Vol. 37 (2017)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

非时齐马氏过程的随机单调性

张美娟 [1], 张 铭 [2]
(1. 中央财经大学统计与数学学院, 北京 100081)
(2. 中国政法大学科学技术教学部, 北京 102249)

摘 要: 本文研究了非时齐马氏过程的随机单调性问题. 利用时齐的马氏过程随机单调性的相关证明方法, 加以改进, 获得了非时齐马氏过程随机单调性的显式判定方法, 并进一步将这一充分性条件推广为等价条件.

关键词: 非时齐马氏过程; 随机单调性; 耦合; 偏序
MR(2010) **主题分类号**: 60J99 **中图分类号**: O211.62
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2017)04-0819-04

1 引言

耦合方法是概率论研究中使用的一个重要方法, 在研究时齐的马氏过程时, 曾经对耦合方法有过系统的介绍和研究 (参见文献 [5] 第 5 章). 关于耦合的研究及其应用, 陈木法教授在这一方面有着十分重要及突出的贡献. 而关于耦合方法的应用, 一个重要的方面就是有关于马氏过程的随机偏序问题.

Massey [8] 指出随机偏序是研究排队网络的平稳分析时很好的工具. 通过随机偏序可以研究马氏过程的单调性, 比较定理以及强偏序及弱偏序的问题. 有关时齐的随机单调性的证明可参阅文献 [5]. Massey 在文献 [8] 中给出了马氏过程随机单调性的一般性判定准则, 但这一准则是从理论意义上得到的, 并没有给出显式的结果. 本文综合了文献 [5, 8] 的结论及方法, 给出了非时齐马氏过程单调性的显式判定方法, 更方便于具体操作及应用, 并将这一充分性条件的判定准则推广为等价条件.

假设状态空间 $(E,\mathscr{E})$ 上有一个可测的偏序“$\prec$”, 且

$$F := \{(x_1,x_2):\ x_1 \prec x_2\} \in \mathscr{E}^2.$$

定义 1 如果对所有非负的单调函数 f 都有

$$x_1 \prec x_2 \Rightarrow P_1(t)f(x_1) \le P_2(t)f(x_2), \qquad t \ge 0, \tag{1.1}$$

称 $P_1(t) \prec P_2(t)$, 若 $P_1(t) = P_2(t)$, 则称 $P_1(t)$ 是随机单调的. 如果一个集合的示性函数是单调函数, 那么这个集合称为单调集合.

*收稿日期: 2016-03-30 接收日期: 2016-04-08
基金项目: 中国政法大学青年教师资助计划 (1000-10816108).
作者简介: 张美娟 (1985–), 女, 河北石家庄, 讲师, 主要研究方向: 随机游动, 分枝过程.
通讯作者: 张铭.

对于时齐马氏过程的随机单调性, 有判定方法: 对于有界 q 对, $P_1(t) \prec P_2(t)$ 当且仅当其相应的 q 对对任意的单调集合 A 满足

$$\begin{aligned} &x_1 \prec x_2,\ x_2 \in A^c \Longrightarrow q_1(x_1, A) \le q_2(x_2, A) \qquad \text{且} \\ &x_1 \prec x_2,\ x_1 \in A \Longrightarrow q_1(x_1, A) - q_1(x_1) \le q_2(x_2, A) - q_2(x_2). \end{aligned} \tag{1.2}$$

对于非时齐的情形而言, 将前面的定义推广到非时齐马氏过程中, 就有

定义 2 对于两个非时齐的半群 $P_k(s,t),\ k = 1, 2$, 如果对所有非负的单调函数 f 都有

$$x_1 \prec x_2 \Rightarrow P_1(s,t)f(x_1) \le P_2(s,t)f(x_2), \qquad t \ge s \ge 0, \tag{1.3}$$

则称 $P_1(s,t) \prec P_2(s,t)$. 若任意的 $s \le t$ 都有 $P_1(s,t) = P_2(s,t)$, 称 $P_1(s,t)$ 是随机单调的.

