Vol. 37 (2017)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

复线性微分方程解的增长性的几个结果

龙见仁
(北京邮电大学计算机学院; 理学院, 北京 100876)
(贵州师范大学数学科学学院, 贵州 贵阳 550001)

摘 要: 本文研究了复线性微分方程解的增长性问题. 利用两类具有某种渐进增长性质的函数作为线性微分方程的系数, 讨论了两类二阶线性微分方程解的增长性, 获得了方程解为无穷级. 这些结果推广了先前的一些结果.

关键词: 复微分方程; 整函数; 无穷级; 下级; 渐进增长
MR(2010) **主题分类号**: 34M10; 30D35 **中图分类号**: O174.5
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2017)04-0781-11

1 引言及主要结果

对复平面 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数 f, 其级与下级分别定义为

$$\rho(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ T(r,f)}{\log r}$$

和

$$\mu(f) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log^+ T(r,f)}{\log r}.$$

如果 f 是整函数, 则上述定义中的 Nevanlinna 特征函数 $T(r,f)$ 可以被 $\log M(r,f)$ 所替代, 其中 $M(r,f) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$. 从定义容易看到有 $\mu(f) \le \rho(f)$, 并且严格不等式也是可能的, 参见文献 [1–3]. 在这篇文章里, 我们假设读者熟悉亚纯函数值分布理论的基本记号与主要的结果, 例如 $T(r,f)$, $m(r,f)$, $N(r,f)$ 等, 更多的细节参看文献 [4–6].

下级的概念在很多地方被涉及, 比如 Póyla 峰与展布关系 (见文献 [5, pp. 217–232]), 亏量问题 (见文献 [5, pp. 251–255]). 在文献 [6, pp. 282–304], 有穷下级的整函数的很多性质可以被发现. 函数的级被广泛的应用到复微分方程解的研究中, 例如参看文献 [7–8]. 函数的下级也被涉及到复微分方程解的研究中, 我们引用最近的一些研究工作 [9–11]. 在复微分方程解的增长性研究中, 有很多以前的研究工作涉及到系数函数的级, 例如文献 [7–8, 12–13]. 本文的目的就是想获得一些类似的结果当系数函数的级换成下级, 探索系数函数的下级对微分方程解的快速增长的影响.

*收稿日期: 2016-03-03 接收日期: 2016-04-19
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11501142); 贵州省科学技术基金资助 (黔科合 J 字 [2015]2112 号); 贵州师范大学 2016 年博士科研启动项目资助.

作者简介: 龙见仁 (1981–), 男, 苗族, 贵州锦屏, 副教授, 主要研究方向: 复分析.

为了陈述下面的结果, 先回忆几个记号. 集合 $E\subset[0,\infty)$ 的 Lebesgue 线性测度是 $\mathrm{m}(E)=\int_E dt$, 其上、下线性密度分别是

$$\overline{\mathrm{dens}}(E)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\mathrm{m}(E\cap[0,r])}{r},\quad \underline{\mathrm{dens}}(E)=\liminf_{r\to\infty}\frac{\mathrm{m}(E\cap[0,r])}{r}.$$

集合 $F\subset[1,\infty)$ 的对数测度是 $\mathrm{m_l}(F)=\int_F\frac{dt}{t}$, 其上、下对数密度分别是

$$\overline{\log\mathrm{dens}}(F)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\mathrm{m_l}(F\cap[1,r])}{\log r},\quad \underline{\log\mathrm{dens}}(F)=\liminf_{r\to\infty}\frac{\mathrm{m_l}(F\cap[1,r])}{\log r}.$$

从文献 [14, p. 121] 容易看到, 对任意集合 $F\subset[1,\infty)$,

$$0\le\underline{\mathrm{dens}}(F)\le\underline{\log\mathrm{dens}}(F)\le\overline{\log\mathrm{dens}}(F)\le\overline{\mathrm{dens}}(F)\le 1.$$

在文献 [15] 中, Laine-Wu 利用系数是具有某种渐进增长性质的整函数去研究复线性微分方程解的增长性, 并获得了

定理 A 设 $A(z)$ 和 $B(z)$ 是两个满足 $\rho(B)<\rho(A)<\infty$ 的整函数. 设 $A(z)$ 满足

$$T(r,A)\sim\log M(r,A),\quad r\to\infty,\quad r\notin E, \tag{1.1}$$

其中 $\mathrm{m_l}(E)<\infty$, 则线性微分方程

$$f''+A(z)f'+B(z)f=0 \tag{1.2}$$

的所有非平凡解都是无穷级.

(1.1) 式意味着下面极限

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r,A)}{\log M(r,A)}=1$$

在除去一个对数测度有限的 r 值例外集合上成立.

Kwon 和 Kim 在文献 [16] 推广了定理 A, 通过系数 $A(z)$ 允许除去一个更大的 r 值例外集使得条件 (1.1) 成立.

