j \in A_2), \cdots, f_m(X_j, j \in A_m)$ 仍是 ND 的.

**引理 2** [8] 设随机变量 $\{X_n, n\geq 1\}$ 是 ND 列, 则

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) \leq \prod_{i=1}^{n} EX_i.$$

特别地, 设随机变量 $\{X_n, n\geq 1\}$ 是 ND 列, $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 都是非正或者都是非负的实数, 则有

$$E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{n} t_i X_i\right)\right] \leq \prod_{i=1}^{n} E\left[\exp(t_i X_i)\right].$$

**引理 3** [9] (Bernstein 不等式) 设随机变量 $\{X_n, n\geq 1\}$ 是 ND 列, $EX_i=0$, $|X_i|\leq b_i$, a.s., $(i=1,2,\cdots,n)$, $t>0$ 为实数, 且满足 $t\max\limits_{1\leq i\leq n} b_i \leq 1$, 则 $\forall\epsilon>0$, 有

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| > \epsilon\right) \leq 2\exp\left\{-t\epsilon + t^2\sum_{i=1}^{n} EX_i^2\right\}.$$

**引理 4** 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 ND 的, $EX_i=0$, 且

$$\max_{1\leq i\leq n}|X_i| = o\left((\log n)^{-1}\right),\ \sum_{i=1}^{n} EX_i^2 = o\left((\log n)^{-1}\right),$$

则 $\forall\,\epsilon>0$ 及充分大的 $n$, 有 $P\left(\left|\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right| > \epsilon\right) \leq 2n^{-2}$.

**证**　由条件, $\forall\,\epsilon>0$ 及充分大的 $n$ 知

$$\max_{1\leq i\leq n}|X_i| \leq \epsilon^2(16\log n)^{-1},\ \sum_{i=1}^{n} EX_i^2 \leq \epsilon^2(16\log n)^{-1}.$$

取 $t=4\epsilon^{-1}\log n>0$, 则 $t$ 满足引理 3 的要求, 因此

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| > \epsilon\right) \leq 2\exp\{-4\log n + \log n\} \leq 2\exp\{-2\log n\} = 2n^{-2}.$$

## 3 主要结果及证明

**定理 1** 设 $\{Y, Y_i, i\geq 1\}$ 为同分布的 ND 样本序列, 且存在 $M>0$, 使得 $\mathrm{Var}(Y)\leq M$, 若对任意实变量核权函数 $\{W_{ni}(t_0)\}_{i=1}^{n}$, 存在正数 $C$, 使得

$$\max_{1\leq i\leq n} W_{ni}(t_0) \leq \frac{C\log n}{nh_n},$$

则有

(1) 当 $\frac{\log n}{nh_n}\to 0\ (n\to\infty)$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)Y_i \xrightarrow{p} EY; \tag{3.1}$$

(2) 当 $\frac{\log^2 n}{\sqrt{n}h_n} \to 0\ (n\to\infty)$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)Y_i \xrightarrow{\text{a.s.}} EY. \tag{3.2}$$

**注** 由于 ND 序列是比独立序列和 NA 序列更弱、更广泛的一种随机变量序列, 所以该定理在较弱的条件下, 得到了与独立情形下相同的结论.

**证** 由于式 (3.1) 和 (3.2) 可以转化为

$$\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)(Y_i - EY_i) \xrightarrow{p} 0,\ \ \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)(Y_i - EY_i) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0.$$

而 $E(Y_i - EY_i) = 0$, $\mathrm{Var}(Y_i - EY_i) = \mathrm{Var}(Y_i) \le M, i = 1, 2, \cdots, n$. 因此不失一般性, 不妨假设 $EY = 0$.

先证结论 (1) 成立, 因为 $E\left(\sum\limits_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)Y_i\right) = 0$, 为证式 (3.1) 成立, 由 Markov 条件, 只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Var}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)Y_i\right) = 0$ 即可.

事实上

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)Y_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} W_{ni}^2(t_0)\mathrm{Var}(Y_i) \le M\left(\max_{1\le i\le n} W_{ni}(t_0)\right) \le \frac{MC\log n}{nh_n}.$$

故由条件 $\frac{\log n}{nh_n} \to 0\ (n\to\infty)$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Var}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)Y_i\right) = 0$, 从而 (1) 得证.

