数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

Vol. 37 (2017)
No. 4

关于连续映射半群拓扑熵的一点注记

田延国, 马东魁
(华南理工大学数学学院, 广东 广州 510641)

摘 要: 本文研究了度量空间中连续映射构成半群的拓扑熵. 利用 Patráo [8] 的方法, 给出了度量空间中两种有限个连续映射构成的半群的拓扑 d - 熵的定义, 比较了两种拓扑 d - 熵的大小. 证明了局部紧致可分度量空间上有限个真映射构成的半群的拓扑 d - 熵和它的一点紧化空间上对应的拓扑熵相等. 上面结果推广了 Patráo 的相应结论.

关键词: 拓扑熵; 半群; 真映射; 度量空间

MR(2010) **主题分类号:** 37A35; 37B40 **中图分类号:** O189.1

文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2017)04-0792-05

1 引言

拓扑熵是动力系统中一个非常重要的量, 可用来刻画系统的复杂度. 从 Adler, Konheim 和 McAndrew [1] 首先给出拓扑熵的定义以来, 拓扑熵的研究逐渐发展成为动力系统的一个重要方向. 随着研究的深入及新问题的出现, 人们从各个角度研究和推广拓扑熵, 如文献 [4, 6, 12]. 其中一个重要方向就是半群作用系统的拓扑熵. 首先, Biś [2] 和 Bufetov [5] 分别给出了紧致度量空间上有限个连续映射构成的半群的拓扑熵的定义. 在此基础上, 人们又深入研究了这两种拓扑熵, 比如针对紧致度量空间上有限个连续映射构成的半群系统, Ma 和 Wu [7] 定义了任意子集的拓扑熵; Wang 和 Ma [10] 及 Wang, Ma 和 Lin [9] 分别推广 Biś [2] 和 Bufetov [5] 的拓扑熵, 给出了一般度量空间上由有限个一致连续映射构成的半群的拓扑熵的定义.

另一方面, Patrão [8] 给出了度量空间中一个映射的拓扑 d - 熵及真映射拓扑熵的概念.

在此基础上, 我们将 Bufetov [5] 紧致度量空间中有限个连续映射构成半群的拓扑熵的定义推广到一般的度量空间中, 定义了一种度量空间中有限个连续映射构成半群的拓扑 d - 熵. 然后将 Biś [2] 在紧致度量空间中拓扑熵的定义推广到一般的度量空间中, 定义另一种度量空间中有限个连续映射构成半群的拓扑 d - 熵, 比较了两种定义的拓扑 d - 熵的大小, 并且证明局部紧致可分度量空间上有限个真映射构成的半群的拓扑 d - 熵和它的一点紧化空间上对应的拓扑熵相等.

2 预备知识

我们分别介绍 Biś [2] 和 Bufetov [5] 定义的拓扑熵.

*收稿日期: 2016-08-03 接收日期: 2016-10-31

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11671149); 广东省自然科学基金资助 (2014A030313230); 中央高校基础研究基金资助 (SCUT(2015ZZ055; 2015ZZ127)).

作者简介: 田延国 (1990–), 男, 山东德州, 硕士, 主要研究方向: 拓扑动力系统与遍历理论.

首先是 Biś [2] 的定义. 设 X 为紧致度量空间, X 上的度量记为 d, 设 $f_i : X \to X$ 为连续映射 $(i = 0, 1, \cdots, m-1)$, 记 $G_1 = \{id_X, f_0, f_1, \cdots, f_{m-1}\}$, 其中 id_X 为恒等映射. 对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 记 $G_n = \{g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_n : g_1, \cdots, g_n \in G_1\}$, 则易见 $G_m \subset G_n (m \leq n)$. 记 $G = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} G_n$, 则 G 为由 G_1 生成的半群. 定义 X 上一个新的度量如下

$$d^n_{\max}(x, y) = \max\{d(g(x), g(y)) : g \in G_n\}.$$

对任意的 $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}$, X 的子集 E 称为 X 的 (n, ε) 张成集, 若对每一个 $x \in X$, 存在 $y \in E$ 满足 $d(g(x), g(y)) \leq \varepsilon$, 其中 $g \in G_n$. 记 X 的所有 (n, ε) 张成集的最小基数为 $r(n, \varepsilon, X, G_1)$. Biś定义了由 G_1 生成的半群 G 的拓扑熵

$$h(G_1) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \tfrac{1}{n} \log r(n, \varepsilon, X, G_1).$$