定理 B 设 $A(z)$ 和 $B(z)$ 是两个满足 $\rho(B)<\rho(A)<\infty$ 的整函数. 设 $A(z)$ 在除去 r 值例外集 E 上满足条件 (1.1), 其中 $\overline{\log\mathrm{dens}}(E)<\frac{\rho(A)-\rho(B)}{\rho(A)}$. 则微分方程 (1.2) 的所有非平凡解都是无穷级.

这里考虑系数的下级对微分方程 (1.2) 解的快速增长的影响, 将定理 A、B 中系数 $A(z)$ 和 $B(z)$ 的级用其下级代替, 获得了下面的结果. 我们的证明不同于定理 A、B, 使用了一个来自于 Miles-Rossi 的结果 (见文献 [17, 定理 1]), 关于对数导数的反面估计, 这个估计在定理 A、B 的证明中没有使用.

定理 1 设 $A(z)$ 和 $B(z)$ 是两个满足 $\mu(B)<\mu(A)<\infty$ 的整函数. 设 $A(z)$ 在除去 r 值例外集 E 上满足条件 (1.1), 其中 $\overline{\log\mathrm{dens}}(E)=0$. 则微分方程 (1.2) 的所有非平凡解都是无穷级.

本文的第二个结果, 利用一种新的研究思路去研究线性微分方程解的增长性, 即方程 (1.2) 的系数 $A(z)$ 是另一个二阶线性微分方程

$$w'' + P(z)w = 0 \tag{1.3}$$

的非平凡解, 其中 $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$. 众所周知, 方程 (1.3) 的任何非平凡解的增长级为 $\frac{n+2}{2}$. 关于方程 (1.3) 解的更多的性质, 参看文献 [7–8, 18]. Hille [19] 利用他的方法刻画了方程 (1.3) 解的渐进增长. 本文的第二结果就是利用方程 (1.3) 解的渐进性质去研究方程 (1.2) 解的增长性, 获得了

定理 2 设 $A(z)$ 是方程 (1.3) 的一个非平凡解, $B(z)$ 是一个 $\rho(B) \neq \rho(A)$ 的超越整函数, 且

$$T(r, B) \sim \log M(r, B), \quad r \to \infty, \quad r \in E, \tag{1.4}$$

其中 $\overline{\log \mathrm{dens}}(E) > 0$. 则微分方程 (1.2) 的所有非平凡解都是无穷级.

本文的第三个结果涉及到另一类二阶线性微分方程

$$f'' + e^{-z} f' + Q(z) f = 0, \tag{1.5}$$

其中 $Q(z)$ 是整函数. 为此先回顾方程 (1.5) 解的一些性质. 对于 $Q(z)$ 是多项式的情形, 在以往的文献中, 可以发现很多关于方程 (1.5) 解的结论, 例如文献 [20–23]. 对于 $Q(z)$ 是超越整函数, 有两个结果值得注意, 一个是 Gundersen [24] 证明了如果 $Q(z)$ 是超越整函数并且 $\rho(Q) \neq 1$, 则方程 (1.5) 的所有非平凡解都是无穷级. 另一个是 Chen [25] 证明了如果 $Q(z) = h(z)e^{bz}$, 其中 $h(z)$ 是一个非零多项式, $b \neq -1$, 则方程 (1.5) 的所有非平凡解都是无穷级. 从 Chen 的结果可以看出当系数 $Q(z)$ 的增长级等于 1 时, 方程 (1.5) 有无穷级解. 在文献 [26] 中, Li-Wang 讨论了方程 (1.5) 解的增长性. 他们证明了如果 $Q(z) = h(z)e^{bz}$, $h(z)$ 是一个级小于 $\frac{1}{2}$ 的超越整函数, b 是一个实常数. 则方程 (1.5) 的所有非平凡解都是无穷级. 针对整函数 $Q(z)$ 级为 1 的情形, Wang-Laine [27] 考虑了线性微分方程

$$f'' + h(z)e^{-z} f' + Q(z) f = 0, \tag{1.6}$$

其中 $h(z)$ 是一个满足 $\rho(h) < \rho(Q) = 1$ 的整函数. 他们假定系数 $Q(z)$ 具有某一个渐进增长条件时, 研究了方程 (1.6) 解的增长性.

定理 C 设 $Q(z)$ 和 $h(z)$ 是两个满足 $\rho(h) < \rho(Q) = 1$ 的整函数. 设 $Q(z)$ 满足

$$T(r, Q) \sim \log M(r, Q), \quad r \to \infty, \quad r \in E,$$

其中 $\overline{\log \mathrm{dens}}(E) > 0$. 则微分方程 (1.6) 的所有非平凡解都是无穷级.

相比定理 C, 这里利用另一类具有某种渐进性质的整函数去研究微分方程 (1.6) 解的增长性. 即对于常数 $\alpha \in (0,1)$, 如果 $Q(z)$ 在一个足够大的 r 值集合上满足

$$T(r, Q) \sim \alpha \log M(r, Q), \quad r \to \infty. \tag{1.7}$$

定理 3 设 $Q(z)$ 和 $h(z)$ 是两个满足 $\rho(h) < \rho(Q) = 1$ 的整函数. 设 $Q(z)$ 在除去一个上对数密度为 0 的 r 值集合上对 $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ 满足条件 (1.7). 则微分方程 (1.6) 的所有非平凡解都是无穷级.

