Vol. 37 (2017)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

广义强向量拟均衡问题组解的存在性

赵亚莉, 沈 璐
(渤海大学数理学院, 辽宁 锦州 121013)

摘 要: 本文研究了一类集值广义强向量拟均衡问题组解的存在性问题. 利用集值映射的自然拟 C - 凸性和集值映射的下 $(-C)$ - 连续性的定义和 Kakutani-Fan-Glicksberg 不动点定理, 在不要求锥 C 的对偶锥 C^* 具有弱 * 紧基的情况下, 建立了该类集值广义强向量拟均衡问题组解的存在性定理. 所得结果推广了该领域的相关结果.

关键词: 集值广义强向量拟均衡问题组; 下 $(-C)$ - 连续性; 自然拟 C - 凸性; Kakutani-Fan-Glicksberg 不动点定理

MR(2010) **主题分类号**: 90C48; 49J45 **中图分类号**: O224

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2017)03-0527-06

1 引言

假设 X, Y_1, Y_2 和 Z 是实局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间, D 和 K 分别是 X 和 Z 的非空子集. 设 C_1, C_2 分别是 Y_1, Y_2 中顶点在原点的非空闭凸锥, C_i $(i=1,2)$ 分别定义了 Y_i $(i=1,2)$ 上的偏序 $z_i^1 \le z_i^2$ 当且仅当 $z_i^2 - z_i^1 \in C_i$ $(i=1,2)$. 设 $S: D\times K \to 2^D, P: D\times K \to 2^K, F_1: D\times K\times D \to 2^{Y_1}, F_2: D\times K\times K \to 2^{Y_2}$ 是四个非空集值映射. 本文考虑如下形式的集值广义强向量拟均衡问题组 (简称 SSGSVQEP): 找到 $(\bar{x},\bar{y}) \in D\times K$ 使得 $\bar{x}\in S(\bar{x},\bar{y}), \bar{y}\in P(\bar{x},\bar{y})$ 且满足

$$\begin{cases} F_1(\bar{x},\bar{y},x) \subset C_1, & \forall\, x\in S(\bar{x},\bar{y}),\\ F_2(\bar{x},\bar{y},y) \subset C_2, & \forall\, y\in P(\bar{x},\bar{y}).\end{cases}$$

如果 $F_2 = 0, S: D\to 2^D, P: D\to 2^K$, 则 (SSGSVQEP) 减化为集值广义强向量拟均衡问题 (简称 SGSVQEP): 找 $(\bar{x},\bar{y})\in D\times K$ 使得 $\bar{x}\in S(\bar{x}), \bar{y}\in P(\bar{x})$ 且

$$F_1(\bar{x},\bar{y},x)\subset C_1, \forall\, x\in\ S(\bar{x}).$$

如果 F_1 是单值映射, 则 (SGSVQEP) 减化为广义强向量拟均衡问题 (简称 GSVQEP): 找 $(\bar{x},\bar{y})\in D\times K$ 使得 $\bar{x}\in S(\bar{x}), \bar{y}\in P(\bar{x})$ 且 $F_1(\bar{x},\bar{y},x)\ge 0, \forall\, x\in\ S(\bar{x})$. 该问题分别在文献 [1, 2] 中被研究. 文献 [1] 的作者在不要求锥 C 的对偶锥 C^* 具有弱 * 紧基, 即等价于不要求 $\operatorname{int} C\neq\emptyset$ 的情况下, 利用不同于文献 [2] 的假设条件和证明方法, 得到了 (GSVQEP) 解的存在性和 Hadamard 适定性结果. 另外, 文献 [3] 的作者在 $\operatorname{int} C\neq\emptyset$ 的情况下, 利用在锥度量空间中给出的 Ekeland 变分原理, 得到了向量均衡问题解的存在性定理. 本文将文献 [1, 2]

*收稿日期: 2016-04-27 接收日期: 2016-09-13
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11371070).
作者简介: 赵亚莉 (1970–), 女, 辽宁朝阳, 教授, 主要研究方向: 变分不等式.

