Vol. 37 (2017)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

α - 混合的部分线性 EV 模型的矩收敛性

金丽宏
(武汉科技大学城市学院公共课部, 湖北 武汉 430083)

摘 要: 本文研究误差为 α - 混合的部分线性 EV 模型的矩收敛性问题. 利用小波估计和修正最小二乘法, 给出了参数和非参数部分的小波估计量, 获得了小波估计量的矩收敛速度, 推广了现有的一些结论.

关键词: α - 混合; 部分线性 EV 模型; 小波估计; 修正最小二乘法; 矩收敛速度
MR(2010) **主题分类号**: 62J05 **中图分类号**: O212.1
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2017)04-0797-08

1 引言

本文研究如下部分线性 EV (errors-in-variables) 模型

$$y_i = x_i\beta + g(t_i) + e_i, X_i = x_i + \varsigma_i, i = 1, 2, \cdots, n, \tag{1.1}$$

其中 $X_i \in R, t_i \in R, i = 1, 2, \cdots, n$ 是已知的点列, β 是未知参数, $g(\cdot)$ 是定义在 $[0, 1]$ 上的未知函数, 误差 $\{e_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$ 是平稳的 α - 混合随机变量且 $Ee_i = 0$ 和 $E(e_i^2) = 1$. $\{x_i\}$ 是通过 $X_i = x_i + \varsigma_i$ 观测到的, $\{\varsigma_i\}$ 是独立同分布的测量误差, 且 $E\varsigma_i = 0, \mathrm{Var}(\varsigma_i) = \sigma_\varsigma^2$ 且和 $\{e_i\}$ 是独立的.

定义 1 [1] 设 $\{\xi_i, i \geq 1\}$ 是 α - 混合的, 如果 α - 混合系数

$$\alpha(n) = \sup_{i\geq 1}\{| P(AB) - P(A)P(B) |: A \in F_{n+i}^\infty, B \in F_1^i\}.$$

当 $n \to \infty$ 时收敛到 0, 其中 $F_l^m = \sigma\{\xi_l, \xi_{l+1}, \cdots, \xi_m\}$ 表示包含 $\xi_l, \xi_{l+1}, \cdots, \xi_m, l \leq m$ 的 σ - 代数.

文献 [2] 用加权的方法研究了异方差 α - 混合半参数模型, 得到了估计量的 Berry-Esseen 界; 文献 [3] 研究了部分线性变系数 EV 模型, 得到了估计量的渐近性质; 文献 [4] 用加权的方法研究了误差独立的半参数回归模型的矩相合性; 文献 [5] 用加权的方法研究了 NA 样本下部分线性回归模型的矩相合性; 文献 [6] 用小波方法研究了鞅差时间序列半参数回归模型的矩收敛速度; 文献 [7] 用小波方法研究了 φ - 混合和 ψ - 混合的非参数回归模型的矩收敛速度. 然而对 α - 混合的部分线性 EV 模型的矩收敛性还没有研究, 因此本文研究模型 (1.1) 的矩收敛性.

*收稿日期: 2016-12-21 接收日期: 2016-12-22
基金项目: 国家自然科学基金资助 (40974002; 41374017; 11471105).
作者简介: 金丽宏 (1976–), 女, 汉, 湖北仙桃, 副教授, 主要研究方向: 测量数据的处理与应用的研究.

本文用小波方法研究模型 (1.1), 仍采用文献 [8] 修正后的最小二乘估计, 即

$$\widehat{\beta}_n=(\sum_{i=1}^{n}\widetilde{X}_i^2-n\sigma_{\varsigma}^2)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{X}_i\widetilde{y}_i, \tag{1.2}$$

其中 $\widetilde{X}_i=X_i-\sum\limits_{j=1}^{n}\int_{A_j}E_m(t_i,s)dsX_j, \widetilde{y}_i=y_i-\sum\limits_{j=1}^{n}\int_{A_j}E_m(t_i,s)dsy_j$. 由此可得非参数部分的小波估计为

$$\widehat{g}_n(t)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-X_i\widehat{\beta}_n)\int_{A_i}E_m(t,s)ds, \tag{1.3}$$

其中 $E_m(t,s)=2^mE_0(2^mt,2^ms)=2^m\sum\limits_{k\in Z}\phi(2^mt-k)\phi(2^ms-k), A_i=[s_{i-1},s_i]$, $\phi(\cdot)$ 是 Schwartz 空间 S_l 的刻度函数, 相件 $L^2(R)$ 的多解分析为 $\{V_m\in Z\}$, 这里的 R 为实数集合, Z 是整数集合, V_m 的再生核为 $E_m(t,s)$.