提出条件 (1.7) 是很自然的, 有很多的函数在除去一个适当的 r 值例外集上满足条件 (1.7). 一个简单的例子就是 $Q(z)=e^z$, 条件 (1.7) 对 $\alpha=\frac{1}{\pi}$ 成立, 没有例外集. 下面稍微复杂一点的例子可以在文献 [28, p. 158] 中找到.

例 1 设 $Q(z)=(1-3e^{iz})e^{z^2}-ze^{-iz^2}$, 则条件 (1.7) 对 $\alpha=\frac{2+\sqrt{2}}{2\pi}$ 成立, 没有例外集.

相比例 1, 更一般的例子就是形如 $Q(z)=P_1(z)e^{Q_1(z)}+\cdots+P_n(z)e^{Q_n(z)}$ 的指数多项式, 其中 $P_j(z)$, $Q_j(z)$ $(j=1,\cdots,n)$ 是多项式, 参见文献 [28]. 根据定义, 容易证明 $Q(z)$ 是完全正规增长的函数 (见文献 [29, p. 6]). 于是有下面的例子.

例 2 如果 $Q(z)$ 是上面形式的指数多项式, 则根据文献 [29, 定理 1.2.1], 有

$$T(r,Q)=(1+o(1))\frac{r^\rho}{2\pi}\int_0^{2\pi}h_Q^+(\theta)d\theta$$

和

$$\log M(r,Q)=(1+o(1))r^\rho\max_{0\le\theta\le2\pi}h_Q(\theta)$$

对所有的 $r\notin[0,1]\cup E$ 成立, 其中 $\overline{\mathrm{dens}}(E)=0$ (因此 $\overline{\log\mathrm{dens}}(E)=0$), $h_Q^+(\theta)=\max\{0,h_Q(\theta)\}$. 所以条件 (1.7) 在除去一个上对数密度为 0 的 r 值例外集上对

$$\alpha=\frac{\frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}h_Q^+(\theta)d\theta}{\max_{0\le\theta\le2\pi}h_Q(\theta)}$$

成立.

2 引理

为了证明上述定理, 需要如下的几个引理.

引理 2.1 [30] 假设 f 是一个有穷级超越亚纯函数, k,j 是两个满足 $k>j\ge0$ 的整数. 则对任意给定的常数 $\varepsilon>0$, 下列三个结论成立.

(1) 存在一个集合 $E_1\subset[0,2\pi)$, $\mathrm{m}(E_1)=0$, 使得如果 $\psi_0\in([0,2\pi)-E_1)$, 则存在常数 $R_0=R_0(\psi_0)>1$, 使得对所有满足 $\arg z=\psi_0$, $|z|\ge R_0$ 的 z, 有

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right|\le|z|^{(k-j)(\rho(f)-1+\varepsilon)}. \tag{2.1}$$

(2) 存在一个集合 $E_2\subset(1,\infty)$, $\mathrm{m_l}(E_2)<\infty$, 使得对所有满足 $|z|\notin(E_2\cup[0,1])$ 的 z, 不等式 (2.1) 成立.

(3) 存在一个集合 $E_3\subset[0,\infty)$, $\mathrm{m}(E_3)<\infty$, 使得对所有满足 $|z|\notin E_3$ 的 z, 有

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right|\le|z|^{(k-j)(\rho(f)+\varepsilon)}. \tag{2.2}$$

下面的结果是文献 [17, 定理 1] 的一个简单形式, 但足够本文使用.

引理 2.2 假设 f 是一个级为 $\rho(<\infty)$ 的非常数整函数. 对 $\beta\in(0,1)$ 及 $r>0$, 令

$$U_r=\left\{\theta\in[0,2\pi):r\left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right|\ge\beta n(r,0,f)\right\},$$

则对 $M(>3)$ 存在一个集合 $E_M \subset [1,\infty)$, $\underline{\log\text{dens}}(E_M) \geq 1-\frac{3}{M}$, 使得对所有的 $r \in E_M$,

$$\mathrm{m}(U_r) > \left(\frac{1-\beta}{7M(\rho+1)}\right)^2.$$

为了介绍 Hille 关于方程 (1.3) 解的渐进增长性质, 需要一些记号. 假设 α, β 是两个常数满足 $\beta-\alpha<2\pi$ 及 $\alpha<\beta$, 对任意 $r>0$, 定义

$$S(\alpha,\beta)=\{z:\alpha<\arg z<\beta\},$$
$$S(\alpha,\beta;r)=\{z:\alpha<\arg z<\beta\}\cap\{z:|z|<r\}.$$

假设 f 是一个级为 $\rho\in(0,\infty)$ 的整函数, 为了叙述方便, 令 $S=\overline{S}(\alpha,\beta)=\{z:\alpha\leq\arg z\leq\beta\}$. 如果对任意 $\theta\in(\alpha,\beta)$, 有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log\log|f(re^{i\theta})|}{\log r}=\rho, \tag{2.3}$$

则称 f 在 S 内以指数增长趋于无穷; 如果对任意 $\theta\in(\alpha,\beta)$, 有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log\log|f(re^{i\theta})|^{-1}}{\log r}=\rho, \tag{2.4}$$

则称 f 在 S 内以指数增长趋于零.

