

基于三次 Bézier 基函数插值的 GM(1,1) 模型背景值优化研究

董克^{1,2}, 吕文元¹

(1. 上海理工大学管理学院, 上海 200093)

(2. 安徽广播电视大学公共基础部, 安徽合肥 230022)

摘要: 本文研究了传统灰色 GM(1,1) 模型存在模型精度不高的问题. 利用带形状参数的三次 Bézier 基函数, 给出插值函数的表达式, 并结合复化梯形公式, 给定误差限的方法, 获得了比传统灰色 GM(1,1) 模型更高精度的结果. 推广了传统灰色 GM(1,1) 预测模型的结果.

关键词: GM(1,1) 模型; 复化梯形公式; 背景值; 插值函数

MR(2010) 主题分类号: 35F10 中图分类号: O175.2

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2017)05-1022-07

1 引言

自上个世纪 80 年代邓聚龙教授提出灰色系统理论^[1]以来, 灰色系统理论在许多领域得到了广泛的应用和发展^[2-6]. GM(1,1) 模型是灰色系统理论的核心内容之一, 它主要针对“小样本、贫信息”的不确定系统. 但是, 传统的 GM(1,1) 模型具有预测精度不高的问题, 如何提高 GM(1,1) 模型的预测精度, 已经成为广大研究人员最关注的问题. 而影响 GM(1,1) 模型预测精度的主要因素有初始条件的选取、背景值的重构和参数估计方法的改进, 其中背景值的重构, 具有决定性的作用. 传统方法实质上是使用紧邻均值构造背景值, 误差通常较大, 从而导致模型预测的偏差也较大, 预测精度自然达不到要求. 近年来不少学者提出了提高灰色 GM(1,1) 模型预测精度的方法, 文献 [7-9] 从背景值的几何意义出发, 进行了系列研究, 提出了若干种背景值的构造方式; 文献 [10] 利用拉格朗日插值公式对背景值进行重构, 对传统模型的背景值进行了改进, 并利用最小二乘法对初始值进行了优化; 李俊峰等^[11]提出一种基于数值分析中的插值法和 Newton-Cotes 公式的背景值构造方法. 但是, 众所周知, 当 n 较大时, 高次插值会出现 Runge 现象, 造成的误差可能会很大, 故不能通过提高阶的方法来提高求积精度; 文献 [12] 提出一种利用梯形面积和矩形面积相结合的正负误差补偿方法进行背景值的重构方法, 取得一定的效果, 但是 n_1 值的选取很难把握; 文献 [13] 提出用 Simpson 公式构造模型背景值的方法, 拟合精度在一定程度上得到了改进; 王晓佳等^[14]提出利用分段插值函数与 Newton 插值函数相结合的组合插值方法, 但分段过程比较繁琐; 蒋诗泉等^[15]提出基于复化梯形公式的背景值优化方法, 但是仅选取区间等分数 $n = 4$ 的情形, 而对于 n 值取更大的情况未予以考虑.

文中构造出带形状参数的三次 Bézier 基函数, 然后给出插值函数, 提出了基于复化梯形公式的背景值构造方法, 给定误差限, 结合提出的优化算法, 计算出对应的背景值, 提高了

*收稿日期: 2015-07-01 接收日期: 2015-12-23

基金项目: 上海市浦江人才计划项目 (14PJJC077); 安徽广播电视大学青年教师基金项目 (qn15-19).

作者简介: 董克 (1982-), 男, 安徽蚌埠, 讲师, 主要研究方向: 灰色理论及其应用.

GM(1,1) 模型的预测精度. 以工程实际应用中无镍铸造装甲钢的断裂韧度值为例, 实例研究表明, 提出的方法不仅提高了 GM(1,1) 模型的预测精度, 并且扩展了 GM(1,1) 模型的应用范围.