于是参考文献 [5] 中的引理 5.45, 就得到了非时齐随机单调性的判定法则, 即

定理 3 假设 $(q_k(t,x), q_k(t,x,dy))(k = 1,2)$ 对于 $t \ge 0$ 是有界 q 对, 那么 $P_1(s,t) \prec P_2(s,t)$ 当且仅当其相应的 q 对对任意的单调集合 A 都满足

$$\begin{aligned} &x_1 \prec x_2,\ x_2 \in A^c \Longrightarrow q_1(t, x_1, A) \le q_2(t, x_2, A) \qquad \text{且} \\ &x_1 \prec x_2,\ x_1 \in A \Longrightarrow q_1(t, x_1, A) - q_1(t, x_1) \le q_2(t, x_2, A) - q_2(t, x_2), \qquad t \ge 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

2 定理 3 的证明

证 对于有界的 q 对, 由文献 [5] 中可知存在唯一的过程 $P(s,t)$ 与之对应.

若有 $P_1(s,t) \prec P_2(s,t)$, 则意味着对于 $x_1 \prec x_2$,

$$P_1(s,t)f(x_1) \le P_2(s,t)f(x_2), \qquad t \ge s \ge 0,$$

于是对于任意的 $t \ge 0$ 都有

$$P_1(t, t+\triangle t)f(x_1) \le P_2(t, t+\triangle t)f(x_2).$$

那么可以取 f 为示性函数 I_A, 其中 A 为单调集合, 于是

$$P_1(t, t+\triangle t; x_1, A) \le P_2(t, t+\triangle t; x_2; A).$$

对于 $x_1 \prec x_2$ 且 $x_2 \in A^c$ 的情形, 由于 A 是单调集合, 所以 $I_A(x_1) \le I_A(x_2) = 0$, 即 $x_1 \in A^c$, 于是有

$$q_1(t, x_1, A) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{P_1(t, t+\triangle t; x_1, A)}{\triangle t} \le \lim_{\triangle t \to 0} \frac{P_2(t, t+\triangle t; x_2, A)}{\triangle t} = q_2(t, x_2, A).$$

那么对于 $x_1 \prec x_2$, 且 $x_1 \in A$ 的情况, 同样由于 A 是单调集合, 所以 $I_A(x_2) \ge I_A(x_1) = 1$, 也就是说 $x_2 \in A$. 由于

$$\text{对于 } x \in A\text{ , 有 } \lim_{\triangle t \to 0} \frac{P(t, t+\triangle t; x; A) - 1}{\triangle t} = q(t, x_1, A) - q(t),$$

于是可得

$$q_1(t,x_1,A)-q_1(t,x_1)=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{P_1(t,t+\triangle t;x_1;A)-1}{\triangle t}$$
$$\le \lim_{\triangle t\to 0}\frac{P_2(t,t+\triangle t;x_2;A)-1}{\triangle t}=q_2(t,x_2,A)-q_2(t,x_2).$$

反过来, 如果 (1.4) 式对所有的 $0\le s\le t$ 都成立, 那么对于任意的 $0\le s\le t$, 可以令

$$q_k(s,t;x_k;dy_k)=\int_s^t q_k(u;x_k;dy_k)du,\qquad k=1,2.$$

此时, $q_k(s,t)$ 可以看做是 $q_k(u)$ $(u\in[s,t])$ 的线性组合, 于是对于 $q_k(u)$ 满足的性质 (1.4) 式, $q_k(s,t)$ 也是同样满足的, 即对于所有的单调集合 A 有

$$x_1\prec x_2,\ x_2\in A^c\Longrightarrow q_1(s,t;x_1;A)\le q_2(s,t;x_2;A)\qquad 且$$
$$x_1\prec x_2,\ x_1\in A\Longrightarrow q_1(s,t;x_1;A)-q_1(s,t;x_1)\le q_2(s,t;x_2;A)-q_2(s,t;x_2).$$