2 引理

下面是本文的基本假设.

(1) $x_i=f(t_i)+\eta_i, i=1,2,\cdots,n$, 其中 $f(\cdot)$ 是定义于 $[0,1]$ 的函数, $\{\eta_i\}$ i.i.d 且 $E\eta_i=0, \mathrm{Var}(\eta_i)=\sigma_\eta$, 而且 $\{\eta_i\}$ 和 $\{(e_i,\varsigma_i)\}$ 是相互独立的.

(2) $g(\cdot)$ 和 $f(\cdot)\in H^\alpha$ (Sobolev 空间), $\alpha>\frac{1}{2}$.

(3) $g(\cdot), f(\cdot)$ 满足 κ 阶 Lipschitz 条件, $\kappa>0$.

(4) $\phi(\cdot)\in S_\iota$(阶为 ι 的 Schwartz 空间, $\iota\geq\alpha$), ϕ 满足 1 阶 Lipschitz 条件且具有紧支撑, 当 $\xi\to 0$ 时, $|\ \widehat{\phi}(\xi)-1\ |=o(\xi)$, 其中 $\widehat{\phi}$ 为 ϕ 的 Fourier 变换.

(5) $\max\limits_{1\leq i\leq n}(s_i-s_{i-1})=o(n^{-1}), 2^m=o(n^{\frac{1}{3}})$.

注 1 条件 (1) 是文献 [8] 的特殊情形, 条件 (2)–(5) 是小波估计中经常用到的 (如文献 [9–11] 等). 由此可见本文的假设条件是相当一般的.

引理 1 [12] 若条件 (1)–(5) 成立, 则

$$\sup_{0\leq t\leq 1}|\ f(t)-\sum_{k=1}^{n}(\int_{A_k}E_m(t,s)ds)f(t_k)\ |=o(n^{-\kappa})+o(\tau_m),$$
$$\sup_{0\leq t\leq 1}|\ g(t)-\sum_{k=1}^{n}(\int_{A_k}E_m(t,s)ds)g(t_k)\ |=o(n^{-\kappa})+o(\tau_m).$$

引理 2 [13] 若条件 (5) 成立, 其中 $k\in N, C_k$ 只与 k 有关的实数, 则有

(a) $|\ E_0(t,s)\ |\leq\frac{C_k}{(1+|t-s|)^k}$, $|\ E_m(t,s)\ |\leq\frac{2^mC_k}{(1+2^m|t-s|)^k}$;

(b) $\sup\limits_{0\leq s\leq 1}|\ E_m(t,s)\ |=o(2^m)$;

(c) $\sup\limits_{0\leq t\leq 1}\int_0^1|\ E_m(t,s)\ |\ ds\leq C$;

(d) $\int_0^1E_m(t,s)ds\to 1, n\to\infty$.

引理 3 若条件 (1)–(5) 成立, 则 $n^{-1}(\sum\limits_{i=1}^{n}\widetilde{X}_i^2-n\sigma_\varsigma^2)\to\sigma_\eta^2$ a.s..

证 注意到

$$\begin{aligned}n^{-1}(\sum_{i=1}^{n}\widetilde{X}_i^2-n\sigma_\varsigma^2)&=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{f}_i^2+n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\eta}_i^2+(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\varsigma}_i^2-\sigma_\varsigma^2)\\&\quad+2n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{f}_i\widetilde{\eta}_i+2n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{f}_i\widetilde{\varsigma}_i+2n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\varsigma}_i\widetilde{\eta}_i\\&=\sum_{i=1}^{6}U_i.\end{aligned}\tag{2.1}$$

由引理 1 可得 $U_1\to 0$. 由强大数定理和

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{A_j}E_m(t_i,s)ds\eta_j=o(n^{-1/3}\log n)\ \text{ a.s..}$$

(见文献 [14]), 有

$$U_2\to\sigma_\eta^2\ \text{ a.s.}\tag{2.2}$$

同理, 很容易证明 $U_3\to 0$ a.s.. 使用 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$U_4\le 2(U_1U_2)^{1/2}\to 0\ \text{ a.s.},\ \ U_5\le 2(U_1n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\varsigma}_i^2)^{1/2}\to 0\ \text{ a.s.},\tag{2.3}$$

$$U_6\le 2(U_2n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\varsigma}_i^2)^{1/2}\to 0\ \text{ a.s.},\tag{2.4}$$

由 (2.1)–(2.4) 式即得引理 3.