2 模型建立

给定 $x^{(0)}(t) = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n), x^{(0)}(t) > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$ 为原始序列, 可以建立基本的 GM(1,1) 模型, 将序列 $x^{(0)}(t)$ 进行一次累加 (1-AGO), 得到累加序列 $x^{(1)}(t)$ 为 $x^{(1)}(t) = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n), \dots, x^{(1)}(n)\}$, 其中

$$x^{(1)}(k) = \sum_{t=1}^k x^{(0)}(t).$$

序列的白化微分方程为

$$\frac{dx^{(1)}(t)}{dt} + ax^{(1)}(t) = b. \quad (2.1)$$

灰色 GM(1,1) 模型的基本形式如下

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b, \quad (2.2)$$

其中 $z^{(1)}(k) = \frac{1}{2}(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)), k = 2, 3, \dots, n$ 为背景值.

若 $\hat{a} = [a, b]^T$ 为参数列, 且

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

利用最小二乘法求解参数 a 和 b ,

$$(B^T B)^{-1} B^T Y = \hat{a}. \quad (2.4)$$

$x^{(1)}(k)$ 的 GM(1,1) 模型为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = (x^{(0)}(1) - \frac{b}{a})e^{-ak} + \frac{b}{a}, k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.5)$$

由于预测方程是对累加数据序列 $x^{(1)}(t)$ 的预测, 进行累减还原, 则可以得到原始数据序列的预测公式

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) = (1 - e^a)(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a})e^{-ak}. \quad (2.6)$$

从公式 (2.6) 可以看出, 模型的拟合预测精度取决于参数 a, b 及初始值 $x^{(0)}(1)$ 的值. 而参数 a, b 的值又取决于原始数据序列和背景值 $z^{(1)}(k)$. 因此, 背景值构造公式的合理性直接影响模型预测精度. 传统的背景值计算实质上是梯形的面积, 而实际值正如图 1 所示, 应该等于曲

线 $x^{(1)}(t)$ 在区间 $[k-1, k]$ 上与 t 轴围成的面积, 这也是传统背景值计算公式的误差产生的根源所在. 将积分区间分成若干小区间, 在每个小区间上用低阶求积公式, 然后将这些小区间上的积分值相加作为函数在整个区间上的积分的近似值, 这就是复化求积的思想. 下述内容将给出利用三次 Bézier 基函数构造插值函数, 结合复化梯形公式的 GM(1,1) 模型的背景值优化方法及算法.

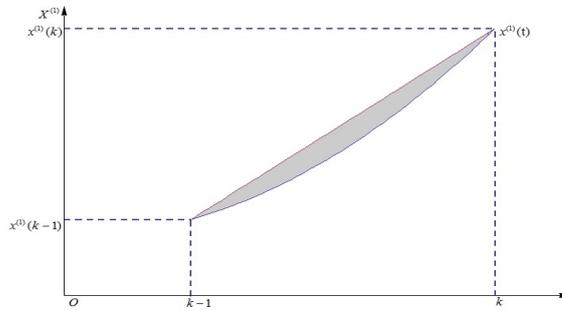


图 1: 传统 GM(1,1) 模型误差来源图

3 灰色 GM(1,1) 模型背景值的优化

3.1 插值基函数的构造

1962 年, 法国雷诺 (Renault) 汽车公司的工程师 Bézier 提出了一种新的方法用来构造著名的 Bézier 曲线^[16], 设计人员只需要移动控制多边形的控制节点就可以方便地修改曲线的形状, 而且形状的变化完全在预料之中, 但是它无法插值控制节点, 并且需要移动控制节点的位置来改变曲线的形状. 下述将构造出一种带形状参数 λ 的三次 Bézier 基函数, 不用调节控制多边形的节点位置, 只须通过调节形状参数 λ 的值, 即可调节设计曲线的形状, 而且当参数值 $\lambda = 2$ 时, 曲线插值中间控制节点. 文中将利用参数 $\lambda = 2$ 时, 三次 Bézier 基函数的插值性质, 来构造插值函数, 从而计算 GM(1,1) 模型的背景值.