下面介绍 Bufetov [5] 的定义. 设 X 为紧致度量空间, X 上的度量记为 d, $f_i : X \to X$ 为连续映射 $(i = 0, 1, \cdots, m-1)$, 记 $G'_1 = \{f_0, f_1, \cdots, f_{m-1}\}$, 用 G' 表示由 G'_1 生成的半群. 记 $F^+_m = \{w | w = w_0 w_1 \cdots w_k, w_i = 0, 1, \cdots, m-1\}$. 若存在 $w'' \in F^+_m$ 满足 $w = w'' w'$, 记为 $w' \leq w$. 对 $w \in F^+_m$, $w = w_1 w_2 \cdots w_k$, 记 $|w| = k$, $f_w = f_{w_1} f_{w_2} \cdots f_{w_k}$, 则显然 $f_{ww'} = f_w f_{w'}$. 对每一个 $w \in F^+_m$, X 上的度量定义为

$$d_w(x_1, x_2) = \max_{w' \leq w} d(f_{w'}(x_1), f_{w'}(x_2)).$$

对任意的 $w \in F^+_m$ 和 $\varepsilon > 0$, X 的子集 F 称为 X 的 (w, ε, G'_1) 张成集, 若对每一个 $x \in X$, 存在 $y \in F$ 满足 $d_w(x, y) \leq \varepsilon$. 记 X 的所有 (w, ε, G'_1) 的最小基数为 $B(w, \varepsilon, G'_1)$. 令

$$B(n, \varepsilon, G'_1) = \frac{1}{m^n} \sum_{|w|=n} B(w, \varepsilon, G'_1).$$

Bufetov [5] 定义了半群 G'_1 的拓扑熵

$$H(G'_1) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log B(n, \varepsilon, G'_1).$$

我们可用 Bufetov 方法定义了拓扑 d - 熵. 设 X 为一个度量空间, $f_i : X \to X$ 为连续映射 $(i = 0, 1, \cdots, m-1)$. 令 Y 为 X 的子集, 对任意的 $w \in F^+_m, \varepsilon > 0$, $F \subset X$ 称为 Y 的 (w, ε, G'_1) 张成集, 若对任意的 $x \in Y$, 存在 $y \in F$ 满足 $d_w(x, y) \leq \varepsilon$. 记 Y 的所有 (w, ε, G'_1) 的最小基数为 $B(w, \varepsilon, Y, G'_1)$.

定义 2.1 设 (X, d) 为一个度量空间, $G'_1 = \{f_0, f_1, \cdots, f_{m-1}\}$, 其中 $f_i : X \to X$ 为连续映射 $(i = 0, 1, \cdots, m-1)$. Y 为 X 的子集, 定义 $H^d(G'_1, Y) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} B(\varepsilon, Y, G'_1)$, 其中

$$B(\varepsilon, Y, G'_1) = \limsup_{n \to \infty} \tfrac{1}{n} \log \tfrac{1}{m^n} \sum_{|w|=n} B(w, \varepsilon, Y, G'_1),$$

则可定义 X 关于 G'_1 生成半群的拓扑 d - 熵为 $H^d(G'_1) = \sup\limits_{Y} H^d(G'_1, Y)$, 其中上确界取遍 X 的所有子集 Y.

注 2.1 (1) 当 X 为紧致度量空间时, 定义 2.1 与 Bufetov 的定义等价, 即 $H^d(G'_1) = H(G'_1) = H^d(G'_1, X)$.

