Vol. 37 (2017)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

非线性耦合 KdV 方程组的一种新求解法

伊丽娜, 套格图桑
(内蒙古师范大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特 010022)

摘 要: 本文研究了构造非线性耦合 KdV 方程组的无穷序列复合型新解的问题. 利用函数变换与辅助方程相结合的方法, 获得了非线性耦合 KdV 方程组的自由 Riemann θ 函数、Jacobi 椭圆函数、双曲函数和三角函数两两组合的无穷序列复合型新解. 这些解包括了双弧子解、双周期解和弧子解与周期解复合的解.

关键词: 非线性耦合 KdV 方程组; 函数变换; 非线性叠加公式; 无穷序列复合型新解
MR(2010) **主题分类号**: 35B10; 35Q51 **中图分类号**: O175.2
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2017)04-0823-10

1 引言

孤立子理论中研究了 KdV 方程

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xxx} = 0 \tag{1}$$

的求解问题, 并获得了许多新成果 [1−6], 这里 α 是常数.

文献 [7] 利用延拓结构理论, 研究了 KdV 方程组

$$u_t + 4uu_x - u_{xxx} + 4vv_x + 4(uv)_x = 0, \tag{2}$$

$$v_t + 4vv_x - v_{xxx} + 4uu_x + 4(uv)_x = 0 \tag{3}$$

的延拓结构问题, 获得了新结果.

当方程 (2) 中取 $v = v(x,t) = 0$ (或方程 (3) 中取 $u = u(x,t) = 0$) 时, 获得 KdV 方程.

文献 [8] 用达布变换法, 构造了 KdV 方程组

$$u_t + 6vv_x - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{4}$$

$$v_t - 6uv_x - 6vu_x + v_{xxx} = 0 \tag{5}$$

的由双曲函数和三角函数组合的多孤子新解.

文献 [9] 用辅助方程法和 Painlevé分析法, 研究了 KdV 方程组

$$u_t + \gamma_1 vu_x + \left(\gamma_2 v^2 + \gamma_3 uv + \gamma_4 u_{xx} + \gamma_5 u^2\right)_x = 0, \tag{6}$$

*收稿日期: 2016-01-05 接收日期: 2016-08-23
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11361040); 内蒙古自治区高等学校科学研究基金资助 (NJZY16180); 内蒙古自治区自然科学基金资助 (2015MS0128); 内蒙古自治区 2016 年硕士研究生科研创新项目 (S20161013502); 内蒙古师范大学硕士研究生科研创新基金项目 (CXJJS16081).
作者简介: 伊丽娜 (1991–), 女, 蒙古族, 内蒙古通辽, 硕士, 主要研究方向: 复杂系统的稳定与控制.

$$v_t+\delta_1 v u_x+\left(\delta_2 u^2+\delta_3 uv+\delta_4 v_{xx}+\delta_5 v^2\right)_x=0 \tag{7}$$

的可积性, 并获得了由双曲函数和三角函数组合的多孤子新解. 另外, 用第一种椭圆方程, 获得了 Jacobi 椭圆函数单孤子新解, 这里 γ_i 和 δ_j $(i=j=1,2,3,4,5)$ 是常数.

本文用辅助方程法 [10−23], 研究了非线性耦合 KdV 方程组

$$u_t+\alpha_1 u u_x-\alpha_2 u_{xxx}+\alpha_3 v v_x+\alpha_4 (uv)_x=0, \tag{8}$$

$$v_t+\beta_1 v v_x-\beta_2 v_{xxx}+\beta_3 u u_x+\beta_4 (uv)_x=0 \tag{9}$$

的求解问题, 通过三个步骤, 构造了非线性耦合 KdV 方程组的无穷序列复合型新解, 这里 α_i 和 β_j $(i=j=1,2,3,4)$ 是常数.

步骤一, 给出一种函数变换, 把非线性耦合 KdV 方程组的求解问题转化为两种非线性常微分方程的求解问题; 步骤二, 给出两种非线性常微分方程的新解、Bäcklund 变换和解的非线性叠加公式; 步骤三, 利用两种非线性常微分方程的相关结论, 构造了非线性耦合 KdV 方程组的无穷序列复合型新解, 这里包括了 Riemann θ 函数、Jacobi 椭圆函数、双曲函数和三角函数组合的双孤子解、双周期解和孤子解与周期解复合的解.

2 KdV 方程组 (8), (9) 的无穷序列复合型新解

2.1 KdV 方程组 (8), (9) 与函数变换

通过函数变换

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[P(\xi)+Q(\eta)\right]=\frac{1}{2}\left[P(\lambda x+\nu t)+Q(\mu x+\omega t)\right], \tag{10}$$

$$v(x,t)=\frac{1}{2}\left[P(\xi)-Q(\eta)\right]=\frac{1}{2}\left[P(\lambda x+\nu t)-Q(\mu x+\omega t)\right]. \tag{11}$$

将 KdV 方程组 (8), (9) 的求解问题转化为两个非线性常微分方程的求解问题, 这里 λ,μ,ν 和 ω 是待定常数, 而且 $\lambda\neq\mu,\nu\neq\omega$.