下证结论 (2) 成立. $\forall i \le n$, 令

$$\begin{aligned} Y_i^{(1)} &= -\sqrt{n}I_{(Y_i<-\sqrt{n})} + Y_iI_{(|Y_i|\le\sqrt{n})} + \sqrt{n}I_{(Y_i>\sqrt{n})}, \\ Y_i^{(2)} &= Y_i - Y_i^{(1)} = (Y_i+\sqrt{n})I_{(Y_i<-\sqrt{n})} + (Y_i-\sqrt{n})I_{(Y_i>\sqrt{n})}, \end{aligned}$$

则 $Y_i = Y_i^{(1)} + Y_i^{(2)}$, 由 $EY = 0$, 得 $EY_i^{(1)} = -EY_i^{(2)}$, 故得 $Y_i = (Y_i^{(1)} - EY_i^{(1)}) + (Y_i^{(2)} - EY_i^{(2)})$, 从而

$$\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)Y_i = \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)(Y_i^{(1)} - EY_i^{(1)}) + \sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)Y_i(Y_i^{(2)} - EY_i^{(2)}). \tag{3.3}$$

要证式 (3.2) 成立, 只需证下面两式成立即可

$$\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)\left(Y_i^{(1)} - EY_i^{(1)}\right) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0; \tag{3.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)\left(Y_i^{(2)} - EY_i^{(2)}\right) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0. \tag{3.5}$$

先证式 (3.4) 成立, 记 $X_{ni} \doteq W_{ni}(t_0)(Y_i^{(1)} - EY_i^{(1)}), b_n \doteq \max\limits_{1\le i\le n} W_{ni}(t_0)$. 由 $W_{ni}(t_0) > 0$ 和 $Y_i^{(1)}$ 的定义, 结合引理 1 知 $\{X_{ni}\}_{i=1}^{n}$ 仍是零均值同分布 ND 序列.

由于

$$\begin{aligned}\left|Y_i^{(1)}-EY_i^{(1)}\right| &= \left|-\sqrt{n}I_{(Y_i<-\sqrt{n})}+Y_iI_{(|Y_i|\le\sqrt{n})}+\sqrt{n}I_{(Y_i>\sqrt{n})}\right.\\ &\quad\left.-E\left(-\sqrt{n}I_{(Y_i<-\sqrt{n})}+Y_iI_{(|Y_i|\le\sqrt{n})}+\sqrt{n}I_{(Y_i>\sqrt{n})}\right)\right|\\ &\le \sqrt{n}\left|I_{(Y_i<-\sqrt{n})}-P(Y_i<-\sqrt{n})\right|+\sqrt{n}\left|I_{(Y_i>\sqrt{n})}-P(Y_i>\sqrt{n})\right|\\ &\quad+\left|Y_iI_{(|Y_i|\le\sqrt{n})}-EY_iI_{(|Y_i|\le\sqrt{n})}\right|\\ &\le \sqrt{n}\left|I_{(Y_i<-\sqrt{n})}\right|+\sqrt{n}\left|I_{(Y_i>\sqrt{n})}\right|+\left|Y_iI_{(|Y_i|\le\sqrt{n})}-EY_iI_{(|Y_i|\le\sqrt{n})}\right|\\ &\le 2\sqrt{n}+\left|Y_iI_{(|Y_i|\le\sqrt{n})}\right|+\left|EY_iI_{(|Y_i|\le\sqrt{n})}\right|\le 4\sqrt{n}, \qquad (3.6)\end{aligned}$$

从而 $\max\limits_{1\le i\le n}|X_{ni}|=\max\limits_{1\le i\le n}W_{ni}(t_0)\left|Y_i^{(1)}-EY_i^{(1)}\right|\le 4b_n\sqrt{n}$. 又因

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\mathrm{Var}\,(X_{ni}) &= \sum_{i=1}^n\mathrm{Var}\left[W_{ni}(t_0)\left(Y_i^{(1)}-EY_i^{(1)}\right)\right]=\sum_{i=1}^nW_{ni}^2(t_0)\mathrm{Var}\left(Y_i^{(1)}\right)\\ &\le \sum_{i=1}^n\left[\max_{1\le i\le n}W_{ni}(t_0)\right]^2\mathrm{Var}\,(Y_i)\le nMb_n^2,\end{aligned}$$

