一类奇异共振椭圆方程正解的唯一性

廖家锋, 陈明, 张鹏

(遵义师范学院数学与计算科学学院, 贵州 遵义 563002)

摘要: 本文研究了一类奇异椭圆方程的共振问题. 利用变分方法, 获得了该问题正解的唯一性, 推广了 Pino^[3] 的结果.

关键词: 奇异椭圆方程; 共振; 正解; 唯一性; 变分法

MR(2010) 主题分类号: 35A01; 35J75

中图分类号: O175.25

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2017)03-0513-06

1 引言与主要结果

考虑如下奇异椭圆方程的共振问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + g(x)u^{-\gamma}, & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 3)$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, $0 < \gamma < 1, \lambda > 0$ 是两个正常数, 系数函数 $g \in L^{\frac{2^*}{2^*-\gamma-1}}(\Omega)$ 且 $g \geq 0, g \neq 0$, 这里 $2^* = \frac{2N}{N-2}$ 为 Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega)$ 嵌入到 $L^p(\Omega) (p \in [1, \frac{2N}{N-2}])$ 的临界 Sobolev 指数. 记 $\|u\| := \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ 为空间 $H_0^1(\Omega)$ 的范数, $|\cdot|_s = \left(\int_{\Omega} |u|^s dx\right)^{\frac{1}{s}}$ 为空间 $L^s(\Omega) (s \in (0, \infty))$ 的范数.

自 1977 年 Crandall, Rabinowitz 和 Tartar 在文献 [1] 利用上下解方法获得了一类奇异椭圆问题解的存在性, 随后奇异椭圆问题逐渐引起人们的关注, 如文献 [2-11]. 由于奇异项产生的困难, 使得该问题的研究发展相对缓慢. 对于奇异次线性椭圆问题, 人们借助上下解方法获得该问题经典解的存在性, 如文献 [1-4, 9, 10] 及其参考文献. 这里称 u 为经典解, 是指 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. 而对于奇异超线性椭圆问题, 人们利用变分方法, 截断技术结合临界点理论获得该问题弱解的存在性及多重性, 如文献 [5-8] 及其参考文献. 受前人的启发, 在前期的工作 (如文献 [4, 9, 10]) 基础上研究了问题 (1.1) 解的存在性. 据查阅文献所知, 有关共振的奇异椭圆问题还没有被研究过.

对任意的 $u \in H_0^1(\Omega)$, 定义问题 (1.1) 对应的能量泛函为

$$I_{\lambda}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx - \frac{1}{1-\gamma} \int_{\Omega} g(x)|u|^{1-\gamma} dx.$$

*收稿日期: 2015-03-07

接收日期: 2015-07-06

基金项目: 贵州省科学技术科学基金资助 (LKZS[2014]22; LH[2015]7049).

作者简介: 廖家锋 (1983-), 男, 河南信阳, 副教授, 主要研究方向: 非线性分析.

由于奇异项产生的困难, 能量泛函 I_λ 不是 F -可微的, 从而相关的临界点理论不能直接应用于寻求问题 (1.1) 的解. 称 u 是问题 (1.1) 的一个弱解, 如果 $u \in H_0^1(\Omega)$ 使得在 Ω 中 $u > 0$ 且满足如下等式

$$\int_{\Omega} (\nabla u, \nabla \phi) dx - \lambda \int_{\Omega} u \phi dx - \int_{\Omega} g(x) u^{-\gamma} \phi dx = 0, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \quad (1.2)$$

这里遇到的主要困难是证明能量泛函 I_λ 的极小值点为问题 (1.1) 的解. 受文献 [5] 的启发, 结合变分方法和分析技巧克服了这个困难, 获得了问题 (1.1) 的一个正解, 而且进一步证明了正解的唯一性以及该解为基态解. 这里称 u 是问题 (1.1) 的基态解, 是指使得能量泛函 I_λ 达到最小值的解.

记 $\lambda_1 > 0$ 为如下特征值问题的第一个特征值

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

以下是本文的主要结果.

定理 1 假设 $0 < \gamma < 1, 0 < \lambda < \lambda_1, g \in L^{\frac{2^*}{2^*+\gamma-1}}(\Omega)$ 且 $g \geq 0, g \not\equiv 0$, 则问题 (1.1) 有唯一的正解, 且该解为基态解.

2 定理 1 的证明

在给出本文的主要结果之前, 先给出如下一个重要引理.

引理 2.1 假设 $0 < \gamma < 1, 0 < \lambda < \lambda_1$, 则泛函 I_λ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中能达到全局极小值点, 即存在一个 $u_* \in H_0^1(\Omega)$ 使得 $I_\lambda(u_*) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} I_\lambda(u)$.