定理 1 当 $\beta_1=\beta_4,\beta_3=\beta_4,\alpha_3=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2,\alpha_4=\alpha_1,\beta_4=\alpha_1$ 和 $\beta_4=\alpha_4$ 时, 通过函数变换 (10) 和 (11), 将 KdV 方程组 (8), (9) 的求解问题化为如下两个非线性常微分方程的求解问题

$$\frac{d^3P(\xi)}{d\xi^3}=P'''(\xi)=\frac{1}{\lambda^3\alpha_2}\left[\nu+2\lambda\alpha_1 P(\xi)\right]P'(\xi), \tag{12}$$

$$\frac{d^3Q(\eta)}{d\eta^3}=Q'''(\eta)=\frac{\omega Q'(\eta)}{\mu^3\alpha_2}. \tag{13}$$

方程 (12) 和 (13) 可写作

$$\left(\frac{dP(\xi)}{d\xi}\right)^2=\left(P'(\xi)\right)^2=2c_1+2c_0P(\xi)+\frac{\nu}{\lambda^3\alpha_2}P^2(\xi)+\frac{2\alpha_1}{3\lambda^2\alpha_2}P^3(\xi), \tag{14}$$

$$\left(\frac{dQ(\eta)}{d\eta}\right)^2=\left(Q'(\eta)\right)^2=2c_2+2c_3Q(\eta)+\frac{\omega}{\mu^3\alpha_2}Q^2(\eta), \tag{15}$$

这里 c_0,c_1,c_2 和 c_3 是任意常数.

证 当 $\beta_1=\beta_4, \beta_3=\beta_4, \alpha_3=\alpha_1, \beta_2=\alpha_2, \alpha_4=\alpha_1, \beta_4=\alpha_1$ 和 $\beta_4=\alpha_4$ 时, 将函数变换 (10) 和 (11) 代入 KdV 方程组 (8), (9) 后获得非线性常微分方程 (12), (13).

推论 1 在定理 1 的条件下, 若 $\mu=\lambda, \nu=\omega$, 则常微分方程 (14) 和 (15) 转化 $\xi=\eta=\lambda x+\omega t$ 为变量的不同常微分方程.

定理 2 当 $\beta_3=\alpha_4, \alpha_3=\alpha_1, \beta_2=\alpha_2, \beta_4=\alpha_1, \beta_1=\alpha_4$ 时, 通过函数变换 (10) 和 (11), 将 KdV 方程组 (8), (9) 的求解问题化为如下两个非线性常微分方程的求解问题.

$$\frac{d^3P(\xi)}{d\xi^3}=P'''(\xi)=\frac{1}{\lambda^3\alpha_2}\big[\nu+\lambda(\alpha_4+\alpha_1)P(\xi)\big]P'(\xi), \tag{16}$$

$$\frac{d^3Q(\eta)}{d\eta^3}=Q'''(\eta)=\frac{1}{\mu^3\alpha_2}\big[\omega+\mu(\alpha_1-\alpha_4)Q(\eta)\big]Q'(\eta). \tag{17}$$

方程 (16) 和 (17) 可写作

$$\left(\frac{dP(\xi)}{d\xi}\right)^2=\big(P'(\xi)\big)^2=2m_1+2m_0P(\xi)+\frac{\nu}{\lambda^3\alpha_2}P^2(\xi)+\frac{\alpha_4+\alpha_1}{3\lambda^2\alpha_2}P^3(\xi), \tag{18}$$

$$\left(\frac{dQ(\eta)}{d\eta}\right)^2=\big(Q'(\eta)\big)^2=2m_3+2m_2Q(\eta)+\frac{\omega}{\mu^3\alpha_2}Q^2(\eta)+\frac{\alpha_1-\alpha_4}{3\mu^2\alpha_2}Q^3(\eta), \tag{19}$$

这里 m_0, m_1, m_2 和 m_3 是任意常数.

证 当 $\beta_3=\alpha_4, \alpha_3=\alpha_1, \beta_2=\alpha_2, \beta_4=\alpha_1, \beta_1=\alpha_4$ 时, 将函数变换 (10) 和 (11) 代入 KdV 方程组 (8), (9) 后获得非线性常微分方程 (16), (17).

推论 2 在定理 2 的条件下, 若 $\mu=\lambda, \nu=\omega, m_0\neq m_2, m_1\neq m_3$, 则常微分方程 (18) 和 (19) 转化 $\xi=\eta=\lambda x+\omega t$ 为变量的不同常微分方程.

2.2 非线性常微分方程 (18) 的 Bäcklund 变换与解

下面给出第一种椭圆方程 (20) 与非线性常微分方程 (18) 的拟 Bäcklund 变换

$$\big(z'(\xi)\big)^2=\left(\frac{dz(\xi)}{d\xi}\right)^2=a+bz^2(\xi)+cz^4(\xi), \tag{20}$$

这里 a, b 和 c 是常数.