引理 4 [13] (1) 存在 $\delta>0$, 使得 $Ee_i=0$ 且 $E\mid e_i\mid^{2+\delta}<\infty$, 则

$$E(\sum_{i=1}^{n}e_i)^2\le(1+16\sum_{i=1}^{n}\alpha^{2/(2+\delta)}(\iota))\sum_{i=1}^{n}\parallel e_i\parallel_{2+\delta}^2,$$

其中 $\parallel e_i\parallel_{2+\delta}=(E\mid e_i\mid^{2+\delta})^{1/(2+\delta)}$.

(2) 存在 $r>2,\delta>0,\lambda>\frac{r(r+\delta)}{2\delta}$ 和 $\alpha(n)=o(n^{-\lambda})$, 使得 $Ee_i=0$ 且 $E\mid e_i\mid^{r+\delta}<\infty$, 则 $\forall\varepsilon>0$, 存在正整数 $c=c(k,r,\delta,\lambda)$, 有

$$E(\max_{1\le m\le n}\mid\sum_{i=1}^{n}e_i\mid^r)\le c(n^\varepsilon\sum_{i=1}^{n}E\mid e_i\mid^r+(\sum_{i=1}^{n}\parallel e_i\parallel_{r+\delta}^2)^{r/2}).$$

引理 5 [15] 如果 $\{X_k\}$ 是数学期望为 0 的独立 r.v. 序列, 那么对 $r\ge 2$,

$$E\mid\Sigma X_k\mid^r\le C_r((\Sigma EX_k^2)^{r/2}+\Sigma E\mid X_k\mid^r).$$

引理 6 如果 $\{\xi_i,i\ge 1\}$ 是 α - 混合的随机变量, $\{\zeta_i,i\ge 1\}$ 是独立的随机变量, 那么 $\{\xi_i\zeta_i,i\ge 1\}$ 也是 α - 混合的随机变量.

证 令 $F_{\iota}^{m}=\sigma\{\xi_{\iota},\xi_{\iota+1},\cdots,\xi_{m}\}$ 表示包含 $\xi_{\iota},\xi_{\iota+1},\cdots,\xi_{m},\iota\leq m$ 的 σ - 代数;

$$F'\iota^{m}=\sigma\{\zeta_{\iota},\zeta_{\iota+1},\cdots,\zeta_{m}\}$$

表示包含 $\zeta_{\iota},\zeta_{\iota+1},\cdots,\zeta_{m},\iota\leq m$ 的 σ - 代数;

$$F''\iota^{m}=\sigma\{\xi_{\iota}\zeta_{\iota},\xi_{\iota+1}\zeta_{\iota+1},\cdots,\xi_{m}\zeta_{m}\}$$

表示包含 $\iota^{m}=\sigma\{\xi_{\iota}\zeta_{\iota},\xi_{\iota+1}\zeta_{\iota+1},\cdots,\xi_{m}\zeta_{m}\},\iota\leq m$ 的 σ - 代数. $\forall A_1\in F_{n+i}^{\infty},\forall A_2\in F_1^{i},\forall B_1\in F_{n+i}^{'\infty},\forall B_2\in F_1^{'i},\forall C_1\in F_{n+i}^{''\infty},\forall C_2\in F_1^{''i}$, 有

$$\begin{aligned}&\mid P(C_1C_2)-P(C_1)P(C_2)\mid=\mid P(B_1)P(B_2)P(A_1A_2)-P(B_1)P(B_2)P(A_1)P(A_2)\mid\\&=P(B_1)P(B_2)\mid P(A_1A_2)-P(A_1)P(A_2)\mid.\end{aligned}$$

因为 $\{\xi_i,i\geq 1\}$ 是 α - 混合的随机变量, 所以 $\{\xi_i\zeta_i,i\geq 1\}$ 也是 α - 混合的随机变量.