所以由 $\frac{\log^2 n}{\sqrt{n}h_n}\to 0\ (n\to\infty)$ 知

$$\begin{aligned}\frac{\max\limits_{1\le i\le n}|X_{ni}|}{\log n} &\le \frac{4b_n\sqrt{n}}{\log n}\le\frac{4\sqrt{n}}{\log n}\frac{C\log n}{nh_n}=\frac{4C}{\sqrt{n}h_n}\to 0,\ n\to\infty;\\ \frac{\sum\limits_{i=1}^nEX_{ni}^2}{\log n} &\le \frac{\sum\limits_{i=1}^n\mathrm{Var}\,(X_{ni})}{\log n}\le\frac{nMb_n^2}{\log n}\le\frac{nM}{\log n}\frac{C^2\log^2 n}{n^2h_n^2}\\ &= \frac{C^2M}{\log^3 n}\left(\frac{\log^2 n}{\sqrt{n}h_n}\right)^2\to 0,\ n\to\infty.\end{aligned}$$

由上面两式可得 $\max\limits_{1\le i\le n}|X_{ni}|=o\left((\log n)^{-1}\right)$, $\sum\limits_{i=1}^nEX_{ni}^2=o\left((\log n)^{-1}\right)$.

结合引理 4 知, $\forall\epsilon>0$ 及充分大的 $n$, 有

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^nX_{ni}\right|>\epsilon\right)\le 2n^{-2},$$

故

$$\sum_{n=1}^\infty P\left(\left|\sum_{i=1}^nX_{ni}\right|>\epsilon\right)<\infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理可知, $\forall\epsilon>0$ 及当 $n$ 充分大时, 有 $\left|\sum\limits_{i=1}^nX_{ni}\right|\le\epsilon$ a.s.. 从而当 $n\to\infty$ 时, $\sum\limits_{i=1}^nX_i\to 0$ a.s., 即式 (3.4) 成立.

最后证式 (3.5) 成立. 由 $Y_i^{(2)}$ 的定义, 根据引理 1 知 $\{(Y_i^{(2)}-EY_i^{(2)})\}_{i=1}^n$ 仍是零均值同分布 ND 序列, 故 $E\left|Y_i^{(2)}-EY_i^{(2)}\right|^2=\mathrm{Var}(Y_i^{(2)})\le \mathrm{Var}(Y_i)\le M$. 由 Markov 不等式得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}P\left(\left|Y_i^{(2)}-EY_i^{(2)}\right|>\sqrt{i}\right) &= \sum_{i=1}^{\infty}P\left(\left|Y_1^{(2)}-EY_1^{(2)}\right|>\sqrt{i}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty}P\left(\sqrt{j}<\left|Y_1^{(2)}-EY_1^{(2)}\right|<\sqrt{j+1}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{j}P\left(\sqrt{j}<\left|Y_1^{(2)}-EY_1^{(2)}\right|<\sqrt{j+1}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}jP\left(\sqrt{j}<\left|Y_1^{(2)}-EY_1^{(2)}\right|<\sqrt{j+1}\right)\\ &\le \sum_{j=1}^{\infty}E\left|Y_1^{(2)}-EY_1^{(2)}\right|^2 I_{\left(\sqrt{j}<\left|Y_1^{(2)}-EY_1^{(2)}\right|<\sqrt{j+1}\right)}\\ &= \mathrm{Var}(Y_1^{(2)})\le \mathrm{Var}(Y_1)\le M<\infty.\end{aligned}\tag{3.7}$$

由 Borel-Cantelli 引理可知 $\left|Y_i^{(2)}-EY_i^{(2)}\right|\le\sqrt{i}$ a.s.. 记 $T_i\doteq W_{ni}(t_0)(Y_i^{(2)}-EY_i^{(2)})$, 则由 $W_{ni}(t_0)>0$ 知 $\{T_i\}_{i=1}^n$ 仍是同分布 ND 序列, $ET_i=0$, 并且

$$\max_{1\le i\le n}|T_i|=\max_{1\le i\le n}W_{ni}(t_0)\left|Y_i^{(2)}-EY_i^{(2)}\right|\le\frac{C\log n}{nh_n}\sqrt{n}=\frac{C\log n}{\sqrt{n}h_n}\ \text{ a.s..}$$