(2) 当 X 为度量空间, f_i 均为一致连续时, 定义 2.1 与文献 [9] 中定义等价.

(3) $H^d(G_1')=H^d(G_1',X)$.

下面给出真映射 [8] 的概念. 设 X 为一个拓扑空间, $T:X\to X$ 为连续映射, 称 T 为真映射, 若 X 的任意紧致子集在 T 下的原像为紧致子集.

3 本文定义的拓扑 d - 熵及主要结果

以 Biś [2] 定义的拓扑熵为基础, 给出度量空间中半群的拓扑 d - 熵一种新的定义, 考虑 (X,d) 为度量空间, $f_i:X\to X$ 为连续映射 $(i=0,1,\cdots,m-1)$, $G_1=\{id_X,f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}\}$.

令 Y 为 X 的子集, 对任意的 $\varepsilon>0, n\in\mathbb{N}$, $E\subset X$ 称为 Y 的 (n,ε) 张成集, 若对任意的 $x\in Y$, 存在 $y\in E$ 满足 $d^n_{\max}(x,y)\le\varepsilon$. 记 Y 的所有 (n,ε) 张成集的最小基数为 $r(n,\varepsilon,Y,G_1)$.

定义 3.1 设 (X,d) 为一个度量空间, G 是由集合 $G_1=\{id_X,f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}\}$ 生成的半群, 其中 $f_i:X\to X$ 为连续映射 $(i=0,1,\cdots,m-1)$. Y 为 X 的子集, 定义

$$h^d(G_1,Y)=\lim_{\varepsilon\to 0}r(\varepsilon,Y,G_1),$$

其中

$$r(\varepsilon,Y,G_1)=\limsup_{n\to\infty}\tfrac{1}{n}\log r(n,\varepsilon,Y,G_1).$$

可定义由 G_1 生成的半群 G 的拓扑 d - 熵为 $h^d(G_1)=\sup\limits_{Y}h^d(G_1,Y)$, 其中上确界取遍 X 的所有子集 Y.

注 3.1 (1) 当 X 为紧致度量空间时, 定义 3.1 与 Biś [2] 的定义等价, 即 $h^d(G_1)=h(G_1)$.

(2) 当 X 为度量空间, f_i 均为一致连续时, 定义 3.1 与文献 [10] 中定义等价.

(3) $h^d(G_1)=h^d(G_1,X)$.

下面可以比较定义 2.1 和定义 3.1 中两种度量空间中有限个连续映射构成的半群的拓扑 d - 熵的大小.

定理 3.1 设 (X,d) 为一个度量空间, $G_1=\{id_X,f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}\}, G_1'=\{f_0,f_1,\cdots,f_{m-1}\}$, 其中 $f_i:X\to X$ 为连续映射 $(i=0,1,\cdots,m-1)$. 则 $h^d(G_1)\ge H^d(G_1')$.

证 对 X 的任意子集 Y 以及 $n\in\mathbb{N}$, 对任意的 $\varepsilon>0$, 若 M 为 Y 的 (n,ε,G_1) 张成集, 则对任意的 $x\in Y$, 存在 $y\in M$ 满足 $d^n_{\max}(x,y)\le\varepsilon$. 由上式可推出 $d(f_w(x),f_w(y))\le\varepsilon$, 其中 $w\in F_m^+, |w|=n$. 即 Y 的 (n,ε,G_1) 张成集为 Y 的 (w,ε,G_1') 张成集, 从而有

$$r(n,\varepsilon,Y,G_1)\ge B(w,\varepsilon,Y,G_1'),$$

进而

$$r(n,\varepsilon,Y,G_1)\ge\tfrac{1}{m^n}\sum_{|w|=n}B(w,\varepsilon,Y,G_1').$$

两边同时取 log, 除以 n 及取极限可得 $h^d(G_1,Y)\ge H^d(G_1',Y)$, 由 Y 的任意性, 两边对 Y 取上确界, 可得 $h^d(G_1)\ge H^d(G_1')$, 证毕.