下面的结果源自文献 [19, 第 7.4 节], 也可以在文献 [31] 找到它的陈述.

引理 2.3 假设 w 是方程 (1.3) 的一个非平凡解, 其中 $P(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$, $a_n\neq0$. 令 $\theta_j=\frac{2j\pi-\arg(a_n)}{n+2}$, $S_j=S(\theta_j,\theta_{j+1})$, $j=0,1,2,\cdots,n+1$, 其中 $\theta_{n+2}=\theta_0+2\pi$. 则 w 具有下面的性质.

(1) 在每一个角域 S_j, w 或者以指数增长趋于无穷, 或者以指数增长趋于零.

(2) 对某个 j, 如果 w 在 S_j 以指数增长趋于零, 则 w 在 S_{j+1} 和 S_{j-1} 必须以指数增长趋于无穷. 但是 w 在几个相邻角域以指数增长趋于无穷是可能的.

(3) 如果 w 在 S_j 以指数增长趋于零, 则 w 在 $S_{j-1}\cup\overline{S_j}\cup S_{j+1}$ 至多有有穷多个零点.

(4) 如果 w 在 S_j 和 S_{j-1} 以指数增长趋于无穷, 则对任意给定的 $\varepsilon>0$, w 在 $\overline{S}(\theta_j-\varepsilon,\theta_j+\varepsilon)=\{z:\theta_j-\varepsilon\leq\arg z\leq\theta_j+\varepsilon\}$ 内有无穷多个零点. 进一步有, 当 $r\to\infty$,

$$n(\overline{S}(\theta_j-\varepsilon,\theta_j+\varepsilon;r),0,w)=(1+o(1))\frac{2\sqrt{|a_n|}}{\pi(n+2)}r^{\frac{n+2}{2}},$$

其中 $n(\overline{S}(\theta_j-\varepsilon,\theta_j+\varepsilon;r),0,w)$ 代表 w 在角域 $\overline{S}(\theta_j-\varepsilon,\theta_j+\varepsilon;r)$ 里零点的个数, 零点按重数计算.

引理 2.4 [27] 设 f 是级为 $\rho(<\infty)$ 的整函数, 对每一个 $r>0$, 令 $M(r,f)=f(re^{i\theta_r})$. 对给定的 $\zeta>0$ 和 $0<C(\rho,\zeta)<1$, 则存在一个常数 $l_0\in(0,\frac{1}{2})$ 和一个集合 E_ζ, $\underline{\log\text{dens}}(E_\zeta)>1-\zeta$, 使得对所有充分大的 $r\in E_\zeta$ 及所有满足 $|\theta-\theta_r|\leq l_0$ 的 θ,

$$e^{-5\pi}M(r,f)^{1-C(\rho,\zeta)}\leq|f(re^{i\theta})|.$$

在文献 [32, 定理 3], Gundersen 证明了下面的结果.

引理 2.5 设 $A(z)$ 和 $B(z)(\not\equiv 0)$ 是两个整函数, 对实数 $\alpha,\beta,\theta_1,\theta_2$, 其中 $\alpha>0$, $\beta>0$ 及 $\theta_1<\theta_2$, 当 $z\to\infty$, $z\in\overline{S}(\theta_1,\theta_2)=\{z:\theta_1\le\arg z\le\theta_2\}$, 有

$$|A(z)|\ge\exp\{(1+o(1))\alpha|z|^{\beta}\}$$

和

$$|B(z)|\le\exp\{o(1)|z|^{\beta}\}.$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$, 令 $\overline{S}(\theta_1+\varepsilon,\theta_2-\varepsilon)=\{z:\theta_1+\varepsilon\le\arg z\le\theta_2-\varepsilon\}$. 如果 f 是方程 (1.2) 的级为 $\rho(f)(<\infty)$ 的非平凡解. 则下列结论成立.

(1) 存在一个常数 $b(\neq 0)$ 使得当 $z\to\infty$, $z\in\overline{S}(\theta_1+\varepsilon,\theta_2-\varepsilon)$, $f(z)\to b$. 进一步有当 $z\to\infty$, $z\in\overline{S}(\theta_1+\varepsilon,\theta_2-\varepsilon)$,

$$|f(z)-b|\le\exp\{-(1+o(1))\alpha|z|^{\beta}\}.$$

(2) 对每一个 $k>1$, 当 $z\to\infty$, $z\in\overline{S}(\theta_1+\varepsilon,\theta_2-\varepsilon)$, 有

$$|f^{(k)}(z)|\le\exp\{-(1+o(1))\alpha|z|^{\beta}\}.$$

下面的引理描述了函数 $e^{P(z)}$ 的性质, 其中 $P(z)$ 是一个线性多项式. 关于这类函数更一般的性质参看文献 [33, p. 254].