令 $t=\frac{\sqrt{n}h_n}{C\log n}$, 则有 $t\max\limits_{1\le i\le n}|T_i|\le 1$ a.s.. 从而 $\{T_i\}_{i=1}^n$ 满足引理 3 的条件, 再结合条件 $\frac{\log^2 n}{\sqrt{n}h_n}\to 0\ (n\to\infty)$, 故 $\forall\epsilon>0$, 有

$$\begin{aligned}&P\left(\left|\sum_{i=1}^n T_i\right|>\epsilon\right)\le 2\exp\{-t\epsilon+t^2\sum_{i=1}^n ET_i^2\}\\ =&\ 2\exp\left\{-\frac{\sqrt{n}h_n}{C\log n}\epsilon+\left(\frac{\sqrt{n}h_n}{C\log n}\right)^2\sum_{i=1}^n W_{ni}^2(t_0)E(Y_i^{(2)}-EY_i^{(2)})^2\right\}\\ \le&\ 2\exp\left\{-\frac{\sqrt{n}h_n}{C\log n}\epsilon+\left(\frac{\sqrt{n}h_n}{C\log n}\right)^2\frac{MC\log n}{nh_n}\right\}=2\exp\left\{-\frac{\sqrt{n}h_n}{C\log n}\epsilon+\frac{Mh_n}{C\log n}\right\}\\ \le&\ 2\exp\left\{-\frac{\epsilon}{2}\frac{\sqrt{n}h_n}{C\log n}\right\}\le 2\exp\left\{\log n^{-2}\right\}=2n^{-2}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

故 $\forall\epsilon>0$ 及 $n\to\infty$ 时, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\left|\sum_{i=1}^n T_i\right|>\epsilon\right)<\infty,$$

此即

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\left|\sum_{i=1}^n W_{ni}(t_0)(Y_i^{(2)}-EY_i^{(2)})\right|>\epsilon\right)<\infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)\left(Y_i^{(2)} - EY_i^{(2)}\right)\right| \leq \epsilon \text{ a.s.},$$

即 $\sum\limits_{i=1}^{n} W_{ni}(t_0)\left(Y_i^{(2)} - EY_i^{(2)}\right) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$. 从而式 (3.5) 成立, 定理 1 得证.

## 参 考 文 献

[1] Cui H, Chen S X. Empirical likelihood confidence region for parameter in the errors-in-variables models [J]. J. Multi. Anal., 2003, 84(1): 101–115.

[2] 欧阳光. 变系数线性结构关系 EV 模型的参数估计 [J]. 应用数学学报, 2005, 28(1): 73–85.

[3] 崔恒建. 变系数线性 EV 模型参数的调整加权最小二乘估计及其渐近性质 [J]. 系统科学与数学, 2007, 27(1): 82–92.

[4] 方连娣, 胡凤霞. 核实数据下非线性 EV 模型中经验似然降维推断 [J]. 数学杂志, 2012, 32(1): 113–120.

[5] 陈希孺, 王松桂. 近代实用回归分析 [M]. 南宁: 广西人民出版社, 1984, 237–247.

[6] 欧阳光. 独立随机变量序列加权和的相合性 [J]. 数学理论与应用, 2005, 25(1): 109–113.

[7] 付艳莉, 吴群英. NA 同分布序列加权和的相合性 [J]. 吉林大学学报 (理学版), 2010, 48(1): 57–62.

[8] Bozorgnia A, Patterson R F, Taylor R L. Limit theorems for ND r.v.'s [R]. Athens: University of Georgia, 1993.

[9] Wu Q Y, Jiang Y Y. The strong consistency of $M$ estimator in a linear model for negatively dependent random samples [J]. Commun. Stat.: The. Meth., 2011, 40(3): 467–491.

[10] Wu Q Y. Complete convergence for negatively dependent sequences of random variables [J]. J. Inequ. Appl., 2010, Article ID 507293.

# CONSISTENCY OF WEIGHTED SUMS FOR NEGATIVELY DEPENDENT SAMPLES BASED ON EV MODEL

LAN Chong-feng

(*School of Economics, Fuyang Normal College, Fuyang 236037, China*)

(*Anhui Provincial Key Laboratory Regional Logistics Planning and Modern Logistics Engineering, Fuyang 236037, China*)

**Abstract:** In this paper, we discuss consistency of weighted sums for negatively dependent samples based on varying-coefficient EV model. By applying Bernstein type inequality for negatively dependent sequences and truncation methods, the strong and weak consistency of weighted sums for negatively dependent samples are obtained, which extend consistency of weighted sums for independent random variables.

**Keywords:** varying-coefficient EV model; negatively dependent samples; weighted sums; consistency

**2010 MR Subject Classification:** 62D05