所考虑的问题 (GSVQEP) 推广到了集值广义强向量拟均衡问题组 (SSGSVQEP). 在不要求 C^* 具有弱 * 紧基的情况下, 利用 Kakutani-Fan-Glicksberg 不动点定理, 在一定的条件下, 建立了 (SSGSVQEP) 解的存在性定理, 所得结果推广了该领域的相关结果.

2 预备知识

首先回顾一些有关集值映射的基本概念和相关性质.

设 X 和 Y 是实局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间, A 和 B 分别是 X 和 Y 的非空凸子集. 称集值映射 $G: A \to 2^B$ 为闭映射当且仅当 $\mathrm{graph}(G) = \{(x,y): x \in A, y \in G(x)\}$ 是 $A \times B$ 中的一个闭集; 称集值映射 G 为紧映射当且仅当 $G(A)$ 的闭包, 即 $\overline{G(A)}$ 是紧集, 其中

$$G(A) = \bigcup_{x \in A} G(x).$$

定义 2.1 [4] 设 X 和 Z 是实 Hausdorff 拓扑向量空间, $A \subset X$ 是非空凸集, $C \subset Z$ 是锥, 设 $G: A \to 2^Z$ 是集值映射. G 称为在 $x \in A$ 处是上 (下) C - 连续的, 如果对 Y 中原点的任意邻域 V, 存在 x 的一个领域 U, 使得对任意的 $z \in U \bigcap A$, 有

$$G(z) \subset G(x) + V + C(G(x) \subset G(z) + V - C).$$

注 (a) G 称为在 A 上是上 (下)C - 连续的, 如果 G 在 A 中任一点处是上 (下) C - 连续的;

(b) G 称为在 A 上是 C - 连续的, 如果 G 在 A 上既是上 C - 连续的, 又是下 C - 连续的;

(c) 如果 G 是单值映射, 则定义 2.1 简化为文献 [1] 中的定义 1 及文献 [5] 中的相关概念.

定义 2.2 [6] 设 X 和 Y 是实局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间, A 和 B 分别是 X 和 Y 的非空子集, $G: A \to 2^B$ 是一个集值映射.

(i) 设 $x \in A$. 若对任意的开集 $U \supset G(x)$, 存在 x 的一个领域 V, 使得 $\bigcup\limits_{x \in A} G(x) := G(V) \subset U$, 则称 G 在 $x \in A$ 处是上半连续的. 若 G 在 A 中的每一点处都是上半连续的, 则称 G 在 A 上是上半连续的.

(ii) 设 $x \in A$. 若对任意的 $y \in G(x)$, y 的任意邻域 U, 存在 x 的一个邻域 V, 使得 $\forall x' \in V$, 有 $G(x') \cap U \neq \emptyset$, 则称 G 在 $x \in A$ 处是下半连续的. 若 G 在 A 中的每一点处都是下半连续的, 则称 G 在 A 上是下半连续的.

(iii) 若 G 在 A 上既是上半连续的, 又是下半连续的, 则称 G 在 A 上是连续的.

引理 2.3 [6] 设 X 和 Y 是实局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间, A 和 B 分别是 X 和 Y 的非空子集, $G: A \to 2^B$ 是一个集值映射.

(i) 若 G 是上半连续的, 且对任意的 $x \in A$, $G(x)$ 是一个闭集, 则 G 是一个闭映射.

(ii) 若 G 在 $x \in A$ 处是下半连续的, 当且仅当对任意的 $y \in G(x)$, 对任意的网 $\{x_n\}, x_n \to x$, 存在一个子网 $\{y_{n_k}\}$, 使得 $y_{n_k} \in G(x_{n_k}), y_{n_k} \to y (k \to \infty)$.

为了得到主要结果, 还需下面的定义和引理.

定义 2.4 设 (Z, C) 是一个实局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间, 其上的偏序结构由 C 诱导, A 是实局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间 X 的非空凸子集, $G: A \to 2^Z$ 是一个集值映射.

(i) 若 $\forall x_1, x_2 \in A$, $\lambda \in [0,1]$, 有 $G(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \subset \lambda G(x_1) + (1-\lambda) G(x_2) - C$, 则称 G 在 A 上是 C - 凸的.