引理 2.6 设 $P(z)=(\alpha+i\beta)z$, 其中 α,β 是两个实数满足 $|\alpha|+|\beta|\neq 0$. 假设 $A(z)(\not\equiv 0)$ 是一个级小于 1 的亚纯函数. 令 $g(z)=A(z)e^{P(z)}$, $\delta(P,\theta)=\alpha\cos\theta-\beta\sin\theta$, 其中 $z=re^{i\theta}$, 则对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在一个集合 $E\subset(1,\infty)$, $\mathrm{m}(E)<\infty$, 使得对任意的 $\theta\in[0,2\pi)-H$, 有一个实数 $R>0$, 使得对所有满足 $|z|=r>R$ 及 $r\notin E$ 的 z, 有

(1) 如果 $\delta(P,\theta)>0$, 则

$$\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r\}<|g(re^{i\theta})|<\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r\};$$

(2) 如果 $\delta(P,\theta)<0$, 则

$$\exp\{(1+\varepsilon)\delta(P,\theta)r\}<|g(re^{i\theta})|<\exp\{(1-\varepsilon)\delta(P,\theta)r\},$$

其中 $H=\{\theta\in[0,2\pi):\delta(P,\theta)=0\}$.

3 定理的证明

定理 1 的证明 假设方程 (1.2) 有一个级为 $\varrho(f)(<\infty)$ 的非平凡解 f, 将看到一个矛盾. 对于给定的常数 $c\in(0,\frac{1}{4})$, 定义

$$I_c(r)=\{\theta\in[0,2\pi):\log|A(re^{i\theta})|\le(1-c)\log M(r,A)\}.$$

因为 $A(z)$ 在 $|z|=r\notin E$ 上满足条件 (1.1), 其中 $\overline{\log\mathrm{dens}}(E)=0$. 所以不难知道存在一个集合 $F_1\subset[1,\infty)$, $\underline{\log\mathrm{dens}}(F_1)=1$, 使得

$$\mathrm{m}(I_c(r))\to 0,\quad r\to\infty,\quad r\in F_1. \tag{3.1}$$

应用引理 2.2, 对常数 $M = \frac{3(\mu(A)+\mu(B))}{\mu(A)-\mu(B)}(>3)$, $\beta\in(0,1)$ 及 $r>0$, 存在一个常数 $\delta=\delta(M,\beta,\rho(f))>0$ 及一个集合 $F_2\subset[1,\infty)$, $\underline{\log\operatorname{dens}}(F_2)>1-\frac{3}{M}$, 使得对所有的 $r\in F_2$,

$$\mathrm{m}(U_r)>\delta, \tag{3.2}$$

其中

$$U_r=\left\{\theta\in[0,2\pi): r\left|\frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\right|\geq\beta n(r,0,f)\right\}.$$

结合 (3.1) 和 (3.2) 式, 存在 $\theta_0\in U_r-I_c(r)$, 对充分大的 $r\in F_1\cap F_2$, 有

$$r\left|\frac{f'(re^{i\theta_0})}{f(re^{i\theta_0})}\right|\geq\beta n(r,0,f).$$

使用类似于文献 [32, p. 426] 的推导, 不难得到方程 (1.2) 的任何非平凡解至少存在一个零点. 因此对 $\theta_0\in U_r-I_c(r)$, 及充分大的 $r\in F_1\cap F_2$, 有

$$r\left|\frac{f'(re^{i\theta_0})}{f(re^{i\theta_0})}\right|\geq\beta. \tag{3.3}$$

根据函数下级的定义, 对任意给定的 $\varepsilon\in\left(0,\min\{\frac{\mu(A)-\mu(B)}{2},\frac{\mu(B)(\mu(A)-\mu(B))}{(2+\mu(A))(\mu(A)+\mu(B))}\}\right)$, 存在常数 $r_0>1$, 使得对所有的 $r>r_0$,

$$\log M(r,A)>r^{\mu(A)-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

于是对 $\theta_0\in U_r-I_c(r)$, $r\in F_1\cap\{r:r\geq r_0\}$,

$$\log|A(re^{i\theta_0})|>(1-c)\log M(r,A)>(1-c)r^{\mu(A)-\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{3.4}$$

