Vol. 37 (2017)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

关于 square-full 数上的函数 $q_k^{(e)}(n)$ 的均值估计

杨 丽 [1,2,3], 傅 春 [3]

(1. 南昌大学管理学院, 江西 南昌 330031)

(2. 南昌大学理学院, 江西 南昌 330031)

(3. 南昌大学中国中部经济社会发展研究中心, 江西 南昌 330031)

摘 要: 本文研究了指数 k-free 数的特征函数 $q_k^{(e)}(n)(k \geq 3)$ 在 square-full 数集中的均值估计问题. 利用黎曼 Zeta 函数的性质以及留数定理, 获得了该均值的渐近公式, 推广了 $q_k^{(e)}(n)$ 在整数集中的均值估计相关结果.

关键词: square-full 数; 留数定理; 除数问题; Dirichlet 卷积; 均值

MR(2010) **主题分类号**: 11E45 **中图分类号**: O156.4

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2017)04-0865-06

1 引言

整数 $n > 1$ 有标准分解形式: $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r}$. 若满足 $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r}$, 其中 $a_1 \geq k, a_2 \geq k, \cdots, a_r \geq k$, 则称正整数 n 为 k-full 数, 当 $k = 2$ 时也称为 square-full 数. 令 $f_k(n)$ 是 k-full 数的特征函数, 即

$$f_k(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ 是 } k\text{-full 数;} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

正整数 $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r}$ 称为指数 k-full 数, 若所有的指数 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 都是 k-full 数. 正整数 $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r}$ 称为指数 k-free 数, 若所有的指数 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ 都是 k-free 数.

令 $q_k^{(e)}(n)$ 是指数 k-free 数的特征函数. 由 Tóth [5] 可以知道, 函数 $q_k^{(e)}(n)$ 是可乘的且对每一素数幂 p^a 有

$$q_k^{(e)}(p) = q_k^{(e)}(p^2) = q_k^{(e)}(p^3) = \cdots = q_k^{(e)}(p^{2^k-1}) = 1, q_k^{(e)}(p^{2^k}) = 0.$$

Tóth [5−6] 对该函数进行了研究并给出了其在整数上的均值估计

$$\sum_{n \leq x} q_k^{(e)}(n) = D_k x + O(x^{1/2^k \delta(x)}),$$

这里

$$D_k = \prod_p \left(1 + \sum_{2^k}^{\infty} \frac{q_k(a) - q_k(a-1)}{p^a}\right),$$

*收稿日期: 2015-03-27 接收日期: 2015-10-28

基金项目: 南昌大学中国中部经济社会发展研究中心招标项目 (15ZBLPS06); 江西高校哲学社会科学研究重大课题攻关项目 (ZDGG02); 教育部哲学社会科学发展报告培育项目 (13JBGP024).

作者简介: 杨丽 (1982–), 女, 山东临沂, 讲师, 主要研究方向: 应用数学.

$q_k^{(e)}(n)$ 是 k-free 数的特征函数. 贺艳峰和孙春丽 [1] 也做了相关研究.

本文主要给出 square-full 数上 $q_k^{(e)}(n)$ $(k \geq 3)$ 的均值估计, 得到

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \text{ is square-full}}} q_k^{(e)}(n) = \sum_{n \leq x} q_k^{(e)}(n) f_2(n)$$

的渐近公式. 即得到下面的定理.

定理 当 $D > 0$ 时, 对 $k \geq 3$, 有

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \text{ is square-full}}} q_k^{(e)}(n) = \frac{\zeta(\frac{3}{2})G(\frac{1}{2})}{\zeta(3)} x^{\frac{1}{2}} + \frac{\zeta(\frac{2}{3})G(\frac{1}{3})}{\zeta(2)} x^{\frac{1}{3}} + O\Big(x^{\frac{1}{6}} \exp\big(-D(\log x)^{\frac{3}{5}}(\log\log x)^{-\frac{1}{5}}\big)\Big),$$

其中 $G(s) = \prod_p \big(1 - \frac{1}{p^{2^k s}} - \frac{1}{p^{(2^k+1)s}} + \frac{1}{p^{(2^k+3)s}} + \frac{1}{p^{(2^k+4)s}} - \frac{1}{p^{(2^k+6)s}} - \frac{1}{p^{(2^k+7)s}} + \cdots\big)$ 在 $\Re s > \frac{1}{8} + \epsilon$ 时绝对收敛.

注 本文中, ϵ 表示一个任意小的的正常数, 在不同的式中不必相同.

2 定理的证明

为了证明定理, 需要以下的一些引理.