3 主要结果及证明

定理 1 若本文假设 (1)–(5) 成立, 且存在 $r>2,\delta>0,\lambda>\frac{r(r+\delta)}{2\delta}$ 和 $\alpha(n)=o(n^{-\lambda})$, 使得 $\sup\limits_{i}E\mid e_i\mid^{r+\delta}<\infty$, 且满足

$$E\mid\varsigma_i\mid^{2r\vee(r+\delta)}<\infty,E\mid\eta_i\mid^{2r\vee(r+\delta)}<\infty,0<\varepsilon<\frac{r}{3}-\frac{2}{3}.$$

则 $E\mid\widehat{\beta}_n-\beta\mid^{r}=o(n^{-\frac{r}{3}})+o(n^{-2\kappa r})+o(\tau_m^{2r})$, 其中

$$\tau_m=\begin{cases}2^{-m(\alpha-\frac{1}{2})}, & \frac{1}{2}<\alpha<\frac{3}{2},\\ \frac{\sqrt{m}}{2^m}, & \alpha=\frac{3}{2},\\ 2^{-m}, & \alpha>\frac{3}{2}.\end{cases}$$

证 注意到 $\widetilde{y}_i=\widetilde{x}_i\beta+\widetilde{g}(t_i)+\widetilde{e}_i$, 易得

$$\begin{aligned}&(\sum_{i=1}^{n}\widetilde{X}_i^2-n\sigma_{\varsigma}^2)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{X}_i\widetilde{y}_i-\beta\\&=(\sum_{i=1}^{n}\widetilde{X}_i^2-n\sigma_{\varsigma}^2)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\sigma_{\varsigma}^2-\widetilde{X}_i\widetilde{\varsigma}_i)\beta+(\sum_{i=1}^{n}\widetilde{X}_i^2-n\sigma_{\varsigma}^2)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{X}_i\widetilde{g}(t_i)\\&\quad+(\sum_{i=1}^{n}\widetilde{X}_i^2-n\sigma_{\varsigma}^2)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{X}_ie_i-(\sum_{i=1}^{n}\widetilde{X}_i^2-n\sigma_{\varsigma}^2)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{X}_i\sum_{j=1}^{n}e_j\int_{A_j}E_m(t_i,s)ds\\&=T_1+T_2+T_3-T_4,\end{aligned}\tag{3.1}$$

则

$$\begin{aligned}T_1&=(n^{-1}(\sum_{i=1}^{n}\widetilde{X}_i^2-n\sigma_{\varsigma}^2))^{-1}(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\sigma_{\varsigma}^2-\widetilde{\varsigma}_i^2)\beta-n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\widetilde{f}(t_i)\widetilde{\varsigma}_i\beta)-n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\widetilde{\eta}_i\widetilde{\varsigma}_i\beta))\\&=T_{11}+T_{12}+T_{13}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

由 C_r 不等式, 引理 3, 引理 5 和 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\begin{aligned}
E\mid T_{11}\mid^r &\le cn^{-r}E\mid \sum_{i=1}^{n}\{(\sigma_\varsigma^2-\varsigma_i^2)\beta+2\varsigma_i\sum_{j=1}^{n}\int_{A_j}E_m(t_i,s)ds\varsigma_j-(\sum_{j=1}^{n}\int_{A_j}E_m(t_i,s)ds\varsigma_j)^2\}\mid^r\\
&\le cn^{-r}E\mid\sum_{i=1}^{n}(\sigma_\varsigma^2-\varsigma_i^2)\beta\mid^r+cn^{-1}\sum_{i=1}^{n}\{E\mid\sum_{j=1}^{n}\int_{A_j}E_m(t_i,s)ds\varsigma_j\mid^{2r}\}^{\frac12}(E\mid\varsigma_i\mid^{2r})^{\frac12}\\
&\quad+cE\mid\sum_{j=1}^{n}\int_{A_j}E_m(t_i,s)ds\varsigma_j\mid^{2r}\\
&=o(n^{-\frac{r}{3}}).
\end{aligned}\tag{3.3}$$

由 C_r 不等式, 引理 1, 引理 3 和引理 5, 有

$$\begin{aligned}
E\mid T_{12}\mid^r &\le cn^{-r}\max_{1\le i\le n}\mid\widetilde{f}(t_i)\mid^r(E\mid\sum_{i=1}^{n}\varsigma_i\mid^r+E\mid\sum_{j=1}^{n}\int_{A_j}E_m(t_i,s)ds\varsigma_j\mid^r)\\
&=o(n^{-\frac{r}{2}}(n^{-\kappa r}+\tau_m^r)).
\end{aligned}\tag{3.4}$$