定义 3.1^[1] 对 $t \in [0, 1], \lambda \in R$, 则称关于 t 的多项式

$$\begin{cases} b_1(\lambda, t) = (1 - \lambda t)(1 - t)^2, \\ b_2(\lambda, t) = (2 + \lambda)(1 - t)t, \\ b_3(\lambda, t) = (1 - \lambda + \lambda t)t^2, \end{cases} \quad t \in [0, 1] \quad (3.1)$$

为带形状参数 λ 的三次 Bézier 基函数. 当 $\lambda = 0$ 时, 基函数退化为二次 Bézier 基函数. 因此它是二次 Bézier 基函数的扩展. 当 $\lambda = 2$ 时, 公式 (3.1) 将简化为

$$\begin{cases} b_1(t) = (1 - 2t)(1 - t)^2, \\ b_2(t) = 4(1 - t)t, \\ b_3(t) = t^2(2t - 1), \end{cases} \quad t \in [0, 1]. \quad (3.2)$$

若任意给定三个插值节点 $x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), x^{(1)}(3)$, 插值函数为

$$f(t) = b_1(t)x^{(1)}(1) + b_2(t)x^{(1)}(2) + b_3(t)x^{(1)}(3), \quad t \in [0, 1]. \quad (3.3)$$

当 $t = 0.5$ 时, 基函数 $b_1(t), b_3(t)$ 的值均为 0, 而 $b_2(t)$ 的值为 1, 则公式 (3.3) 为 $f(0.5) = x^{(1)}(2)$, 说明函数 $f(t)$ 是插值于中间控制节点的. 图 2 为给定三个插值节点 $(-2,0), (0,1), (2,0)$, 所得到的插值函数图形, 从图中可以看出, 插值函数是插值中间控制节点的.

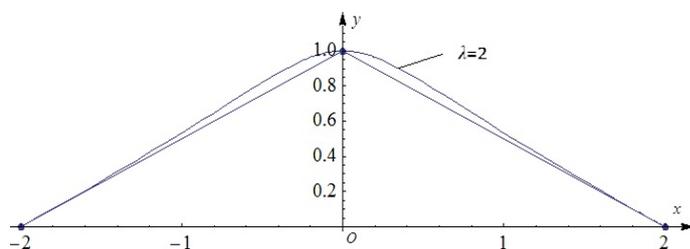


图 2: 利用插值基函数构造的插值函数图形

定义 3.2 设在区间 $[a, b]$ 上, 给定三个插值节点 $(k, x^{(1)}(k)), (k+1, x^{(1)}(k+1)), (k+2, x^{(1)}(k+2))$, 再利用公式 (3.2) 所定义的基函数, 则可得区间 $[a, b]$ 上的插值函数

$$f(t) = b_1(t-a)x^{(1)}(k) + b_2(t-a)x^{(1)}(k+1) + b_3(t-a)x^{(1)}(k+2), t \in [0, 1]. \quad (3.4)$$

3.2 复化梯形公式

定义 3.3 [17] 将区间 $[a, b]$ 划分为 n 等份, 分点 $x_k = a + kh, h = \frac{b-a}{n}, k = 0, 1, \dots, n$, 在每个子区间 $[x_k, x_{k+1}], (k = 0, 1, \dots, n-1)$ 上采用梯形公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)],$$

可得

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] + R_n(f). \quad (3.5)$$

记

$$T_n = \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] = \frac{h}{2} [f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)], \quad (3.6)$$

称为复化梯形公式, 其中

$$R_n(f) = I - T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left[-\frac{h^3}{12} f''(\eta_k) \right], \eta_k \in (x_k, x_{k+1}). \quad (3.7)$$

定理 3.1 [17] 当 $f(x) \in C^2[a, b]$ 时, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \int_a^b f(x)dx, \quad (3.8)$$

即当 $n \rightarrow \infty$ 时, 复化梯形公式是收敛的.