(ii) 若 $\forall x_1,x_2\in A,\ \ \lambda\in[0,1]$, 有 $G(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\subset G(x_1)-C$ 或 $G(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\subset G(x_2)-C$, 则称 G 在 A 上是真拟 C - 凸的.

(iii) 若 $\forall x_1,x_2\in A,\ \ \lambda\in[0,1]$, 存在 $\mu\in[0,1]$ 使得 $G(\lambda x_1+(1+\lambda)x_2)\subset[\mu G(x_1)+(1-\mu)G(x_2)]-C$, 则称 G 在 A 上是自然拟 C - 凸的.

注 (a) 定义 2.4 的 (i)–(iii) 把文献 [7] 中的相应定义推广到了集值映射的情形;

(b) 事实上, 对于单值映射的情形, 每个 C - 凸或真拟 C - 凸映射都是自然拟 C - 凸映射, 具体证明可参见文献 [7], 集值映射的情形亦然, 证明略.

引理 2.5 [6] 设 X 和 Y 是实局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间, $A\subset X,B\subset Y$, 且 A 是紧集, 则集值映射 $G:A\to 2^B$ 是上半连续的且具有紧值当且仅当 G 是一个闭映射.

下面给出 Kakutani-Fan-Glicksberg 不动点定理, 它是证明过程中用到的重要工具.

引理 2.6 [8] 设 X 是实局部凸 Hausdorff 向量空间, $A\subset X$ 是非空紧凸子集. 若 $G:A\to 2^A$ 是上半连续的, 且 $\forall x\in A,G(x)$ 是非空闭凸子集, 则 G 在 A 中有一个不动点.

3 (SSGSVQEP) 解的存在性

定理 3.1 设 X,Y_1,Y_2 和 Z 是实局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间, D 和 K 分别是 X 和 Z 的非空紧凸子集, C_1,C_2 分别是 Y_1,Y_2 中顶点在原点的非空闭凸锥. 设 $S:D\times K\to 2^D,P:D\times K\to 2^K,F_1:D\times K\times D\to 2^{Y_1},F_2:D\times K\times K\to 2^{Y_2}$ 是四个非空集值映射. 假设下列条件满足:

(i) $\forall\,(x,y)\in D\times K,u,v\in\ S(x,y),w,q\in\ P(x,y),F_1(v,y,u)\subset C_1,F_2(x,w,q)\subset C_2$;

(ii) $\forall\,(x,y,u,q)\in\ D\times K\times D\times K,-F_1(\cdot,y,u),-F_2(x,\cdot,q)$ 分别是自然拟 C_1, C_2- 凸的;

(iii) F_1 是下 $(-C_1)-$ 连续的, F_2 是下 $(-C_2)$ - 连续的;

(iv) 集值映射 $S:D\times K\to 2^D,P:D\times K\to 2^K$ 连续且具有非空闭凸值.

则 (SSGSVQEP) 有解, 即存在 $(\bar{x},\bar{y})\in D\times K$ 使得 $\bar{x}\in S(\bar{x},\bar{y}),\bar{y}\in P(\bar{x},\bar{y})$, 且

$$\begin{cases}F_1(\bar{x},\bar{y},x)\subset C_1, & \forall\,x\in S(\bar{x},\bar{y}),\\ F_2(\bar{x},\bar{y},y)\subset C_2, & \forall\,y\in P(\bar{x},\bar{y}).\end{cases}$$

证 对任意的 $(x,y)\in D\times K$, 定义集值映射 $A:D\times K\to 2^D$ 和 $B:D\times K\to 2^K$ 如下:

$$A(x,y)=\{v\in S(x,y):F_1(v,y,u)\subset C_1,\forall\,u\in S(x,y)\},$$
$$B(x,y)=\{w\in P(x,y):F_2(x,w,q)\subset C_2,\forall\,q\in P(x,y)\}.$$

如果能证得集值映射 $A\times B:D\times K\to 2^{D\times K},(A\times B)(x,y)=(A(x,y),B(x,y)),\forall\,(x,y)\in D\times K$, 有不动点 $(\bar{x},\bar{y})\in D\times K$, 则 $(\bar{x},\bar{y})$ 就是所求问题的解. 为此, 把证明分为以下几个步骤.