由 C_r 不等式, 引理 3 和引理 5, 有

$$\begin{aligned}
E\mid T_{13}\mid^r &\le cn^{-r}E\mid\sum_{i=1}^{n}\eta_i\varsigma_i\mid^r+cn^{-r}E\mid\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}E_m(t_i,s)ds\varsigma_k\eta_i\mid^r\\
&\quad+cn^{-r}E\mid\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{A_j}E_m(t_i,s)ds\eta_j\varsigma_i\mid^r\\
&\quad+cn^{-r}E\mid\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k}E_m(t_i,s)ds\varsigma_k\eta_i\sum_{j=1}^{n}\int_{A_j}E_m(t_i,s)ds\eta_j\varsigma_i\mid^r\\
&=o(n^{-\frac{r}{3}}).
\end{aligned}\tag{3.5}$$

由 C_r 不等式, 引理 1, 引理 3 和引理 5, 有

$$\begin{aligned}
E\mid T_2\mid^r &\le cn^{-r}\max_{1\le i\le n}\mid\widetilde{g}(t_i)\mid^r\mid\sum_{i=1}^{n}\widetilde{f}(t_i)\mid^r+cn^{-r}\max_{1\le i\le n}\mid\widetilde{g}(t_i)\mid^r E\mid\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\varsigma}_i\mid^r\\
&\quad+cn^{-r}\max_{1\le i\le n}\mid\widetilde{g}(t_i)\mid^r E\mid\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\eta}_i\mid^r\\
&\le cn^{-r}\max_{1\le i\le n}\mid\widetilde{g}(t_i)\mid^r\mid\sum_{i=1}^{n}\widetilde{f}(t_i)\mid^r\\
&\quad+cn^{-r}\max_{1\le i\le n}\mid\widetilde{g}(t_i)\mid^r(E\mid\sum_{i=1}^{n}\varsigma_i\mid^r+E\mid\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{A_j}E_m(t_i,s)ds\varsigma_j\mid^r)\\
&\quad+cn^{-r}\max_{1\le i\le n}\mid\widetilde{g}(t_i)\mid^r(E\mid\sum_{i=1}^{n}\eta_i\mid^r+E\mid\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{A_j}E_m(t_i,s)ds\eta_j\mid^r)\\
&=o(n^{-\frac{r}{3}}(n^{-\kappa r}+\tau_m^r))+o(n^{-2\kappa r})+o(\tau_m^{2r}).
\end{aligned}\tag{3.6}$$

由 C_r 不等式, 引理 3, 引理 4, 引理 5 和引理 6, 有

$$\begin{aligned}E\mid T_3\mid^r &\le cn^{-r}E\mid\sum_{i=1}^n\widetilde{f}(t_i)e_i\mid^r+cn^{-r}E\mid\sum_{i=1}^n\varsigma_ie_i\mid^r+cn^{-r}E\mid\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^n\int_{A_j}E_m(t_i,s)ds\varsigma_j)e_i\mid^r\\&+cn^{-r}E\mid\sum_{i=1}^n\eta_ie_i\mid^r+cn^{-r}E\mid\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^n\int_{A_j}E_m(t_i,s)ds\eta_j)e_i\mid^r=o(n^{-\frac{r}{3}}).\quad(3.7)\end{aligned}$$

由 C_r 不等式, 引理 1, 引理 3 和引理 4, 有

$$\begin{aligned}E\mid T_4\mid^r &\le cn^{-r}E\mid\sum_{i=1}^n\widetilde{f}(t_i)\sum_{j=1}^ne_j\int_{A_j}E_m(t_i,s)ds\mid^r+cn^{-r}E\mid\sum_{i=1}^n\widetilde{\varsigma}_i\sum_{j=1}^ne_j\int_{A_j}E_m(t_i,s)ds\mid^r\\&+cn^{-r}E\mid\sum_{i=1}^n\widetilde{\eta}_i\sum_{j=1}^ne_j\int_{A_j}E_m(t_i,s)ds\mid^r=o(n^{-\frac{r}{3}}).\quad(3.8)\end{aligned}$$

由 C_r 不等式, (3.1)–(3.8) 式, 得

$$E\mid\widehat{\beta}_n-\beta\mid^r\le E\mid T_1\mid^r+E\mid T_2\mid^r+E\mid T_3\mid^r+E\mid T_4\mid^r=o(n^{-\frac{r}{3}})+o(n^{-2\kappa r})+o(\tau_m^{2r}),$$

定理 1 得证.