对于 $B(z)$, 存在一个无穷序列 (r_n), 当 $n\to\infty$, $r_n\to\infty$, 使得

$$\log M(r_n,B)<r_n^{\mu(B)+\varepsilon}.$$

令 $F_3=\bigcup\limits_n[r_n^{\frac{\mu(B)+\varepsilon}{\mu(A)-\varepsilon}},r_n]$, 则 $\overline{\log\operatorname{dens}}(F_3)\geq\frac{\mu(A)-\mu(B)-2\varepsilon}{\mu(A)-\varepsilon}$. 对所有 $r\in[r_n^{\frac{\mu(B)+\varepsilon}{\mu(A)-\varepsilon}},r_n]$, 有

$$\log M(r,B)\leq\log M(r_n,B)<r_n^{\mu(B)+\varepsilon}=\left(r_n^{\frac{\mu(B)+\varepsilon}{\mu(A)-\varepsilon}}\right)^{\mu(A)-\varepsilon}<r^{\mu(A)-\varepsilon}. \tag{3.5}$$

应用引理 2.1, 存在一个集合 $F_4\in(1,\infty)$, $\mathrm{m}_l(F_4)<\infty$, 使得对所有满足 $|z|=r\notin(F_4\cup[0,1])$ 的 z, 有

$$\left|\frac{f''(z)}{f(z)}\right|\leq|z|^{2\rho(f)}. \tag{3.6}$$

令 $F=F_1\cap\{r:r\geq r_0\}\cap F_2\cap F_3$. 通过计算知

$$\overline{\log\operatorname{dens}}(F)\geq\frac{\mu(A)-\mu(B)-2\varepsilon}{\mu(A)-\varepsilon}-\frac{3}{M}\geq\varepsilon>0.$$

所以在集合 $F-(F_4\cup[0,1])$ 中存在一个无穷数列 (t_j), 当 $j\to\infty$, $t_j\to\infty$, 使得 (3.3)–(3.6) 式成立. 于是结合方程 (1.2), 有

$$|A(t_je^{i\theta_0})|\left|\frac{f'(t_je^{i\theta_0})}{f(t_je^{i\theta_0})}\right|\le|B(t_je^{i\theta_0})|+\left|\frac{f''(t_je^{i\theta_0})}{f(t_je^{i\theta_0})}\right|,$$

从而有

$$\exp\{(1-c)t_j^{\mu(A)-\frac{\varepsilon}{2}}\}\frac{\beta}{t_j}\le\exp(t_j^{\mu(A)-\varepsilon})+t_j^{2\rho(f)}.$$

显然对充分大的 j, 这是一个矛盾, 所以定理得证.

定理 2 的证明 如果 $\rho(A)<\rho(B)$, 则定理的结论已被 Gundersen 证明文献 [32, 定理 2]. 因此假定 $\rho(A)>\rho(B)$. 假设方程 (1.2) 有一个级为 $\rho(f)(<\infty)$ 的非平凡解 f, 将得到一个矛盾. 由定理条件知 $A(z)$ 是方程 (1.3) 的一个非平凡解, 其中 $P(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$, $a_n\neq0$. 令 $\theta_j=\frac{2j\pi-\arg(a_n)}{n+2}$ 及 $S_j=\{z:\theta_j<\arg z<\theta_{j+1}\}$ $(j=0,1,2,\cdots,n+1)$, 其中 $\theta_{n+2}=\theta_0+2\pi$. 依据引理 2.3 分两种情形证明.

(1) 假设 $A(z)$ 在所有的 S_j $(j=0,1,\cdots,n+1)$ 里都以指数增长趋于无穷, 即对任意的 $\theta\in(\theta_j,\theta_{j+1})$, 有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log\log|A(re^{i\theta})|}{\log r}=\rho(A)=\frac{n+2}{2}, \tag{3.7}$$

则对任意给定的 $\varepsilon\in(0,\frac{\pi}{2\rho(A)})$ 和 $\eta\in(0,\frac{\rho(A)-\rho(B)}{4})$, 当 $z\to\infty$, $z\in S_j(\varepsilon)=\{z:\theta_j+\varepsilon<\arg z<\theta_{j+1}-\varepsilon\}$ $(j=0,1,\cdots,n+1)$, 有

$$|A(z)|\ge\exp\{(1+o(1))\alpha|z|^{\frac{n+2}{2}-\eta}\} \tag{3.8}$$

和

$$|B(z)|\le\exp(|z|^{\rho(B)+\eta})\le\exp(|z|^{\rho(A)-2\eta})\le\exp\{o(1)|z|^{\frac{n+2}{2}-\eta}\}, \tag{3.9}$$

其中 α 是一个依赖于 ε 的正常数. 结合 (3.8), (3.9) 式和引理 2.5, 存在一个相应的常数 $b_j\neq0$, 使得当 $z\to\infty$, $z\in S_j(\varepsilon)$ $(j=0,1,\cdots,n+1)$,

$$|f(z)-b_j|\le\exp\{-(1+o(1))\alpha|z|^{\frac{n+2}{2}-\eta}\}. \tag{3.10}$$

所以利用 Phragmén-Lindelöf 原理, f 在全平面上有界, 从而由 Liouville 定理知 f 是一个非零常数. 这与方程 (1.2) 没有任何非零常数解矛盾. 所以方程 (1.2) 的所有非平凡解都是无穷级.