证 由 Poincaré 不等式可知

$$\lambda_1 |u|_2^2 \leq \|u\|^2,$$

再由 Hölder 不等式以及 Sobolev 不等式可得

$$\int_{\Omega} g(x) |u|^{1-\gamma} dx \leq |g|_{\frac{2^*}{2^*+\gamma-1}} |u|_{2^*}^{1-\gamma} \leq C |g|_{\frac{2^*}{2^*+\gamma-1}} \|u\|^{1-\gamma}, \quad (2.1)$$

从而有

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &\geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{\lambda}{2\lambda_1} \|u\|^2 - C |g|_{\frac{2^*}{2^*+\gamma-1}} \|u\|^{1-\gamma} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} \right) \|u\|^2 - C |g|_{\frac{2^*}{2^*+\gamma-1}} \|u\|^{1-\gamma}. \end{aligned}$$

由于 $0 < \lambda < \lambda_1$ 以及 $0 < \gamma < 1$, 从而可得 I_λ 在 $H_0^1(\Omega)$ 空间上是强制且下方有界的. 因此 $\inf_{u \in H_0^1(\Omega)} I_\lambda(u)$ 是有定义的. 不妨记 $m = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} I_\lambda(u)$, 则由上讨论可知 $m < 0$. 依据下确界的定义, 存在一个极小化序列 $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_\lambda(u_n) = m < 0$. 因为 $I_\lambda(|u_n|) = I_\lambda(u_n)$, 从而不妨假设 $u_n \geq 0$. 显然 $\{u_n\}$ 是有界的, 从而存在子列不妨仍记为 $\{u_n\}$ 以及 $u_* \geq 0$ 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, 在 $H_0^1(\Omega)$ 中 $u_n \rightharpoonup u_*$, 在 $L^p(\Omega) (1 \leq p < 2^*)$ 中 $u_n \rightarrow u_*$, 在 Ω 中 $u_n(x) \rightarrow u_*(x)$ 几乎处处成立. 从而只需要证明当 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n \rightarrow u_*$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中成立. 不妨记 $w_n = u_n - u_*$, 则只需证明当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\|w_n\| \rightarrow 0$.

首先利用 Vitali 定理 (见文献 [12] P. 133), 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(x)|u_n|^{1-\gamma} dx = \int_{\Omega} g(x)|u_*|^{1-\gamma} dx. \tag{2.2}$$

事实上, 只需要证明 $\{\int_{\Omega} g(x)|u_n|^{1-\gamma} dx, n \in N\}$ 是等度绝对连续的. 由 $\{u_n\}$ 的有界性, 依据 Sobolev 嵌入定理可得存在一个 $C_1 > 0$ 使得 $|u_n|_{2^*} \leq C_1 < \infty$. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 给定的 $\delta > 0$, 当 $E \subset \Omega$ 且 $\text{meas}(E) < \delta$, 根据 (2.1) 式可得

$$\begin{aligned} \int_E g(x)|u_n|^{1-\gamma} dx &\leq |u_n|_{2^*}^{1-\gamma} \left(\int_E |g(x)|^{\frac{2^*}{2^*+\gamma-1}} dx \right)^{\frac{2^*+\gamma-1}{2^*}} \\ &\leq C_1^{1-\gamma} \left(\int_E |g(x)|^{\frac{2^*}{2^*+\gamma-1}} dx \right)^{\frac{2^*+\gamma-1}{2^*}} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

其中最后一个不等式依据 $\int_E |g(x)|^{\frac{2^*}{2^*+\gamma-1}} dx$ 的绝对连续性. 再根据范数的弱下半连续性可得

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla w_n|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u_*|^2 dx + o(1). \tag{2.3}$$

因此依据 (2.2) 式和 (2.3) 式, 可得

$$m = \lim_{n \rightarrow \infty} I_{\lambda}(u_n) = I_{\lambda}(u_*) + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|^2 = I_{\lambda}(u_*) + \frac{1}{2} l^2,$$

其中记 $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n\|$.

一方面, 若 $l = 0$, 则 $u_n \rightarrow u_*$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中成立. 另一方面, 若 $l > 0$, 推得 $I_{\lambda}(u_*) < m$, 这与 m 的定义矛盾. 从而证得当 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n \rightarrow u_*$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中成立, 且 $I_{\lambda}(u_*) = m$. 引理 2.1 证毕.

下面给出本文的主要结果定理 1 的证明.

定理 1 的证明 依据引理 2.1, 我们只需证明 u_* 是问题 (1.1) 的正解. 由于 $I_{\lambda}(u_*) = m < 0$, 显然可得在 Ω 中 $u_*(x) \not\equiv 0$. 下面分三步来完成定理的证明.