(a) 首先证明 $\forall(x,y)\in D\times K$, $A(x,y),B(x,y)$ 分别是 D 和 K 中的非空凸子集.

事实上, 因为 $\forall(x,y)\in D\times K$, $S(x,y),P(x,y)$ 是非空的, 由条件 (i) 可知 $A(x,y),B(x,y)$ 是非空的. 又对任意的 $v_1,v_2\in A(x,y),\lambda\in[0,1]$, 根据 $A(x,y)$ 的定义可得 $v_1,v_2\in S(x,y)$ 且

$$\begin{cases}F_1(v_1,y,u)\subset C_1, & \forall\,u\in S(x,y),\\ F_1(v_2,y,u)\subset C_1, & \forall\,u\in S(x,y).\end{cases}\tag{3.1}$$

因为 $S(x,y)$ 是凸集, 由 $v_1,v_2\in S(x,y)$ 可知 $\lambda v_1+(1-\lambda)v_2\in S(x,y)$. 又因为 $-F_1(\cdot,y,u)$ 是自然拟 C_1 - 凸的, 所以存在 $\mu\in[0,1]$, 使得

$$-F_1(\lambda v_1+(1-\lambda)v_2,y,u)\subset\mu(-F_1(v_1,y,u)+(1-\mu)(-F_1(v_2,y,u))-C_1.$$

由式 (3.1) 和 C_1 的锥凸性可得

$$\begin{aligned}F_1(\lambda v_1+(1-\lambda)v_2,y,u)&\subset\mu(F_1(v_1,y,u)+(1-\mu)F_1(v_2,y,u)+C_1\\&\subset C_1+C_1+C_1\subset C_1.\end{aligned}$$

从而 $\lambda v_1+(1-\lambda)v_2\in A(x,y)$, 故 $A(x,y)$ 是一个凸集. 同理可证 $B(x,y)$ 也是一个凸集.

(b) 下证 $\forall(x,y)\in D\times K$, $A(x,y),B(x,y)$ 是闭集.

设 $\{v_n\}\subset A(x,y),v_n\to\bar v(n\to\infty)$. 只需证明 $\bar v\in A(x,y)$. 由 $\{v_n\}\subset A(x,y)$ 可知 $v_n\in S(x,y)$ 且

$$F_1(v_n,y,u)\subset C_1,\quad\forall u\in S(x,y).\tag{3.2}$$

因为 $S(x,y)$ 是一个闭集, 由 $v_n\in S(x,y)$ 和 $v_n\to\bar v$ 可知 $\bar v\in S(x,y)$. 因此, 下面只需证明 $F_1(\bar v,y,u)\subset C_1,\forall u\in S(x,y)$. 用反证法, 假设存在 $\bar u\in S(x,y)$, 使得 $F_1(\bar v,y,\bar u)\not\subseteq C_1$, 即存在 $w\in F_1(\bar v,y,\bar u)$ 但 $w\notin C_1$. 因为 C_1 是一个闭凸锥, 所以存在 Y_1 中原点的一个邻域 U_1, 使得

$$(w+U_1)\bigcap(C_1+U_1)=\emptyset.\tag{3.3}$$

因为 $F_1(\cdot,y,\bar u)$ 是下 $(-C_1)$ - 连续的, 所以对 Y_1 中原点的任一邻域. 不妨设为 U_1, 存在 $\bar v$ 的一个邻域 V_1 使得对任意的 $v\in V_1$, 有

$$F_1(\bar v,y,\bar u)\subset F_1(v,y,\bar u)+U_1+C_1.$$

又因为 $v_n\to\bar v$, 所以存在 $N_0\in N$(自然数集) 使得

$$F_1(\bar v,y,\bar u)\subset F_1(v_n,y,\bar u)+U_1+C_1,\forall n\geq n_0.\tag{3.4}$$

由式 (3.2)、式 (3.4) 和 C_1 的锥凸性得

$$\begin{aligned}F_1(\overline{v},y,\overline{u})&\subset F_1(v_n,y,\overline{u})+U_1+C_1\\&\subset C_1+U_1+C_1\\&= C_1+U_1\ \ (\forall n\geq n_0).\end{aligned}$$

从而 $w\in C_1+U_1$ 与式 (3.3) 矛盾. 故 $\forall(x,y)\in D\times K,A(x,y)$ 是一个闭集, 同理可证 $\forall(x,y)\in D\times K,B(x,y)$, 也是一个闭集.