(2) 假设在 $n+2$ 个角域 S_j $(0\le j_0\le n+1)$ 里至少存在一个角域使得 $A(z)$ 以指数增长趋于零, 不妨假设是 $S_{j_0}=\{z:\theta_{j_0}<\arg z<\theta_{j_0+1}\}$ $(0\le j_0\le n+1)$. 这就意味着对任意的 $\theta\in(\theta_{j_0},\theta_{j_0+1})$, 有

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log\log\frac{1}{|A(re^{i\theta})|}}{\log r}=\frac{n+2}{2}. \tag{3.11}$$

对给定的 $0 < d < \frac{1}{4}$, 定义

$$I_d(r) = \left\{\theta \in [0, 2\pi) : \log |B(re^{i\theta})| \leq (1-d) \log M(r, B)\right\}.$$

因为在集合 E 上 $B(z)$ 满足条件 (1.4), 令 $\zeta = \overline{\log \operatorname{dens}}(E) > 0$. 所以不难看到当 $r \to \infty$ 且 $r \in E$, 有 $\mathrm{m}(I_d(r)) \to 0$. 利用引理 2.1 和引理 2.4, 可以挑选一个无穷点列 $z_n = r_n e^{i\theta_0}$, 当 $n \to \infty$, $z_n \to \infty$, 且 $\theta_0 \in (\theta_{j_0}, \theta_{j_0+1}) - I_d(r)$, 使得 z_n 满足 (2.1), (3.11) 式和

$$(1-2d) \log M(r_n, B) < \log |B(r_n e^{i\theta_0})|.$$

结合上式与 (1.2), (2.1), (3.11) 式, 有

$$M(r_n, B)^{1-2d} \leq r_n^{2\rho(f)}(1 + |A(r_n e^{i\theta_0})|) \leq r_n^{2(\rho(f)+\varepsilon)},$$

因此 $M(r_n, B) \leq r_n^{4(\rho(f)+\varepsilon)}$. 这与 $B(z)$ 是超越整函数矛盾, 所以方程 (1.2) 的所有非平凡解都是无穷级.

定理 3 的证明 假设方程 (1.6) 有一个级为 $\rho(f)(< \infty)$ 的非平凡解 f, 将看到一个矛盾. 对给定的 $0 < l < 1$, 定义

$$I_l(r) = \left\{\theta \in [0, 2\pi) : \log |Q(re^{i\theta})| \leq (1-l) \log M(r, Q)\right\}.$$

因为在 $r \notin E$ 上 $Q(z)$ 对所有的 $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ 满足条件 (1.7), 其中 $\overline{\log \operatorname{dens}}(E) = 0$. 所以不难看到对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 当 $r \to \infty$ 且 $r \notin E$, 有 $\mathrm{m}(I_l(r)) < \frac{(1-\alpha+\varepsilon)}{l} 2\pi$. 因此对 $l \in (0,1)$ 充分接近 1, 则存在一个集合 $F_1 \subset [1, \infty)$, $\underline{\log \operatorname{dens}}(F_1) = 1$, 使得 $\mathrm{m}(I_l(r)) < \pi, \quad r \in F_1$. 结合引理 2.1, 存在一个无穷点列 $z_n = r_n e^{i\theta_0}$, 当 $n \to \infty$, $z_n \to \infty$ 且 $\theta_0 \notin I_l(r)$, 使得 (2.1) 式和

$$(1-l) \log M(r_n, Q) < \log |Q(r_n e^{i\theta_0})| \tag{3.12}$$

成立, 同时 $\delta(-z, \theta_0) < 0$, 利用引理 2.6,

$$\exp\{(1+\varepsilon)\delta(-z, \theta_0) r_n\} < |h(r_n e^{i\theta_0}) e^{-r_n e^{i\theta_0}}| < \exp\{(1-\varepsilon)\delta(-z, \theta_0) r_n\}. \tag{3.13}$$

结合 (1.6), (2.1), (3.12) 和 (3.13) 式, 对充分大的 n, 有

$$M(r_n, Q)^{1-l} \leq r_n^{2\rho(f)}(1 + |h(r_n e^{i\theta_0}) e^{-r_n e^{i\theta_0}}|) \leq r_n^{2(\rho(f)+\varepsilon)}.$$

因此对充分大的 n, 有

$$(1-l) \log M(r_n, Q) \leq 2(\rho(f)+\varepsilon) \log r_n.$$

这与 $Q(z)$ 是超越整函数矛盾, 所以方程 (1.6) 的所有非平凡解都是无穷级.

参 考 文 献

[1] Edrei A. Locally tauberian theorems for meromorphic functions of lower order less than one[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1969, 140: 309–332.

[2] Edrei A. Solution of the deficiency problem for functions of small lower order[J]. Proc. London Math. Soc., 1973, 26(3): 435–445.

[3] Kobayashi T. On the lower order of an entire function[J]. Kodai Math. Sem. Rep., 1976, 27: 484–495.