令 X 为局部紧致可分度量空间, 它的一点紧化空间记作 $\tilde{X}$. $f_i : X \to X(i = 0,1,\cdots,m-1)$ 为真映射. 定义 $\tilde{f}_i : \tilde{X} \to \tilde{X}$ 且

$$\widetilde{f}_i(\widetilde{x}) = \begin{cases} f_i(\widetilde{x}), & \widetilde{x} \neq \infty, \\ \infty, & \widetilde{x} = \infty, \end{cases} \tag{3.1}$$

$\tilde{f}_i$ 称为 f_i 到 $\tilde{X}$ 上的扩张. 由文献 [8] 可知 $\tilde{f}_i$ 也为真映射. 注意到 X 的可分性等价于 $\tilde{X}$ 的可度量性. 用 $\tilde{G}$ 表示由集合 $\tilde{G}_1 = \{id_X, \tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \cdots, \tilde{f}_{m-1}\}$ 生成的半群.

下面的定理说明了局部紧致可分度量空间上有限个真映射构成的半群的拓扑 d - 熵和它的一点紧化空间上对应的拓扑熵相等.

定理 3.2 设 X 为一个局部紧致可分空间, $\tilde{X}$ 为 X 的一点紧化空间. 度量 d 是 $\tilde{X}$ 上的度量 $\tilde{d}$ 在 X 上的限制. G 是由集合 $G_1 = \{id_X, f_0, f_1, \cdots, f_{m-1}\}$ 生成的半群, 其中 $f_i : X \to X$ 为真映射 $(i = 0, 1, \cdots, m-1)$, $\tilde{G}_1 = \{id_X, \tilde{f}_0, \cdots, \tilde{f}_{m-1}\}$. 则有 $h^d(G_1) = h^{\tilde{d}}(\tilde{G}_1) = h(\tilde{G}_1)$, 其中 $h(\tilde{G}_1)$ 表示 Biś定义的由 $\tilde{G}_1$ 生成的半群 $\tilde{G}$ 的拓扑熵.

证 首先说明对任意的 $n \in \mathbb{N}$ 及 $\varepsilon > 0$, 有 $r(n, \varepsilon, G_1)$ 是有限的. 令 $\tilde{S} = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_k\} \subset \tilde{X}$ 为 $\tilde{X}$ 的一个 $(n, \frac{\varepsilon}{2}, \tilde{G}_1)$ 张成集. 由 X 在 $\tilde{X}$ 中的稠密性, 存在 $\{x_1, \cdots, x_k\} \subset X$ 满足 $\tilde{d}^n_{\max}(x_i, \tilde{x}_i) < \frac{\varepsilon}{2}$. 对任意的 $x \in X \subset \tilde{X}$, 存在 $\tilde{x}_i \in \tilde{S}$ 满足 $\tilde{d}^n_{\max}(x, \tilde{x}_i) < \frac{\varepsilon}{2}$. 由上可得

$$d^n_{\max}(x, x_i) \leq \tilde{d}^n_{\max}(x, \tilde{x}_i) + \tilde{d}^n_{\max}(\tilde{x}_i, x_i) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

故 $S = \{x_1, \cdots, x_k\}$ 为 X 的 (n, ε, G_1) 张成集. 若选取 $\tilde{S}$ 的元素个数为 $r(n, \frac{\varepsilon}{2}, \tilde{G}_1)$, 则可得

$$r(n, \varepsilon, G_1) \leq \tilde{r}(n, \frac{\varepsilon}{2}, \tilde{G}_1) < \infty. \tag{3.2}$$