定理 3 当非线性常微分方程 (18) 与第一种椭圆方程 (20) 的系数满足关系

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_4+\alpha_1}{3\lambda^2\alpha_2} &= \frac{1}{\Delta_1}(-bf+\sqrt{\Delta_0f^2})(-bfg+\sqrt{\Delta_0f^2}g+2afh)\sqrt{\Delta_0f^2},\\
\frac{\nu}{\lambda^3\alpha_2} &= \frac{1}{\Delta_2}\big[b^3fg^2-b^2g(\sqrt{\Delta_0f^2}g-4afh)+6a(cg^2+ah^2)\sqrt{\Delta_0f^2}\\
&\quad -4b[a^2fh^2+ag(2cfg+\sqrt{\Delta_0f^2}h)]\big],\\
2m_0 &= \frac{2a}{\Delta_3}\big[-2c\sqrt{\Delta_0f^2}g^3-b^2fg^2h+4a^2fh^3+bg[2cfg^2+h(\sqrt{\Delta_0f^2}g-2afh)]\big],\\
2m_1 &= \frac{2a(cg^2-ah^2)}{\Delta_4}[-b^2fg^2+b\sqrt{\Delta_0f^2}g^2+2af(cg^2+ah^2)]
\end{aligned}$$

时, 两种非线性常微分方程 (18) 和 (20) 之间存在如下拟 Bäcklund 变换

$$P(\xi)=\frac{2a[g\mp\Delta_5 z(\xi)+hz^2(\xi)]}{2af+(bf-\Delta_0)z^2(\xi)},\tag{21}$$

这里

$$\begin{aligned}
&\Delta_1=f\big[b^2fg^2-bg(\sqrt{\Delta_0f^2}g+2afh)+2a[-cfg^2+h(\sqrt{\Delta_0f^2}g+afh)]\big],\\
&\Delta_2=b^2fg^2-bg(\sqrt{\Delta_0f^2}g+2afh)+2a[-cfg^2+h(\sqrt{\Delta_0f^2}g+afh)],\\
&\Delta_3=f\big[b^2fg^2-bg(\sqrt{\Delta_0f^2}g+2afh)+2a[-cfg^2+h(\sqrt{\Delta_0f^2}g+afh)]\big],\\
&\Delta_4=f(bf-\sqrt{\Delta_0f^2})\big[b^2fg^2-bg(\sqrt{\Delta_0f^2}g+2afh)+2a[-cfg^2+h(\sqrt{\Delta_0f^2}g+afh)]\big],\\
&\Delta_5^2=\frac{1}{a(\Delta_0-bf)}[b^2fg^2-bg(\Delta_0g+2afh)+2a(-cfg^2+\Delta_0gh+afh^2)],\\
&\Delta_0=b^2-4ac,
\end{aligned}$$

f,g 和 h 是非零任意常数.

证 在定理 3 的条件下, 将第一种椭圆方程 (20) 和关系 (21) 代入非线性常微分方程 (18) 获得恒等式.

推论 3 当

$$a=A^2\vartheta^2,b=-(1+k^2)\vartheta^2,c=\frac{k^2\vartheta^2}{A^2}$$

时, 将第一种椭圆方程 (20) 的解

$$z(\xi)=A\mathrm{sn}(\vartheta\xi,k),\tag{22}$$

代入 Bäcklund 变换 (21) 可得到非线性常微分方程 (18) 的如下解

$$P(\xi)=\frac{-2\vartheta^2\big[g\Omega_1+A[\mp\sqrt{\frac{1}{A^2}\Omega_2}+Ah\Omega_1\mathrm{sn}(\vartheta\xi,k)]\mathrm{sn}(\vartheta\xi,k)\big]}{\Omega_1\big[-2f\vartheta^2+[f(1+k^2)\vartheta^2+\Omega_0]\mathrm{sn}^2(\vartheta\xi,k)\big]}\quad(0\le k\le 1),\tag{23}$$

这里

$$\begin{aligned}
&\Omega_1=\sqrt{f(1+k^2)\vartheta^2+\Omega_0},\\
&\Omega_2=f[2A^4h^2+2A^2gh(1+k^2)+g^2(1+k^4)]\vartheta^2+g(g+2A^2h+gk^2)\Omega_0,\\
&\Omega_0=\sqrt{f^2(-1+k^2)^2\vartheta^4},
\end{aligned}$$

A,ϑ,f,g 和 h 是非零任意常数.

用第一种椭圆方程 (20) 的 $A\mathrm{cn}(\vartheta\xi,k),A\mathrm{dn}(\vartheta\xi,k)$ 等解与 Bäcklund 变换等相关结论 [20−23], 通过定理 3, 可获得非线性常微分方程 (18) 的无穷序列新解. 这些解包括光滑解和紧孤立子解.

推论 4 在定理 3 的条件下, 当 $k=1$ (或 $k=0$) 时, 通过拟 Bäcklund 变换 (21), 可以获得非线性常微分方程 (18) 的双曲函数和三角函数无穷序列解.