定理 2 若本文假设 (1)–(5) 成立, 且存在 $r>2,\delta>0,\lambda>\frac{r(r+\delta)}{2\delta}$ 和 $\alpha(n)=o(n^{-\lambda})$, 使得 $\sup\limits_i E\mid e_i\mid^{r+\delta}<\infty$, 且满足

$$E\mid\varsigma_i\mid^{2r\vee(r+\delta)}<\infty,E\mid\eta_i\mid^{2r\vee(r+\delta)}<\infty,0<\varepsilon<\frac{r}{3}-\frac{2}{3},$$

则 $E\mid\widehat{g}_n(t)-g(t)\mid^r=o(n^{-\kappa r})+o(\tau_m^r)+o(n^{-\frac{r}{3}})$.

证 注意到

$$\begin{aligned}\widehat{g}_n(t)-g(t)&=\sum_{i=1}^n(x_i\beta+g(t_i)+\varepsilon_i-X_i\widehat{\beta}_n)\int_{A_i}E_m(t,s)ds-g(t)\\&=\sum_{i=1}^nf(t_i)(\beta-\widehat{\beta}_n)\int_{A_i}E_m(t,s)ds+\sum_{i=1}^n(\beta-\widehat{\beta}_n)\eta_i\int_{A_i}E_m(t,s)ds\\&\quad+(\sum_{i=1}^ng(t_i)\int_{A_i}E_m(t,s)ds-g(t))+\sum_{i=1}^n\varepsilon_i\int_{A_i}E_m(t,s)ds\\&\quad-\sum_{i=1}^n\varsigma_i(\widehat{\beta}_n-\beta)\int_{A_i}E_m(t,s)ds-\sum_{i=1}^n\varsigma_i\beta\int_{A_i}E_m(t,s)ds\\&=\sum_{i=1}^6T_i.\end{aligned}\quad(3.9)$$

由引理 2, 有

$$\begin{aligned}E\mid T_1\mid^r&\le c\mid\sum_{i=1}^nf(t_i)\int_{A_i}E_m(t,s)ds\mid^r E\mid\beta-\widehat{\beta}_n\mid^r\\&\le cE\mid\beta-\widehat{\beta}_n\mid^r.\end{aligned}\quad(3.10)$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式和引理 5, 有

$$
\begin{aligned}
E\mid T_2\mid^r &\le c(E\mid\sum_{i=1}^n \eta_i\int_{A_i}E_m(t,s)ds\mid^{2r})^{1/2}(E\mid\beta-\widehat{\beta}_n\mid^{2r})^{1/2}\\
&=o(n^{-\frac{r}{3}})(E\mid\beta-\widehat{\beta}_n\mid^{2r})^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

由引理 1, 可得

$$E\mid T_3\mid^r=o(n^{-\kappa r})+o(\tau_m^r). \tag{3.12}$$

由引理 4, 有

$$E\mid T_4\mid^r\le(n^\varepsilon\sum_{i=1}^n E\mid\varepsilon_i\int_{A_i}E_m(t,s)ds\mid^r+(\sum_{i=1}^n\parallel\varepsilon_i\int_{A_i}E_m(t,s)ds\parallel_{r+\delta}^2)^{r/2})=o(n^{-\frac{r}{3}}). \tag{3.13}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式和引理 5, 有

$$
\begin{aligned}
E\mid T_5\mid^r &\le c(E\mid\sum_{i=1}^n \varsigma_i\int_{A_i}E_m(t,s)ds\mid^{2r})^{1/2}(E\mid\beta-\widehat{\beta}_n\mid^{2r})^{1/2}\\
&=o(n^{-\frac{r}{3}})(E\mid\beta-\widehat{\beta}_n\mid^{2r})^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

由引理 5, 有

$$E\mid T_6\mid^r=E\mid\sum_{i=1}^n\varsigma_i\beta\int_{A_i}E_m(t,s)ds\mid^r=o(n^{-\frac{r}{3}}). \tag{3.15}$$

由 C_r 不等式和 (3.10)–(3.15) 式, 有

$$
\begin{aligned}
E\mid\widehat{g}_n(t)-g(t)\mid^r &\le c(E\mid T_1\mid^r+E\mid T_2\mid^r+E\mid T_3\mid^r+E\mid T_4\mid^r+E\mid T_5\mid^r+E\mid T_6\mid^r)\\
&=o(n^{-\kappa r})+o(\tau_m^r)+o(n^{-\frac{r}{3}}).
\end{aligned}
$$

定理 2 得证.