定理 3.2 对复化梯形公式 T_n , 若将区间 $[a, b]$ 进行 $2n$ 等分, 则得到 T_{2n} :

$$T_{2n} = \frac{h}{4} \sum_{k=1}^{n-1} [f(x_k) + 2f(x_{k+\frac{1}{2}}) + f(x_{k+1})] = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2} \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}). \quad (3.9)$$

由定义 3.1 和定理 3.2 可得

$$T_{2n} - T_n = \frac{1}{2} \left(h \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) - T_n \right).$$

在使用复化梯形公式进行求积计算时, 必须先给出步长 h 或者等分数 n 的值, 步长 h 取得太大, 则精度无法满足要求; 步长取得太小, 则导致计算量过大. 在使用复化梯形进行实际计算时, 给定误差值 ε , 用 $|T_{2n} - T_n| < \varepsilon$ 成立与否, 作为计算的终止条件. 如果满足给定的误差限, 则取 T_{2n} 作为所求的值; 否则, 再将子区间对分, 进行计算, 直到满足给定的误差要求为止. 下一部分将给出利用复化梯形公式 (3.6) 进行背景值优化的算法.

3.3 算法步骤

步骤 1 输入原始序列 $x^0(i), x^0(i) > 0, i = 1, 2, \dots, n, \varepsilon$ 以及端点 a, b 的值, 置

$$n \leftarrow 1, h \leftarrow b - a;$$

步骤 2 计算利用公式 (3.4), 计算插值函数, 并计算

$$T \leftarrow \frac{1}{2}[f(a) + f(b)];$$

步骤 3 计算

$$S = \frac{1}{2} \left[T + h \sum_{j=0}^{n-1} f\left(a + \frac{1}{2}h + jh\right) \right];$$

步骤 4 如果 $|S - T| > \varepsilon$, 那么 $T \leftarrow S, n \leftarrow 2n, h \leftarrow \frac{1}{2}h$, 转步骤 3; 其他, 转步骤 5;

步骤 5 转向 T ; 结束.

3.4 算法时间复杂度分析

传统灰色 GM(1,1) 模型的背景值 $z^{(1)}(k)$ 的计算是与规模问题 n 无关的常数, 所以时间复杂度为 $O(1)$. 但对于使用复化梯形公式进行优化计算的背景值来说, 时间复杂度与区间等分数 n 相关, 时间复杂度为 $O(n)$.

4 算例分析

以无镍铸造装甲钢的断裂韧度值为例^[18], 分别计算传统灰色 GM(1,1) 模型和所提出的优化 GM(1,1) 模型在回火温度为 600°C 时试样断裂韧度的预测值, 以温度为 200°C , 300°C , 400°C , 500°C 时的断裂韧度值数据作为原始数据, 对温度为 600°C 时的韧度值进行预测, 并以 600°C 时的实际数据作为检验数据.

给定误差限 ε 的值, 即可以利用提出的算法, 进行背景值计算. 此处取 $\varepsilon = 0.01$, 选取插值节点 $(1, x^{(1)}(1))$, $(2, x^{(1)}(2))$, $(3, x^{(1)}(3))$ 为例, 利用上述给出的插值函数公式及背景值优化算法, 得到 $z^1(2) = 149.226$. 同理可以得到 $z^1(3) = 220.098$, $z^1(4) = 323.240$.

将利用复化梯形公式优化算法计算得到的背景值, 代入优化的灰色 GM(1,1) 模型, 即可得到预测值, 并计算出它的相对误差值. 可以看出, 与传统的 GM(1,1) 模型比较, 优化后的灰色 GM(1,1) 模型的平均相对误差为 4.5457%, 比传统的 GM(1,1) 模型降低了 0.6235%, 有明显改进. 预测误差也由 16.8118% 降低至 13.1823%, 精度提高了 3.6295%. 可见, 文中所提出的方法与传统模型方法相比, 具有一定的优越性. 结果见表 1.

表 1: 断裂韧度值预测比较表

温度	实际断裂韧度值	GM(1,1) 模型预测值	相对误差 %	文中方法的预测值	相对误差 %
200%	91.5	91.500	0	91.500	0
300%	92.5	89.930	2.7783	88.565	4.2537
400%	96.5	100.748	4.4020	101.156	4.8252
500%	115	112.868	1.8539	115.537	0.4673
600%	152	126.446	16.8118	131.963	13.1823
平均相对误差			5.1692		4.5457