此时将 $\bar{q_k}(s,t)=\frac{q_k(s,t)}{t-s}$ 定义为 $[s,t]$ 时间段内的均匀转移速率, 可以很简单的得到 $\bar{q_k}(s,t)$ 也是满足上述条件的, 于是可以把非时齐的过程 $P_k(s,t)$ 看作以 $\bar{q_k}(s,t)$ 为转移速率的时齐过程, 时间长度即为 $t-s$, 那么再由时齐时文献 [5] 中的定理 5.47, 就可以得到 $P_1(s,t)\prec P_2(s,t)$.

至此定理证明完毕.

注 在这里注意到, 对于保守的 q 对, $1-P(t,t+\triangle t;x;A)=P(t,t+\triangle t;x;A^c)$, 而对于 $x_1,x_2\in A$, 来说, 类似前面的证明有

$$q_1(t,x_1,A^c)=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{P_1(t,t+\triangle t;x_1,A^c)}{\triangle t}=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{1-P_1(t,t+\triangle t;x_1;A)}{\triangle t}$$
$$\ge \lim_{\triangle t\to 0}\frac{1-P_2(t,t+\triangle t;x_2;A)}{\triangle t}=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{P_2(t,t+\triangle t;x_2,A^c)}{\triangle t}=q_2(t,x_2,A^c),$$

所以还可以得到对于保守的 q 对, (1.4) 式也等价于

$$x_1\prec x_2,\ x_2\in A^c\Longrightarrow q_1(t,x_1,A)\le q_2(t,x_2,A)\qquad 且$$
$$x_1\prec x_2,\ x_1\in A\Longrightarrow q_1(t,x_1,A^c)\ge q_2(t,x_2,A^c).$$

参 考 文 献

[1] 王伟刚. 一般随机环境中马氏链的强大数律 [J]. 数学杂志, 2011, 31(3): 481–487.

[2] Anderson W J. Continuous-time Markov chains an applications-oriented approach[M]. New York: Springer, 1991.

[3] Blackwell D. Finite non-homogeneous chains[J]. Ann. Math., 1945, 46(4): 594–599.

[4] Chen M F. Eigenvalues, inequalities, and ergodic theory[M]. London: Springer, 2004.

[5] Chen M F. From Markov chains to non-equilibrium particle systems (2nd ed.)[M]. Beijing: World Scientufic, 2004.

[6] Chen M F, Mao Y H. Introduction to stochastic processes[M]. Beijing: Higher Education Press, 2007 (in Chinese).

[7] Griffeath D. Uniform coupling of non-homogeneous Markov chains[J]. J. Appl. Prob., 1975, 12(4): 753–762.

[8] Massey, W A. Stochastic ordering for Markov processes on partially ordered spaces with applications to queueing networks[J]. Lect. Not. Mono. Ser., Stoch. Orders Dec. Risk., 1991, 19: 248–260.

[9] Meyn S P, Tweedie R L. Markov chains and stochastic stability[M]. London: Springer-Verlag, 1996.

THE STOCHASTIC MONOTONICITY OF INHOMOGENEOUS MARKOV PROCESSES

ZHANG Mei-juan[1], ZHANG Ming[2]

(*1.School of Statistics and Mathematics, Central University of Finance and Economics, Beijing 100081, China*)

(*2.Department of Science and Technology, China University of Political Science and Law, Beijing 102249, China*)

Abstract: In this paper, we study the stochastic monotonicity of inhomogeneous Markov processes. By using and improving the proof method for the stochastic monotonicity of homogeneous Markov processes, we obtain the explicit criterion for stochastic monotonicity of inhomogeneous Markov processes. Further more, this article extends this sufficient criterion to the equivalent condition.

Keywords: inhomogeneous Markov processes; stochastic monotonicity; coupling; partial order

2010 MR Subject Classification: 60J99