第一步 证明 u_* 是问题 (1.1) 的正解. 从引理 2.1 可知, 在 Ω 中 $u_*(x) \geq 0$, 则 $\forall \phi \in H_0^1(\Omega), \phi \geq 0, t > 0, t \in \mathbb{R}$, 使得 $(u_* + t\phi) \in H_0^1(\Omega)$, 从而有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{I_{\lambda}(u_* + t\phi) - I_{\lambda}(u_*)}{t} \\ &= \int_{\Omega} (\nabla u_*, \nabla \phi) dx - \frac{\lambda}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \frac{(u_* + t\phi)^2 - u_*^2}{t} dx \\ &\quad - \frac{1}{1-\gamma} \limsup_{t \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} g(x) \frac{(u_* + t\phi)^{1-\gamma} - u_*^{1-\gamma}}{t} dx. \end{aligned} \tag{2.4}$$

由中值定理可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{(u_* + t\phi)^2 - u_*^2}{t} dx &= \int_{\Omega} (u_* + \eta t\phi) \phi dx, \\ \frac{1}{1-\gamma} \int_{\Omega} g(x) \frac{(u_* + t\phi)^{1-\gamma} - u_*^{1-\gamma}}{t} dx &= \int_{\Omega} g(x) (u_* + \theta t\phi)^{-\gamma} \phi dx, \end{aligned}$$

其中当 $t \rightarrow 0^+$ 时, $\theta \rightarrow 0^+$, $\eta \rightarrow 0^+$, 且 $(u_* + \theta t\phi)^{-\gamma}\phi \rightarrow u_*^{-\gamma}\phi$ 和 $(u_* + \eta t\phi)\phi \rightarrow u_*\phi$ 在 Ω 中几乎处处成立. 由于 $\forall x \in \Omega$, 有 $(u_* + \theta t\phi)^{-\gamma}\phi \geq 0$, $g(x) \geq 0$, 从而由 Fatou 引理可得

$$\begin{aligned} & \limsup_{t \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} g(x) \frac{(u_* + \phi)^{1-\gamma} - u_*^{1-\gamma}}{t} dx \\ & \geq \liminf_{t \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} g(x) \frac{(u_* + \phi)^{1-\gamma} - u_*^{1-\gamma}}{t} dx \\ & = (1 - \gamma) \liminf_{t \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} g(x) (u_* + \theta t\phi)^{-\gamma} \phi dx \\ & \geq (1 - \gamma) \int_{\Omega} g(x) u_*^{-\gamma} \phi dx. \end{aligned} \quad (2.5)$$

而由 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} \frac{(u_* + t\phi)^2 - u_*^2}{t} dx = \int_{\Omega} u_* \phi dx. \quad (2.6)$$

因此从 (2.4)–(2.6) 式, 对任意的 $\phi \in H_0^1(\Omega)$ 以及 $\phi > 0$, 有

$$\int_{\Omega} (\nabla u_*, \nabla \phi) dx - \lambda \int_{\Omega} u_* \phi dx - \int_{\Omega} g(x) u_*^{-\gamma} \phi dx \geq 0. \quad (2.7)$$

先证 u_* 是问题 (1.1) 的解. 事实上, 依据弱解的定义, 只需证明 u_* 满足 (1.2) 式成立. 从 (2.7) 式可知, 仅需证明 (2.7) 式对一切的 $\phi \in H_0^1(\Omega)$ 都成立. 由 u_* 定义可知存在一个 $\delta \in (0, 1)$ 使得对一切的 $|t| \leq \delta$ 有 $(u_* + tu_*) \in H_0^1(\Omega)$. 定义 $\varphi: [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$, 记为 $\varphi(t) := I_{\lambda}(u_* + tu_*)$, 则 φ 在 $t = 0$ 时达到最小值, 即

$$\varphi'(0) = \|u_*\|^2 - \lambda \int_{\Omega} u_*^2 dx - \int_{\Omega} g(x) u_*^{1-\gamma} dx = 0. \quad (2.8)$$

受文献 [5] 的启发, 假设 $\phi \in H_0^1(\Omega)$ 和 $\varepsilon > 0$, 定义 $\Psi := (u_* + \varepsilon\phi)^+$, 其中 $(u_* + \varepsilon\phi)^+ = \max\{u_* + \varepsilon\phi, 0\}$. 显然 $\Psi \geq 0$. 在 (2.7) 式中用 Ψ 替代 ϕ , 结合 (2.9) 式可得