当 $k=1$ 时, 将

$$A\mathrm{sn}(\vartheta\xi,k)=A\tanh(\vartheta\xi),A\mathrm{cn}(\vartheta\xi,k)=A\mathrm{sech}(\vartheta\xi),A\mathrm{dn}(\vartheta\xi,k)=A\mathrm{sech}(\vartheta\xi)$$

分别代入拟 Bäcklund 变换 (21) 可得到非线性常微分方程 (18) 的纽状孤波解和钟状孤波解.

当 $k=0$ 时, 将

$$A\mathrm{sn}(\vartheta\xi,k)=A\sin(\vartheta\xi), A\mathrm{cn}(\vartheta\xi,k)=A\cos(\vartheta\xi)$$

分别代入拟 Bäcklund 变换 (21) 可得到非线性常微分方程 (18) 的奇异三角函数周期解和三角函数周期解.

非线性常微分方程 (14) (或 (19)) 与第一种椭圆方程 (20) 之间也存在拟 Bäcklund 变换 (这里未讨论).

2.3 KdV 方程组 (8), (9) 的无穷序列复合型新解

将非线性常微分方程 (14) 和 (15) (或 (18) 和 (19)) 的无穷序列新解分别代入公式

$$\begin{cases} u_{mn}(x,t)=\frac{1}{2}\big[P_m(\xi)+Q_n(\eta)\big]=\frac{1}{2}\big[P_m(\lambda x+\nu t)+Q_n(\mu x+\omega t)\big] \quad (\lambda\neq\mu,\nu\neq\omega), \\ v_{mn}(x,t)=\frac{1}{2}\big[P_m(\xi)-Q_n(\eta)\big]=\frac{1}{2}\big[P_m(\lambda x+\nu t)-Q_n(\mu x+\omega t)\big] \quad (\lambda\neq\mu,\nu\neq\omega). \end{cases} \tag{24}$$

即可得到 KdV 方程组 (8), (9) 的无穷序列复合型新解. 这里 $P_m(\xi)$ 和 $Q_n(\eta)$ 由 (14) 和 (15) (或 (18) 和 (19)) 来确定.

2.3.1 当 $m_0m_1m_2m_3\neq 0$ 时, 构造 KdV 方程组 (8), (9) 的无穷序列复合型新解

当非线性常微分方程 (18) 的系数 $2m_1, 2m_0, \frac{\nu}{\lambda^3\alpha_2}$ 和 $\frac{\alpha_4+\alpha_1}{3\lambda^2\alpha_2}$ 满足定理 3 的条件时, 通过叠加公式

$$\begin{cases} P_m(\xi)=\frac{2a[g\mp\Delta_5 z_m(\xi)+hz_m^2(\xi)]}{2af+(bf-\Delta_0)z_m^2(\xi)} \quad (m=1,2,\cdots), \\ z_m(\xi)=\left[\frac{a\left[-bl\mp\sqrt{(b^2-4ac)l^2}-2clz_{m-1}^2(\xi)\right]}{c\left[2al\pm[\pm bl+\sqrt{(b^2-4ac)l^2}]z_{m-1}^2(\xi)\right]}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (m=1,2,\cdots), \\ z_0(\xi)=\frac{\theta_1(\xi)}{\theta_3(\xi)}, a=\theta_4^2(0)\theta_2^2(0), b=\theta_2^4(0)-\theta_4^4(0), c=-\theta_4^2(0)\theta_2^2(0), \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} P_m(\xi)=\frac{2a[g\mp\Delta_5 z_m(\xi)+hz_m^2(\xi)]}{2af+(bf-\Delta_0)z_m^2(\xi)} \quad (m=1,2,\cdots), \\ z_m(\xi)=\left[\frac{a\left[-bl\mp\sqrt{(b^2-4ac)l^2}-2clz_{m-1}^2(\xi)\right]}{c\left[2al\pm[\pm bl+\sqrt{(b^2-4ac)l^2}]z_{m-1}^2(\xi)\right]}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (m=1,2,\cdots), \\ z_0(\xi)=A\mathrm{sn}(\vartheta\xi,k), a=A^2\vartheta^2, b=-(1+k^2)\vartheta^2, c=\frac{k^2\vartheta^2}{A^2}. \end{cases} \tag{26}$$

即可获得非线性常微分方程 (18) 的 Riemann θ 函数与 Jacobi 椭圆函数无穷序列新解.