注 2 当 $\varsigma_i=0$ 时, 模型 (1.1) 退化为一般的部分线性回归模型, 因此模型 (1.1) 是一般的部分线性模型的推广. 文献 [4] 要求 e_i 独立而本文只需 e_i 是 α - 混合, 在条件比文献 [4] 弱的情况下, 由定理 1 和定理 2 可以直接得到文献 [4] 相应的结论. 进一步, 当 $\beta=0$ 时模型 (1.1) 退化为非线性模型, 在文献 [7] 中要求 e_i 是 φ - 混合, 而模型 (1.1) 是 α - 混合比文献 [7] 的条件弱, 因此文献 [7] 的结论是定理 2 的推论.

参 考 文 献

[1] Fan J, Yao Q. Nonlinear time series: nonparametric and parametric methods[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

[2] Zhang J J, Liang H Y. Berry-Esseen type bounds in heteroscedastic semiparametric model[J]. J. Stat. Plan. Infer., 2011, 141: 3447–3462.

[3] Zhang W W, Li G R, Xue L G. Pofile interence on partially linear varing-coefficent errors-in-variables models under restricted condition[J]. Comp. Stat. Data Anal., 2011, 55: 3027–3040.

[4] 胡舒合. 一类半参数回归模型的估计问题 [J]. 数学物理学报, 1999, 19(5): 541–549.

[5] Zhou X C, Liu X S, Hu S H. Moment consistency of estimators in partially linear models under NA samples[J]. Metrika, 2010, 72: 415–432.

[6] 胡宏昌, 胡迪鹤. 鞅差时间序列半参数回归模型的小波估计 [J]. 数学进展, 2010, 39(1): 23–30.

[7] 薛留根. 混合误差下回归函数小波估计的一致收敛速度 [J]. 数学物理学报, 2002, 22A(4): 528–535.

[8] Liang H, Hardle W, Carrool R J. Estimation in a semiparametric partially linear errors-in- variables model[J]. Ann. Stat., 1999, 27: 1519–1535.

[9] Antoniads A, Gregorie G, Mckeague I W. Wavelet methods for curve estimation[J]. J. Amer. Stat. Assoc., 1994, 89: 1340–1353.

[10] Hu H C, Wu L. Convergence rates of wavelet estimators in a semiparametric regression models under NA samples[J]. Chinese Ann. Math., 2012, 33(4): 609–624.

[11] Zhou X, You J H. Wavelet estimation in varying-coefficient partially linear regression models [J]. Stat. Prob. Lett., 2004, 68: 91–104.

[12] 胡宏昌, 胡迪鹤. 半参数回归模型小波估计的强相合性 [J]. 数学学报, 2006, 49(6): 1417–1424.

[13] Qian W M, Cai G X. Strong approximability of wavelet estimate in semiparametric regression models[J]. Sci. China (Ser. A), 1999, 29: 233–240.

[14] Hu H C. Convergence rates of wavelet estimators in semiparametric regression models with martingale difference error[J]. J. Math. Sci.: Adv. Appl., 2009, 3: 4–19.

[15] 林正炎, 白志东. 概率不等式 [M]. 北京: 科学出版社, 2005: 104.

[16] 方连娣, 胡凤霞. 核实数据下非线性 EV 模型中经验似然降维推断 [J]. 数学杂志, 2012, 32(1): 113-120.

THE MOMENT CONVERGENCE RATES OF PARTLY LINEAR ERRORS-IN-VARIABLES MODEL WITH α-MIXING ERRORS

JIN Li-hong

(*Department of Basic, College of City, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430083, China*)

Abstract: In this paper, we discuss the moment convergence rates of partly linear errors-in-variables model. Using wavelet smoothing and modified least-squares methods, we investigate a partly linear errors-in-variables model with α-mixing sequence, the wavelet estimators of the parametric parts and nonparametric parts are given. We obtain the moment convergence rates of wavelet estimators, which extend some present conclusions.

Keywords: α-mixing; partly linear errors-in-variables model; wavelet estimation; modified least-squares; moment convergence rate

2010 MR Subject Classification: 62J05