反之, 令 $U = \{x_1, \cdots, x_k\}$ 为 X 的 $(n, \frac{\varepsilon}{2}, G_1)$ 张成集. 对任意的 $\tilde{x} \in \tilde{X}$, 由 X 在 $\tilde{X}$ 中稠密, 则存在 $x \in X$ 满足 $\tilde{d}^n_{\max}(x, \tilde{x}) < \frac{\varepsilon}{2}$, 从而有 $x_i \in U$ 满足 $d^n_{\max}(x, x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是

$$\tilde{d}^n_{\max}(\tilde{x}, x_i) \leq \tilde{d}^n_{\max}(x, \tilde{x}) + d^n_{\max}(x, x_i) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

故 $U = \{x_1, \cdots, x_k\}$ 为 $\tilde{X}$ 的 $(n, \varepsilon, \tilde{G}_1)$ 张成集. 若选取 U 的元素个数为 $r(n, \varepsilon, G_1)$, 可得

$$\tilde{r}(n, \varepsilon, \tilde{G}_1) \leq r(n, \frac{\varepsilon}{2}, G_1). \tag{3.3}$$

结合 (3.2) 和 (3.3) 式可得

$$\begin{aligned} h^d(G_1) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log r(n, 4\varepsilon, G_1) \\ &\leq \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \tilde{r}(n, 2\varepsilon, \tilde{G}_1) \\ &\leq \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log r(n, \varepsilon, G_1) \\ &= h^d(G_1), \end{aligned}$$

上式说明 $h^d(G_1) = h^{\tilde{d}}(\tilde{G}_1)$, 再由注 3.1 可知 $h^{\tilde{d}}(\tilde{G}_1) = h(\tilde{G}_1)$, 综上得证.

参考文献

[1] Adler R L, Konheim A G, McAndrew M H. Topological entropy [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, 114(2): 309–319.

[2] Biś A. Entropies of a semigroup of maps [J]. Discrete Contin. Dyn. Sys. Ser. A, 2004, 11(2-3): 639–648.

[3] Biś A, Urbański M. Some remarks on topological entropy of a semigroup of continuous maps [J]. Cubo, 2006, 2(2): 63–71.

[4] Bowen R. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1971, 153(1): 401–414.

[5] Bufetov A. Topological entropy of free semigroup actions and skew-product transformations [J]. J. Dynam. Control Sys., 1998, 5(1): 137–143.

[6] Dinaburg E I. The relation between topological entropy and metric entropy [J]. Soviet Math. Dokl, 1970, 11(1), 13–16.

[7] Ma Dongkui, Wu Min. Topological pressure and topological entropy of a semigroup of maps [J]. Discrete Contin. Dyn. Sys., 2011, 31(2): 545–557.

[8] Patráo M. Entropy and its variational principle for non-compact metric spaces [J]. Ergodic Theory Dynam. Sys., 2008, 30(10): 1529–1542.

[9] Wang Yupan, Ma Dongkui, Lin Xiaogang. On the topological entropy of free semigroup actions [J]. J. Math. Anal. Appl., 2006, 435(2): 1573–1590.

[10] Wang Yupan, Ma Dongkui. On the topological entropy of a semigroup of continuous maps [J]. J. Math. Anal. Appl, 2005, 427(2): 1084–1100.

[11] Waters P. An introduction to ergodic theory [M]. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1982.

[12] 彭丽. 低复杂度序列的维数 [J]. 数学杂志, 2006, 26(2): 133–136.

A REMARK ON THE TOPOLOGICAL ENTROPY OF A SEMIGROUP OF CONTINUOUS MAPS

TIAN Yan-guo, MA Dong-kui

(*School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou, 510641, China*)

Abstract: In this paper, we study the topological entropy of a semigroup of continuous maps on a metric space. By using Patráo's [8] method, we give two definitions of topological d -entropy of a semigroup generated by finite continuous maps on a metric space, the size of these two d-entropies are compared. We also show that the topological d-entropy of the semigroup generated by finite proper maps on a locally compact separable metric space and the topological entropy on its one-point compactification space coincide, which extend the results obtained by Patráo.

Keywords: topological entropy; semigroup; proper maps; metric space

2010 MR Subject Classification: 37A35; 37B40