当非线性常微分方程 (19) 与第一种椭圆方程 (20) 的系数 $\frac{\alpha_1-\alpha_4}{3\mu^2\alpha_2}, \frac{\omega}{\mu^3\alpha_2}, 2m_2, 2m_3, a, b$ 和 c, 满足关系式

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1-\alpha_4}{3\mu^2\alpha_2} &= \frac{1}{\Delta_1}\sqrt{\Delta_0 f^2}(-bf+\sqrt{\Delta_0 f^2})(-bfg+\sqrt{\Delta_0 f^2}g+2afh), \\ \frac{\omega}{\mu^3\alpha_2} &= \frac{1}{\Delta_2}\big[b^3fg^2-b^2g(\sqrt{\Delta_0 f^2}g-4afh)+6a\sqrt{\Delta_0 f^2}(cg^2+ah^2) \\ &\quad -4b[a^2fh^2+ag(2cfg+\sqrt{\Delta_0 f^2}h)]\big], \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2m_2 &= \frac{2a}{\Delta_3}\big[-2c\sqrt{\Delta_0 f^2}g^3 - b^2fg^2h + 4a^2fh^3 + bg[2cfg^2 + h(\sqrt{\Delta_0 f^2}g - 2afh)]\big],\\
2m_3 &= \frac{2a(cg^2-ah^2)}{\Delta_4}[-b^2fg^2 + b\sqrt{\Delta_0 f^2}g^2 + 2af(cg^2+ah^2)]
\end{aligned}
$$

时, 通过叠加公式

$$
\left\{\begin{array}{l}
Q_n(\eta) = \frac{2a[g\mp\Delta_5 z_n(\eta)+hz_n^2(\eta)]}{2af+(bf-\Delta_0)z_n^2(\eta)} \quad (n=1,2,\cdots),\\
z_n(\eta) = \left[\frac{a\left[-bl\mp\sqrt{(b^2-4ac)l^2}-2clz_{n-1}^2(\eta)\right]}{c\left[2al\pm[\pm bl+\sqrt{(b^2-4ac)l^2}]z_{n-1}^2(\eta)\right]}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (n=1,2,\cdots),\\
z_0(\eta) = \frac{\theta_1(\eta)}{\theta_4(\eta)}, a_1 = \theta_3^2(0)\theta_2^2(0), b_1 = -\big(\theta_2^4(0)+\theta_3^4(0)\big), c_1 = \theta_3^2(0)\theta_2^2(0),
\end{array}\right. \tag{27}
$$

$$
\left\{\begin{array}{l}
Q_n(\eta) = \frac{2a[g\mp\Delta_5 z_n(\eta)+hz_n^2(\eta)]}{2af+(bf-\Delta_0)z_n^2(\eta)} \quad (n=1,2,\cdots),\\
z_n(\eta) = \left[\frac{a\left[-bl\mp\sqrt{(b^2-4ac)l^2}-2clz_{n-1}^2(\eta)\right]}{c\left[2al\pm[\pm bl+\sqrt{(b^2-4ac)l^2}]z_{n-1}^2(\eta)\right]}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (n=1,2,\cdots),\\
z_0(\eta) = A\mathrm{sn}(\vartheta\eta,k), a = A^2\vartheta^2, b = -(1+k^2)\vartheta^2, c = \frac{k^2\vartheta^2}{A^2}
\end{array}\right. \tag{28}
$$

可获得非线性常微分方程 (15) 的 Riemann θ 函数与 Jacobi 椭圆函数无穷序列新解, 这里 $\Delta_j\ (j=0,1,2,3,4,5)$ 由定理 3 来确定.A,ϑ,l,f,g 和 h 是非零任意常数.

结论 1 获得两个 Riemann θ 函数组合的复合型双周期新解.

将通过叠加公式 (25),(27) 获得的无穷序列解, 分别代入公式 (24) 后即可得到 KdV 方程组的两个 Riemann θ 函数组合的复合型双周期新解.

结论 2 获得 Riemann θ 函数与 Jacobi 椭圆函数组合的复合型双周期新解.

将通过叠加公式 (25) 与 (28) 确定的无穷序列解, 代入公式 (24) 后即可得到 KdV 方程组的 Riemann θ 函数与 Jacobi 椭圆函数组合的复合型双周期新解.

结论 3 获得两个 Jacobi 椭圆函数组合的复合型双周期新解.

将通过叠加公式 (26) 与 (28) 确定的无穷序列解, 代入公式 (24) 后即可得到 KdV 方程组的两个 Jacobi 椭圆函数组合的复合型双周期新解.

2.3.2 当 $m_0m_1\neq 0, m_2=0, m_3=0$ 时, 构造 KdV 方程组 (8), (9) 的无穷序列复合型新解

当 $m_0m_1\neq 0, m_2=0, m_3=0$ 时, 可以获得 KdV 方程组 (8), (9) 的如下无穷序列复合型新解 (限于篇幅, 叠加公式未列出).

结论 1 获得 Riemann θ 函数型周期解与指数函数孤子解组合的无穷序列复合型新解.

结论 2 获得 Jacobi 椭圆函数型周期解与指数函数孤子解组合的无穷序列复合型新解.

结论 3 获得两个指数函数组合的无穷序列复合型双孤子新解.

结论 4 获得指数函数型孤子解与三角函数周期解组合的无穷序列复合型新解.

结论 5 获得 Riemann θ 函数与三角函数组合的无穷序列复合型双周期新解.