5 结 语

文中给出了基于带三次 Bézier 插值基函数插值, 结合复化梯形公式的背景值的优化方法, 给定误差限, 利用给出的算法, 即可计算出灰色 GM(1,1) 模型的背景值. 与传统的背景值构造方法采用 Lagrange^[10]、Newton^[11] 插值或者组合插值^[13] 相比, 文中构造出一组插值基函数, 方法简便, 只须将累加序列节点, 代入即可求出插值函数, 易于操作. 实例研究表明, 文中提出的优化模型及算法的有效性, 比传统的灰色 GM(1,1) 模型误差有明显的改进, 扩大了 GM(1,1) 模型的适应性, 优化后的 GM(1,1) 模型更合理, 有助于提高 GM(1,1) 模型的预测精度, 扩展了 GM(1,1) 模型的应用范围.

参 考 文 献

- [1] 邓聚龙. 灰色理论基础 [M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 2002.
- [2] 肖新平, 毛树华. 灰预测与决策方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2013.
- [3] 王治祯. 灰色系统及模糊数学在环境保护中的应用 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2007.
- [4] Liu S F, Lin Y. Grey system: theory and applications[M]. London: Springer, 2011.
- [5] 曹昶, 樊重俊, 胡兆龙. 基于正弦函数变换的灰色预测模型研究及其应用 [J]. 数学杂志, 2013, 33(4): 697-701.
- [6] 汤旻安, 李滢. 基于数据变换的优化 GM(1,1) 模型 [J]. 数学杂志, 2015, 35(4): 957-962.
- [7] 谭冠军. GM(1,1) 模型的背景值构造方法和应用 (I)[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(4): 98-103.
- [8] 谭冠军. GM(1,1) 模型的背景值构造方法和应用 (II)[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(5): 125-132.
- [9] 谭冠军. GM(1,1) 模型的背景值构造方法和应用 (III)[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(6): 70-74.
- [10] 唐万梅, 向长合. 基于二次插值 GM(1,1) 模型预测方法的改进 [J]. 中国管理科学, 2006, 14(12): 109-112.

- [11] 李俊峰, 戴文战. 基于插值和 Newton-Cotes 公式的 GM(1,1) 模型的背景值构造新方法及应用 [J]. 系统工程理论与实践, 2002, 10: 122–126.
- [12] 戴文战, 熊伟, 杨爱萍. 基于函数变换及背景值优化的灰色建模 [J]. 浙江大学学报 (工学版), 2010, 44(7): 1368–1372.
- [13] 何满喜, 王勤. 用 Simpson 公式构造背景值的 GM(1,1) 建模新方法 [J]. 经济数学, 2011, 28(12): 101–104.
- [14] 王晓佳, 杨善林. 基于组合插值的 GM(1,1) 模型预测方法的改进与应用 [J]. 中国管理科学, 2012, 20(4): 130–134.
- [15] 蒋诗泉, 刘思峰, 周兴才. 基于复化梯形公式的 GM (1, 1) 模型背景值的优化 [J]. 控制与决策, 2014, 29(12): 2221–2225.
- [16] 王国瑾, 汪国昭, 郑建民. 计算机辅助几何设计 [M]. 北京: 高等教育 - 施普林格出版社, 2001.
- [17] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.
- [18] 马德林. 常用黑色金属材料断裂力学性能参数手册 [M]. 北京: 兵器工业出版社, 1994.

OPTIMIZATION OF BACKGROUND VALUE IN GM(1,1) BASED ON CUBIC BÉZIER BASIS FUNCTION INTERPOLATION

DONG Ke^{1,2}, LV Wen-yuan¹

(1. Business School, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

(2. Department of Foundation, Anhui Radio & TV University, Hefei 230022, China)

Abstract: In this paper, we study the accuracy of GM(1,1) forecasting model. In combination with compound trapezoid formula, cubic Bézier basis function method with shape parameter interpolation function expression is presented to solve the problem of low precision of traditional GM(1,1). Given error limits, the model which given in this paper can obtain more precision than traditional GM(1,1) model, which enlarge the application scope of GM(1,1) model.

Keywords: GM(1,1) model; compound trapezoid formula; the background value; interpolation function

2010 MR Subject Classification: 35F10