(c) 下证集值映射 A,B 是上半连续的.

因为 $A\times B$ 是紧集, 由引理 2.5 可知, 只需证明集值映射 A,B 分别是闭映射即可. 先证 A 是一个闭映射. 令 $\{(x_n,y_n,v_n):n\in N\}\subset\mathrm{Graph}(A),(x_n,y_n,v_n)\to(x,y,v)(n\to\infty)$. 只需证 $(x,y,v)\in\mathrm{Graph}(A)$, 即证 $v\in S(x,y),F_1(v,y,u)\subset C_1,\forall u\in S(x,y)$. 由 $\{(x_n,y_n,v_n):n\in N\}\subset\mathrm{Graph}(A)$ 可知 $v_n\in S(x_n,y_n)$ 且

$$F_1(v_n,y_n,u)\subset C_1,\quad\forall u\in S(x_n,y_n).\tag{3.5}$$

由 $v_n \in S(x_n, y_n)$ 可知

$$\{(x_n, y_n, v_n) : n \in N\} \subset \mathrm{Graph}(S). \tag{3.6}$$

因为 S 是上半连续的, $\forall (x,y) \in D \times K, S(x,y)$ 是闭集, 所以由引理 2.3 的结论 (i) 可知 S 是一个闭映射. 由式 (3.6) 和 $(x_n, y_n, v_n) \to (x, y, v)(n \to \infty)$ 可得 $(x,y,v) \in \mathrm{Graph}(S)$, 即 $v \in S(x,y)$. 因此下面只需证明 $F_1(v,y,u) \subset C_1, \forall u \in S(x,y)$. 用反证法, 假设存在 $\bar{u} \in S(x,y)$ 使得 $F_1(v,y,\bar{u}) \not\subseteq C_1$, 即存在 $w \in F_1(v,y,\bar{u})$ 但 $w \notin C_1$. 因为 C_1 是一个闭锥, 所以存在 Y_1 中原点的某个邻域 U_1, 使得

$$(w + U_1) \bigcap (C_1 + U_1) = \emptyset. \tag{3.7}$$

因为 S 在 (x,y) 点处是下半连续的, $(x_x, y_n) \to (x,y)$ 及 $\bar{u} \in S(x,y)$, 由引理 2.3 的结论 (ii) 可知存在网 $\{u_n\}$ 满足 $u_n \in S(x_n, y_n)$ 且 $u_n \to \bar{u}$. 由式 (3.5) 和 $(v_n, y_n) \to (v, y)$ 可得 $(v_n, y_n, u_n) \to (v, y, \bar{u})$, 且

$$F_1(v_n, y_n, u_n) \subset C_1. \tag{3.8}$$

因为 $F_1(\cdot,\cdot,\cdot)$ 是下 $(-C_1)$ - 连续的, 所以对 Y_1 中原点的任意邻域 U_1, 存在 $(v,y,\bar{u})$ 的一个邻域 V_1, 使得对任意的 $(v', y', u') \in V_1$, 有 $F_1(v,y,\bar{u}) \subset F_1(v', y', u') + U_1 + C_1$. 又因为 $(v_n, y_n, u_n) \to (v, y, \bar{u})$, 所以存在 $n_0 \in N$, 使得

$$F_1(v,y,\bar{u}) \subset F_1(v_n, y_n, u_n) + U_1 + C_1, \forall n \geq n_0. \tag{3.9}$$

由式 (3.8), (3.9) 和 C_1 的锥凸性可得

$$\begin{aligned} F_1(v,y,\bar{u}) &\subset F_1(v_n, y_n, u_n) + U_1 + C_1 \\ &\subset C_1 + U_1 + C_1 \\ &\subset C_1 + U_1 (n \geq n_0). \end{aligned}$$

从而 $w \in F_1(v,y,\bar{u}) \subset C_1 + U_1$ 与式 (3.7) 矛盾. 故 $F_1(v,y,u) \subset C_1, \forall u \in S(x,y)$, 即 A 是上半连续的. 同理可知 B 也是上半连续的.