引理 1 设 a, b 是整数, 且 $1 \leq a < b$, 定义

$$d(a,b;k) = \sum_{n_1^a n_2^b = k} 1, \quad D(a,b;x) = \sum_{1 \leq k \leq x} d(a,b;k),$$

有

$$D(a,b;x) = \sum_{1 \leq k \leq x} d(a,b;k) = \zeta(\frac{b}{a}) x^{\frac{1}{a}} + \zeta(\frac{a}{b}) x^{\frac{1}{b}} + \triangle(a,b;x),$$

其中

$$\triangle(a,b;x) = -\sum_{n^{a+b} \leq x} \{\psi((\frac{x}{n^b})^{\frac{1}{a}}) + \psi((\frac{x}{n^a})^{\frac{1}{b}})\} + O(1),$$

而且

$$\triangle(a,b;x) \ll \begin{cases} x^{\frac{2}{3a+3b}}, & b < 2a; \\ x^{\frac{2}{9a}} \log x, & b = 2a; \\ x^{\frac{2}{5a+2b}}, & b > 2a. \end{cases}$$

证 本引理的证明见 Ivić 文 [2] 中的第 14.3 节和定理 14.4.

引理 2 假设 $f(n)$ 是算术函数, 满足

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \sum_{j=1}^{l} x^{a_j} P_j(\log x) + O(x^a),$$

$$\sum_{n \leq x} |f(n)| = O(x^{a_1} \log^r x),$$

其中

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_l > 1/c > a \geq 0, r \geq 0, P_1(t), \cdots, P_l(t)$$

是关于 t 的次数不超过 r 的多项式, 并且 $c \geq 1$, $b \geq 1$ 是固定的整数. 如果 $h(n) = \sum\limits_{d^c|n} \mu(d)f(n/d^c)$, 那么

$$\sum_{n\leq x} h(n) = \sum_{j=1}^{l} x^{a_j} R_j(\log x) + E_c(x),$$

其中 $R_1(t), \cdots, R_l(t)$ 是关于 t 的次数不超过 r 的多项式, 并且当 $D > 0$ 时, 有

$$E_c(x) \ll x^{1/c} \exp\Big(\big(-D(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5}\big)\Big).$$

证 见 Ivić 文 [2] 中的定理 14.2.

下面证明本文的定理. 令

$$F(s) := \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ is square-full}}}^{\infty} \frac{q_k^{(e)}(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_k^{(e)}(n) f_2(n)}{n^s} \ \ (\Re s > 1),$$

其中

$$f_2(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ 是 square-full 数;} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

因为 $q_k^{(e)}(n)$ 是可乘函数, 由欧拉乘积可以得到

$$\begin{aligned}
F(s) &= \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ is square-full}}}^{\infty} \frac{q_k^{(e)}(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_k^{(e)}(n) f_2(n)}{n^s} \\
&= \prod_p \Bigg(1 + \frac{q_k^{(e)}(p) f_2(p)}{p^s} + \frac{q_k^{(e)}(p^2) f_2(p^2)}{p^{2s}} + \frac{q_k^{(e)}(p^3) f_2(p^3)}{p^{3s}} \\
&\quad + \cdots + \frac{q_k^{(e)}(p^{2^k-1}) f_2(p^{2^k-1})}{p^{(2^k-1)s}}\Bigg) \\
&= \prod_p \big(1 + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \frac{1}{p^{4s}} + \cdots + \frac{1}{p^{(2^k-1)s}}\Big) \\
&= \zeta(2s) \prod_p \Big(1 + \frac{1}{p^{3s}} - \frac{1}{p^{2^k s}} - \frac{1}{p^{(2^k+1)s}}\Big) \\
&= \zeta(2s)\zeta(3s) \prod_p \Big(1 - \frac{1}{p^{6s}} - \frac{1}{p^{2^k s}} - \frac{1}{p^{(2^k+1)s}} + \frac{1}{p^{(2^k+3)s}} + \frac{1}{p^{(2^k+4)s}}\Big) \\
&= \frac{\zeta(2s)\zeta(3s)}{\zeta(6s)} \prod_p \Big(1 - \frac{1}{p^{2^k s}} - \frac{1}{p^{(2^k+1)s}} + \frac{1}{p^{(2^k+3)s}} \\
&\quad + \frac{1}{p^{(2^k+4)s}} - \frac{1}{p^{(2^k+6)s}} - \frac{1}{p^{(2^k+7)s}} + \cdots\Big) \\
&= \frac{\zeta(2s)\zeta(3s)}{\zeta(6s)} G(s),
\end{aligned}$$

其中

$$G(s)=\prod_{p}\big(1-\frac{1}{p^{2^ks}}-\frac{1}{p^{(2^k+1)s}}+\frac{1}{p^{(2^k+3)s}}+\frac{1}{p^{(2^k+4)s}}-\frac{1}{p^{(2^k+6)s}}-\frac{1}{p^{(2^k+7)s}}+\cdots\big).$$

显然, 对于 $k\geq 3$, 当 $\Re s>\frac{1}{8}+\epsilon$ 时, $G(s)$ 绝对收敛.