结论 6 获得 Jacobi 椭圆函数与三角函数组合的无穷序列复合型双周期新解.

结论 7 获得两个三角函数组合的无穷序列复合型双周期新解.

2.3.3 其他情况下, 构造 KdV 方程组 (8), (9) 的无穷序列复合型新解

在下面几种情况下, 用定理 1–3 的结论, 获得 KdV 方程组的无穷序列复合型新解. 这里包括双孤子解、双周期解以及孤子解与周期解组合的复合型新解.

定理 4 当 $m_1m_0m_2 \neq 0, m_3 = 0$ (或 $m_0m_2 \neq 0, m_1 = 0, m_3 = 0$) 时, 获得 KdV 方程组 (8), (9) 的由 Riemann θ 函数、Jacobi 椭圆函数、指数函数和三角函数两两组合的无穷序列复合型新解.

定理 5 当 $m_1 = 0, m_2 = 0, m_3 = 0, m_0 \neq 0$ 时, 获得 KdV 方程组 (4), (5) 的由 Riemann θ 函数、Jacobi 椭圆函数、指数函数和三角函数两两组合的无穷序列复合型新解.

定理 6 当 $m_0 = 0, m_1 = 0, m_2 = 0, m_3 = 0$ 时, 获得 KdV 方程组 (8), (9) 的由指数函数和三角函数两两组合的无穷序列复合型新解.

定理 7 常微分方程

$$\Big(y'(\xi)\Big)^2 = \Big(\frac{dy(\xi)}{d\xi}\Big)^2 = Cy^2(\xi) + By^3(\xi), \tag{29}$$

通过函数变换

$$y(\xi) = \left(\frac{C - 4x^2(\xi)}{4\sqrt{B}x(\xi)}\right)^2, \tag{30}$$

可化为 Riccati 方程

$$\frac{dx(\xi)}{d\xi} = x'(\xi) = \epsilon\Big(x^2(\xi) - \frac{1}{4}C\Big) \quad (\epsilon = \pm\frac{1}{2}). \tag{31}$$

根据 Riccati 方程的 Bäcklund 变换与解的非线性叠加公式等结论 [21–23], 可以获得 Riccati 方程 (31) 的无穷序列解, 这里包括纽状孤波解、奇异解、三角函数周期解和奇异三角函数周期解.

当

$$m_0 = 0, m_1 = 0, L = \frac{1}{2}, R = -\frac{1}{8}C, C = \frac{\nu}{\lambda^3\alpha_2}, B = \frac{\alpha_4 + \alpha_1}{3\lambda^2\alpha_2}$$

时, 通过下列叠加公式

$$\begin{cases} P_m(\xi) = \left(\frac{C - 4x_m^2(\xi)}{4\sqrt{B}x_m(\xi)}\right)^2 \quad (m = 1, 2, \cdots), \\ x_m(\xi) = \frac{-RN_0 + (2LM_0 - 2RK_0)x_{m-1}(\xi) + N_0Lx_{m-1}^2(\xi) \mp \Theta x'_{m-1}(\xi)}{2L\Big[M_0 + RH_0 + [N_0 + (K_0 + LH_0)x_{m-1}(\xi)]x_{m-1}(\xi)\Big]} \quad (m = 1, 2, \cdots), \\ x_0(\xi) = -\frac{1}{L}\sqrt{-LR}\tanh(\sqrt{-LR}\xi) \quad (LR < 0), \end{cases} \tag{32}$$

$$\begin{cases} P_m(\xi) = \left(\frac{C - 4x_m^2(\xi)}{4\sqrt{B}x_m(\xi)}\right)^2 \quad (m = 1, 2, \cdots), \\ x_m(\xi) = \frac{-RN_0 + (2LM_0 - 2RK_0)x_{m-1}(\xi) + N_0Lx_{m-1}^2(\xi) \mp \Theta x'_{m-1}(\xi)}{2L\Big[M_0 + RH_0 + [N_0 + (K_0 + LH_0)x_{m-1}(\xi)]x_{m-1}(\xi)\Big]} \quad (m = 1, 2, \cdots), \\ x_0(\xi) = \frac{1}{L}\sqrt{LR}\tan(\sqrt{LR}\xi) \quad (LR > 0). \end{cases} \tag{33}$$

即可获得常微分方程 (18) 的纽状孤波解和三角函数周期解.