(d) 下证 (SSGSVQEP) 有解.

定义集值映射 $H : D \times K \to 2^{D \times K}$ 如下

$$H(x,y) = (A \times B)(x,y) = (A(x,y), B(x,y)), \forall (x,y) \in D \times K.$$

因为集值映射 A, B 都是上半连续的, 所以 H 也是上半连续的. 又因为 $\forall (x,y) \in D \times K, A(x,y), B(x,y)$ 都是非空闭凸集. 根据引理 2.6 可知存在 $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$, 使得 $(\bar{x}, \bar{y}) \in H(\bar{x}, \bar{y})$, 即存在 $(\bar{x}, \bar{y}) \in D \times K$, 使得 $\bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), \bar{y} \in P(\bar{x}, \bar{y})$ 且满足

$$\begin{cases} F_1(\bar{x}, \bar{y}, u) \subset C_1, & \forall u \in S(\bar{x}, \bar{y}), \\ F_2(\bar{x}, \bar{y}, q) \subset C_2, & \forall q \in P(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases}$$

即 (SSGSVQEP) 有解. 证毕.

参 考 文 献

[1] 曾静, 彭再云, 张石生. 广义强向量拟平衡问题解的存在性和 Hadamard 适定性 [J]. 应用数学和力学, 2015, 36(6): 651–658.

[2] Hou S H, Gong X H, Yang X M. Existence and stability of solutions for generalized K_y Fan inequality problems with trifunctions[J]. J. Optim. The. Appl., 2010, 146(2): 387–398.

[3] 王月虎, 张从军. 锥度量空间中基于 Ekeland 变分原理的向量均衡问题的解的存在性 (英文)[J]. 数学杂志, 2015, 35(4): 825–832.

[4] Fu J Y, Wang S H, Li Q Y. On systems of quasivariational inclusion problems[J]. Adv. Math., 2011, 40(5): 606–620.

[5] Luc D T. Theory of vector optimization[M]. Lecture Notes Econ. Math. Sys., New York: Springer, 1989.

[6] Aubin J P, Ekeland I. Applied nonlinear analysis[M]. New York: Wiley, 1984.

[7] Tanaka T. Generalized quasiconvexities, cone saddle points and minimax theorems for vector-valued functions[J]. J. Optim. The. Appl., 1994, 81(2): 355–377.

[8] Glicksberg I L. A further generalization of the Kakutani fixed point theorem with application to Nash equilibrium points[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1952, 3(1): 170–174.

EXISTENCE OF SOLUTIONS TO A SYSTEM OF GENERALIZED STRONG VECTOR QUASI-EQUILIBRIUM PROBLEMS WITH SET-VALUED MAPPINGS

ZHAO Ya-li, SHEN Lu

(*College of Mathematics and Physics, Bohai University, Jinzhou 121013, China*)

Abstract: In this paper, we study existence of solutions to a system of generalized strong vector quasi-equilibrium problems with set-valued mappings. By making use of definitions of natural quasi C-convexity and lower $(-C)$-continuity of a set-valued mapping and Kakutani-Fan-Glicksberg fixed point theorem, an existence theorem for solutions to the systems of generalized strong vector quasi-equilibrium problems with set-valued mappings (for short, SSGSVQEP) was established without the assumption that the dual of the ordering cone has a weak* compact base, which extends and improves the corresponding results in this area.

Keywords: system of generalized strong vector quasi-equilibrium problems with set-valued mappings; lower $(-C)$ -continuity; natural quasi C-convexity; Kakutani-Fan-Glicksberg fixed point theorem

2010 MR Subject Classification: 90C48; 49J45