根据卷积原理 [3], 定义

$$H(s):=\zeta(2s)\zeta(3s)G(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{n=ml}d(2,3;m)g(l)}{n^s}\quad(\Re s>1),$$

其中 $h(n)=\sum\limits_{n=ml}d(2,3;m)g(l)$. 那么可以得到

$$\sum_{n\leq x}h(n)=\sum_{ml\leq x}d(2,3;m)g(l)=\sum_{l\leq x}g(l)\sum_{m\leq\frac{x}{l}}d(2,3;m).$$

由引理 1 得到

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}d(2,3;n)&=\zeta(\frac{3}{2})x^{\frac{1}{2}}+\zeta(\frac{2}{3})x^{\frac{1}{3}}+\Delta(2,3;x)\\&=\zeta(\frac{3}{2})x^{\frac{1}{2}}+\zeta(\frac{2}{3})x^{\frac{1}{3}}+O(x^{\frac{2}{15}}).\end{aligned}$$

很容易得到

$$\sum_{n\leq x}|h(n)|\ll\sum_{l\leq x}|g(l)|\sum_{m\leq\frac{x}{l}}d(2,3;m)\ll x^{\frac{1}{2}},\tag{2.1}$$

而且有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}h(n)&=\sum_{l\leq x}g(l)\Big[\zeta(\frac{3}{2})(\frac{x}{l})^{\frac{1}{2}}+\zeta(\frac{2}{3})(\frac{x}{l})^{\frac{1}{3}}+O\big((\frac{x}{l})^{\frac{2}{15}}\big)\Big]\\&=\zeta(\frac{3}{2})x^{\frac{1}{2}}\sum_{l\leq x}\frac{g(l)}{l^{1/2}}+\zeta(\frac{2}{3})x^{\frac{1}{3}}\sum_{l\leq x}\frac{g(l)}{l^{1/3}}+O(x^{\frac{2}{15}}\sum_{l\leq x}\frac{|g(l)|}{l^{2/15}})\\&=\zeta(\frac{3}{2})x^{\frac{1}{2}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{g(l)}{l^{1/2}}+\zeta(\frac{2}{3})x^{\frac{1}{3}}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{g(l)}{l^{1/3}}+O(x^{\frac{1}{2}}\sum_{l>x}\frac{|g(l)|}{l^{1/2}})\\&\quad+O(x^{\frac{1}{3}}\sum_{l>x}\frac{|g(l)|}{l^{1/3}})+O(x^{\frac{2}{15}}\sum_{l\leq x}\frac{|g(l)|}{l^{2/15}}).\end{aligned}$$

又由 $G(s)$ 在 $\sigma>\frac{1}{8}+\epsilon$ 时绝对收敛, 则可设

$$M(l):=\sum_{t\leq l}|g(t)|\ll x^{\frac{1}{8}},$$

根据 Abel 分部求和得到

$$\begin{aligned}x^{\frac{1}{2}}\sum_{l>x}\frac{|g(l)|}{l^{1/2}}&=x^{\frac{1}{2}}\int_{x}^{\infty}l^{-\frac{1}{2}}d\big(M(l)\big)\\&=x^{\frac{1}{2}}\big(l^{-\frac{1}{2}}M(l)\big)\Big|_{x}^{\infty}+x^{\frac{1}{2}}\int_{x}^{\infty}M(l)d\big(l^{-\frac{1}{2}}\big)\\&\ll x^{\frac{1}{8}},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x^{\frac{1}{3}}\sum_{l>x}\frac{|g(l)|}{l^{1/3}} &= x^{\frac{1}{3}}\int_x^{\infty} l^{-\frac{1}{3}}d\big(M(l)\big)\\
&= x^{\frac{1}{3}}\big(l^{-\frac{1}{3}}M(l)\big)\Big|_x^{\infty} + x^{\frac{1}{3}}\int_x^{\infty} M(l)d\big(l^{-\frac{1}{3}}\big)\\
&\ll x^{\frac{1}{8}},\\
x^{\frac{2}{15}}\sum_{l\le x}\frac{|g(l)|}{l^{2/15}} &= x^{\frac{2}{15}}\int_1^{x} l^{-\frac{2}{15}}d\big(M(l)\big)\\
&= x^{\frac{2}{15}}\big(l^{-\frac{2}{15}}M(l)\big)\Big|_1^{x} + x^{\frac{2}{15}}\int_1^{x} M(l)d\big(l^{-\frac{2}{15}}\big)\\
&\ll x^{\frac{1}{8}},
\end{aligned}
$$