当

$$m_2 = 0, m_3 = 0, L = \frac{1}{2}, R = -\frac{1}{8}C, C = \frac{\omega}{\mu^3\alpha_2}, B = \frac{\alpha_1 - \alpha_4}{3\mu^2\alpha_2}$$

时, 通过下列叠加公式

$$\begin{cases} Q_n(\eta)=\left(\frac{C-4x_n^2(\eta)}{4\sqrt{B}x_n(\eta)}\right)^2 \quad (n=1,2,\cdots), \\ x_n(\eta)=\frac{-RN_0+(2LM_0-2RK_0)x_{n-1}(\eta)+N_0Lx_{n-1}^2(\eta)\mp\Theta x_{n-1}'(\eta)}{2L\left[M_0+RH_0+[N_0+(K_0+LH_0)x_{n-1}(\eta)]x_{n-1}(\eta)\right]} \quad (n=1,2,\cdots), \\ x_0(\eta)=-\frac{1}{L}\sqrt{-LR}\tanh(\sqrt{-LR}\eta) \quad (LR<0), \end{cases} \tag{34}$$

$$\begin{cases} Q_n(\eta)=\left(\frac{C-4x_n^2(\eta)}{4\sqrt{B}x_n(\eta)}\right)^2 \quad (n=1,2,\cdots), \\ x_n(\eta)=\frac{-RN_0+(2LM_0-2RK_0)x_{n-1}(\eta)+N_0Lx_{n-1}^2(\eta)\mp\Theta x_{n-1}'(\eta)}{2L\left[M_0+RH_0+[N_0+(K_0+LH_0)x_{n-1}(\eta)]x_{n-1}(\eta)\right]} \quad (n=1,2,\cdots), \\ x_0(\eta)=\frac{1}{L}\sqrt{LR}\tan(\sqrt{LR}\eta) \quad (LR>0). \end{cases} \tag{35}$$

即可获得常微分方程 (19) 的组状孤波解和三角函数周期解, 这里

$$\Theta=\sqrt{N_0^2-M_1(M_0+RH_0)},\ \ M_1=4(K_0+LH_0),$$

M_0, N_0, K_0, H_0 是不全为零的任意常数.

结论 1 将叠加公式 (32) 与 (34) 确定的无穷序列解, 代入公式 (24) 得到 KdV 方程组的复合型双孤子新解.

结论 2 将叠加公式 (32) 与 (35)(或 (33) 与 (34)) 确定的无穷序列解, 代入公式 (24) 得到 KdV 方程组的双曲函数孤子解与三角函数周期解复合的新解.

结论 3 将叠加公式 (33) 与 (35) 确定的无穷序列解, 代入公式 (24) 得到 KdV 方程组的复合型双周期新解.

2.3.4 构造 KdV 方程组 (8), (9) 的无穷序列复合型单孤子新解

用推论 1 获得的解, 可以构造 KdV 方程组 (8), (9) 的复合型新解. 用推论 2 中不同常微分方程的不同解, 可以构造 KdV 方程组 (8), (9) 的复合型新解. 这些解包括了由 Riemann θ 函数解、Jacobi 椭圆函数解、双曲函数解和三角函数解中不同的两个解组合的无穷序列复合型解.

3 结论

文献 [8] 和 [9] 分别, 获得了 KdV 方程组 (4), (5) 和 (6), (7) 的由双曲函数与三角函数组成的形如 (36) 的多孤子解. 此类解与本文定理 6 和定理 7 中给出的结论是一致的.

$$u(x,t)=f\big(c_1\cos(\xi_1),c_2\cos(\xi_2),c_3\sin(\xi_1),c_4\sin(\xi_2),h_1(\xi_1),h_2(\xi_2),g_1(\xi_1),g_2(\xi_2)\big). \tag{36}$$

这里

$$h_k(\xi_k)=c_i\cosh(\xi_k), g_k(\xi_k)=c_j\sinh(\xi_k), c_l(l=1,2,\cdots,7,8;i=5,6;j=7,8;k=1,2)$$

是不全为零的任意常数.

在本文的 2.3.1 节、2.3.2 节、定理 4 和定理 5, 能获得 KdV 方程组 (8), (9) 由 Riemann θ 函数和 Jacobi 椭圆函数组成的复合型新解, 这里包括周期解和孤子解组合的解、双周期解以及双孤子解. 文献 [8, 9] 未能获得此类解.

本文的 2.3.4 节中获得了 KdV 方程组 (8), (9) 由 Riemann θ 函数解、Jacobi 椭圆函数解、双曲函数解和三角函数解中不同的两个解组合的无穷序列复合型解. 文献 [9] 未能获得此类复合型解, 只获得了 KdV 方程组的 Jacobi 椭圆函数单孤子解.

利用非线性常微分方程 (14) 与 (15) 的解与 Bäcklund 变换等结论, 也可以获得 KdV 方程组 (8),(9) 的新解 (未列出). 当 $\alpha_1=4, \alpha_2=1, \alpha_3=4, \alpha_4=4, \beta_1=4, \beta_2=1, \beta_3=4, \beta_4=4$ 时, KdV 方程组 (8), (9) 转化为 KdV 方程组 (2), (3). 而且这些系数满足定理 1 和定理 2 的条件. 因此根据 KdV 方程组 (8), (9) 的相关结论, 可以获得 KdV 方程组 (2), (3) 的无穷序列复合型新解.

参 考 文 献

[1] 范恩贵, 张鸿庆. 获得非线性演化方程 Bäcklund 变换的一种新的途径 [J]. 应用数学和力学, 1998, 19(4): 603–608.