[4] Hayman W K. Meromorphic functions[M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[5] Yang L. Value distribution theory[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[6] Zhang G H. Theory of entire and meromorphic functions-deficient values, asymptotic values and singular directions[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[7] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations[M]. New York: Walter de Gruyter Berlin, 1993.

[8] Laine I. Complex differential equations[M]. Handbook of Differential Equations, Ordinary Differential Equations, Vol. 4, Amsterdam: Elsevier, 2008.

[9] Long J R, Qiu K E. On the growth of solutions of a class of second order complex linear differential equations (in Chinese)[J]. Math. Pract. The., 2015, 45(2): 243–247.

[10] Wu P C, Zhu J. On the growth of solutions of the complex differential equation $f''+Af'+Bf=0$[J]. Sci. China Ser. A, 2011, 54(5): 939–947.

[11] Wu X B, Long J R, Heittokangas J, Qiu K E. On second order complex linear differential equations with special functions or extremal functions as coefficients[J]. Elec. J. Differ. Equ., 2015, 2015(143): 1–15.

[12] Long J R. Growth of solutions of higher order complex linear differential equaitons in an angular domain (in Chinese)[J]. J. Math., 2015, 35(6): 1533–1540.

[13] Long J R, Wu P C, Zhang Z. On the growth of solutions of second order linear differential equations with extremal coefficiencts[J]. Acta Math. Sin. (Eng. Ser.), 2013, 29(2): 365–372.

[14] Tsuji M. Potential theory in modern function theory (2nd ed.)[M]. Tokyo: Maruzen, 1959.

[15] Laine I, Wu P C. Growth of solutions of second order linear differential equations[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 2000, 128(9): 2693–2703.

[16] Kwon K, Kim J. Maximum modulus, characteristic, deficiency and growth of solutions of second order linear differential equation[J]. Kodai Math. J., 2001, 24(3): 344–351.

[17] Miles J, Rossi J. Linear combinations of logarithmic derivatives of entire functions with applications to differential equations[J]. Pacific J. Math., 1996, 174(1): 195–214.

[18] Bank S, Laine I. On the oscillation theory of $f''+Af=0$ where A is entire[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1982, 273(1): 351–363.

[19] Hille E. Lectures On ordinary differential equations[M]. California, London, Don Mills, Ontario: Addison–Wesley Publiching Company, 1969.

[20] Amemiya I, Ozawa M. Non-existence of finite order solutions of $w''+e^{-z}w'+Q(z)w=0$[J]. Hokkaido Math. J., 1981, 10: 1–17.

[21] Frei M. Über die subnormalen Lösungen der Differentialgleichung $w''+e^{-z}w'+(\text{konst.})w=0$[J]. Comment. Math. Helv., 1962, 36: 1–8.

[22] Langley J. On complex oscillation and a problem of Ozawa[J]. Kodai Math. J., 1986, 9: 430–439.

[23] Ozawa M. On a solution of $w''+e^{-z}w'+(az+b)w=0$[J]. Kodai Math. J., 1980, 3: 295–309.

[24] Gundersen G G. On the question of whether $f''+e^{-z}f'+B(z)f=0$ can admit a solution $f\not\equiv 0$ of finite order[J]. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 1986, 102: 9–17.

[25] Chen Z X. The growth of solutions of $f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = 0$ where the order (Q)=1[J]. Sci. China Ser. A., 2002, 45(3): 290–300.

[26] Li Y Z, Wang J. Oscillation of solutions of linear differential equations[J]. Acta Math. Sin. (Eng. Ser.), 2008, 24(1): 167–176.

[27] Wang J, Laine I. Growth of solutions of second order linear differential equations[J]. J. Math. Anal. Appl., 2008, 342: 39–51.

[28] Steinmetz N. Zur wertverteilung von exponentialpolynomen[J]. Manuscripta Math., 1978, 26(1-2): 155–167.

[29] Ronkin L I. Functions of completely regular growth[M]. Translated from the Russian by Ronkin A and Yedvabnik I. Math. Appl. (Soviet Ser.), 81. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1992.

[30] Gundersen G G. Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates[J]. J. London Math. Soc. (2), 1988, 37(1): 88–104.

[31] Shin K C. New polynomials P for which $f'' + P(z)f = 0$ has a solution with almost all real zeros [J]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 2002, 27: 491–498.

[32] Gundersen G G. Finite order solutions of second order linear differential equations[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1988, 305(1): 415–429.

[33] Markushevich A. Theory of functions of a complex variable[M]. Vol. II, New York: Chelsea Publ., 1985.

SOME RESULTS ON THE GROWTH OF SOLUTIONS OF COMPLEX LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

LONG Jian-ren

(*School of Computer Science; School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China*)

(*School of Mathematical Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550001, China*)

Abstract: In this paper, we study the growth problem of solutions of two classes of second order linear differential equations. By assuming their coefficients which have the properties of asymptotic growth, we obtain that all nontrivial solutions are of infinite order, which improves and extends previous results.

Keywords: complex differential equations; entire functions; infinite order; lower order; asymptotic growth

2010 MR Subject Classification: 34M10; 30D35