从而由 $G(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{n^s}$, 有

$$
\sum_{n\le x}h(n)=\zeta(\frac{3}{2})G(\frac{1}{2})x^{\frac{1}{2}}+\zeta(\frac{2}{3})G(\frac{1}{3})x^{\frac{1}{3}}+O(x^{\frac{1}{8}}). \tag{2.2}
$$

由于

$$
F(s)=\frac{H(s)}{\zeta(6s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h(m)}{m^s}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^{6s}},
$$

所以当 n 是 square-full 数时, 有

$$
q_k^{(e)}(n)=\sum_{n=md^6}h(m)\mu(d). \tag{2.3}
$$

再由 Perron 公式 [3] 可以得到

$$
\sum_{\substack{n\le x\\ n\ \text{is square-full}}} q_k^{(e)}(n)=(2\pi i)^{-1}\int_{1+\frac{1}{\log x}-iT}^{1+\frac{1}{\log x}+iT}\frac{\zeta(2s)\zeta(3s)}{\zeta(6s)}G(s)\frac{x^s}{x}ds+O(\frac{x\log^2 x}{T}).
$$

取 $T=x$, 并将积分线平移至 $\sigma=-\frac{1}{2}$, 则在 $s=\frac{1}{2},\ s=\frac{1}{3}$ 处的留数分别为

$$
\frac{\zeta(\frac{3}{2})G(\frac{1}{2})}{\zeta(3)}x^{\frac{1}{2}},\quad \frac{\zeta(\frac{2}{3})G(\frac{1}{3})}{\zeta(2)}x^{\frac{1}{3}}.
$$

再由 (2.1)、(2.2)、(2.3) 式和引理 2, 可以得到

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{n\le x\\ n\ \text{is square-full}}} q_k^{(e)}(n) \quad = \quad & \frac{\zeta(\frac{3}{2})G(\frac{1}{2})}{\zeta(3)}x^{\frac{1}{2}}+\frac{\zeta(\frac{2}{3})G(\frac{1}{3})}{\zeta(2)}x^{\frac{1}{3}}\\
&+O\Big(x^{\frac{1}{6}}\exp\big(-D(\log x)^{\frac{3}{5}}(\log\log x)^{-\frac{1}{5}}\big)\Big),
\end{aligned}
$$

其中 $D>0$, 并且 $G(s)$ 当 $\Re s>\frac{1}{8}+\epsilon$ 时是绝对收敛的.

这样就得到了本文的定理.

参 考 文 献

[1] 贺艳峰, 孙春丽. 奇完全数的两个性质 [J]. 数学杂志, 2015, 35(1): 135–140.

[2] Ivić A. The Riemann Zeta function[M]. New York: Wiley, 1985.

[3] Subbarao M. V. On some arithmetic convolutions[J].The. Arith. Funct., 1972, 251: 247–271.

[4] Titchmarsh E. C. The theory of the Riemann Zeta-function[M]. Oxford: Oxford University Press, 1986.

[5] Tóth L. On certain arithmetic functions involving exponential divisors[J]. Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp., 2004, 24: 285–294.

[6] Tóth L. On certain arithmetic function involing exponential divisors II[J]. Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp., 2007, 27: 155–156.

THE MEAN VALUE OF FUNCTION $q_k^{(e)}(n)$ OVER SQUARE-FULL NUMBER

YANG Li[1,2,3], FU Chun[3]

(*1.School of Management, Nanchang University, Nanchang 330031,China*)

(*2.School of Mathematics, Nanchang University, Nanchang 330031,China*)

(*3.Center for Central China Economic Development Research, Nanchang University, Nanchang 330031, China*)

Abstract: In this paper, we study the mean value of the characteristic function $q_k^{(e)}(n)$ of k-free over square-full number. By using the property of Riemann-Zeta function and residue theorem, we obtain the asymptotic formula of the mean value, which is the generalization of $q_k^{(e)}(n)$ over integers.

Keywords: square-full number; residue theorem; divisor problem; Dirichlet convolution; mean value

2010 MR Subject Classification: 11E45