[2] 范恩贵, 张鸿庆. 齐次平衡法若干新的应用 [J]. 数学物理学报, 1999, 19(3): 286–292.

[3] 张桂戎, 李志斌, 段一士. 非线性波方程的精确孤立波解 [J]. 中国科学 A, 2000, 30(12): 1103–1108.

[4] 范恩贵. 齐次平衡法、Weiss-Tabor-Carnevale 法及 Clarkson-Kruskal 约化法之间的联系 [J]. 物理学报, 2000, 49(8): 1409–1412.

[5] 袁文俊, 常亚东, 黄勇, 王桦. 某些常微分方程的亚纯解表示与应用 [J]. 中国科学 A, 2013, 43(6): 563–575.

[6] Ding H Y, Xu X X, Yang H X. An extended functional transformation method and its application in some evolution equations[J]. Chin. Phys., 2005, 14(9): 1687–1690.

[7] 加羊杰. 非线性耦合 KdV 方程的延拓结构 [J]. 应用数学学报, 2014, 37(2): 297–303.

[8] Hu H C, Tong B, Lou S Y. Nonsingular positon and complexiton solutions for the coupled KdV system[J]. Phys. Lett. A, 2006, 351: 403–412.

[9] Lou S Y, Tong B, Hu H C, Tang X Y. Coupled KdV equations derived two-layer fluids[J]. J. Phys. A: Math. Gener., 2006, 39: 513–527.

[10] Huang J, Liu H H. New exact travelling wave solutions for fisher equation and Burgers-Fisher equation[J]. J. Math., 2011, 31(4): 631–637.

[11] Hu Z H, Wu R C, Zhang W W. Soliton solutions of the long-short wave resonance equatilns[J]. J. Math., 2011, 31(1): 35–42.

[12] 许镇辉, 陈翰林, 戴正德. (2+1) 维 Kadomtsev-Petviashvili 方程解的时空分岔 [J]. 应用数学学报, 2013, 36(5): 900–909.

[13] 邓圣福, 郭柏灵. 一类变式 Boussinesq 系统的行波解 [J]. 应用数学学报, 2012, 35(6): 1099–1111.

[15] Chen Y, Li B, Zhang H Q. Generalized Riccati equation expansion method and its application to the Bogoyavlenskiis generalized breaking soliton equation[J]. Chin. Phys., 2003, 12(9): 940–945.

[15] Khaled A Gepreel, Saleh Omran. Exact solutions for nonlinear partial fractional differential equations[J]. Chin. Phys. B, 2012, 21(11): 110204(1-7).

[16] Md Nur Alam, Md Ali Akbar, Syed Tauseef Mohyud Din. A novel $(G'(\xi)/G(\xi))$-expansion method and its application to the Boussinesq equation[J]. Chin. Phys. B, 2014, 23(2): 020203(1-10).

[17] Ma S H, Fang J P, Zheng C L. Complex wave excitations and chaotic patterns for a general (2+1)-dimensional Korteweg–de Vries system[J]. Chin. Phys. B, 2008, 17(8): 2767–2773.

[18] Li D S, Zhang H Q. The soliton-like solutions to the (2+1)-dimensional modified dispersive water-wave system[J]. Chin. Phys., 2004, 13(7): 984–987.

[19] 刘式适, 刘式达. 物理学中的非线性方程 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.

[20] 王军民. 修正的 Korteweg de Vries- 正弦 Gordon 方程的 Riemann θ 函数解 [J]. 物理学报, 2012, 61(8): 080201(1-5).

[21] 套格图桑, 白玉梅. 非线性发展方程的 Riemann theta 函数等几种新解 [J]. 物理学报, 2013, 62(10): 100201(1-9).

[22] Taogetusang, Sirendaoerji, Li S M. New application to Riccati equation[J]. Chin. Phys. B, 2010, 19(8): 080303(1-8).

[23] Taogetusang, Sirendaoerji, Li S M. Infinite sequence soliton-like exact solutions of the (2+1)-dimensional breaking soliton equation[J]. Commun. The. Phys., 2011, 47(6): 949–954.

A NEW KIND OF METHOD TO SOLVING SOLUTIONS OF THE NONLINEAR COUPLING KDV EQUATIONS

YI Li-na, Taogetusang

(*College of Mathematical Science, Inner Mongolia Normal University, Huhhot 010022, China*)

Abstract: In this paper, the problem of constructing the new infinite sequence complexion solution of the nonlinear coupled KdV equations is researched. With the help of the method combining the function transformation with the auxiliary equation, the new infinite sequence complexion solutions consisting by two of the Riemann θ function, Jacobi elliptic function, hyperbolic functions and trigonometric functions of the nonlinear coupled KdV equations are obtained. These solutions conclude two-solitions, double-periodic solutions and soliton solution and periodic solution complexion solutions.

Keywords: the nonlinear coupled KdV equations; function transformation; the nonlinear superposition formula; new infinite sequence complexion solution

2010 MR Subject Classification: 35B10; 35Q51