$$\begin{aligned} 0 & \leq \int_{\Omega} (\nabla u_*, \nabla \Psi) dx - \lambda \int_{\Omega} u_* \Psi dx - \int_{\Omega} g(x) u_*^{-\gamma} \Psi dx \\ & = \int_{\Omega_1} (\nabla u_*, \nabla (u_* + \varepsilon\phi)) dx - \lambda \int_{\Omega_1} u_* (u_* + \varepsilon\phi) dx - \int_{\Omega_1} g(x) u_*^{-\gamma} (u_* + \varepsilon\phi) dx \\ & = \|u_*\|^2 - \lambda \int_{\Omega} u_*^2 dx - \int_{\Omega} g(x) u_*^{1-\gamma} dx + \varepsilon \int_{\Omega} [(\nabla u_*, \nabla \phi) - \lambda u_* \phi - g(x) u_*^{-\gamma} \phi] dx \\ & \quad - \int_{\Omega_2} (\nabla u_*, \nabla (u_* + \varepsilon\phi)) dx + \int_{\Omega_2} [\lambda u_* (u_* + \varepsilon\phi) + g(x) u_*^{-\gamma} (u_* + \varepsilon\phi)] dx \\ & < \varepsilon \int_{\Omega} [(\nabla u_*, \nabla \phi) - \lambda u_* \phi - g(x) u_*^{-\gamma} \phi] dx - \varepsilon \int_{\Omega_2} (\nabla u_*, \nabla \phi) dx, \end{aligned}$$

其中 $\Omega_1 = \{u_* + \varepsilon\phi > 0\}$, $\Omega_2 = \{u_* + \varepsilon\phi \leq 0\}$. 因为当 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时, $\text{meas}(\Omega_2) \rightarrow 0$, 则上式两边同时除以 ε 并让 $\varepsilon \rightarrow 0^+$, 有

$$\int_{\Omega} (\nabla u_*, \nabla \phi) dx - \lambda \int_{\Omega} u_* \phi dx - \int_{\Omega} g(x) u_*^{-\gamma} \phi dx \geq 0, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

因此不等式对 $-\phi$ 也成立, 从而可得 u_* 满足 (1.2) 式, 即 u_* 是问题 (1.1) 的解. 由于 $u_* \geq 0, u_* \neq 0$, 根据强极大值原理可知 $u_* > 0$ 在 Ω 几乎处处成立. 从而 u_* 是问题 (1.1) 的正解.

第二步 证明 u_* 是问题 (1.1) 的基态解. 我们断言 u_* 是问题 (1.1) 的能量最小的解, 即基态解. 事实上, 根据引理 2.1 可得, 能量泛函 I_λ 在 $H_0^1(\Omega)$ 上强制, 且 $I_\lambda(u_*) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} I_\lambda(u)$. 显然, $I_\lambda(u_*)$ 的能量最小, 即 u_* 是基态解.

第三步 证明 u_* 是问题 (1.1) 的唯一正解. 假设 v_* 是问题 (1.1) 的另一个正解, 则由 (1.2) 式可得

$$\int_{\Omega} [(\nabla u_*, \nabla(u_* - v_*)) - \lambda u_*(u_* - v_*) - g(x)u_*^{-\gamma}(u_* - v_*)] dx = 0, \quad (2.9)$$

$$\int_{\Omega} [(\nabla v_*, \nabla(u_* - v_*)) - \lambda v_*(u_* - v_*) - g(x)v_*^{-\gamma}(u_* - v_*)] dx = 0. \quad (2.10)$$

由 (2.9) 和 (2.10) 式, 可得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\nabla u_*, \nabla(u_* - v_*)) dx - \int_{\Omega} (\nabla v_*, \nabla(u_* - v_*)) dx - \lambda \int_{\Omega} |u_* - v_*|^2 dx \\ &\quad - \int_{\Omega} g(x)(u_*^{-\gamma} - v_*^{-\gamma})(u_* - v_*) dx \\ &= \|u_* - v_*\|^2 - \lambda \|u_* - v_*\|_2^2 - \int_{\Omega} g(x)(u_*^{-\gamma} - v_*^{-\gamma})(u_* - v_*) dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

从如下一个基本的不等式 $(m^{-\gamma} - n^{-\gamma})(m - n) \leq 0$ ($\forall m, n > 0$), 可得

$$\int_{\Omega} g(x)(u_*^{-\gamma} - v_*^{-\gamma})(u_* - v_*) dx \leq 0. \quad (2.12)$$

因此由 Poincaré 不等式及 (2.11) 式和 (2.12) 式, 可得

$$\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda}\right) \|u_* - v_*\|^2 \leq 0.$$

因为 $0 < \lambda < \lambda_1$ 以及 $\|u_* - v_*\| \geq 0$ 可得 $u_* = v_*$. 从而 u_* 是问题 (1.1) 的唯一正解. 定理 1 证毕.

参 考 文 献

- [1] Crandall M G, Rabinowitz P H, Tartar L. On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity[J]. Comm. Partial Diff. Equ., 1977, 2(2): 193-222.
- [2] Lazer A C, McKenna P J. On a singular nonlinear elliptic boundary-value problem[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1991, 111(3): 721-730.
- [3] Pino M A. A global estimate for the gradient in a singular elliptic boundary value problem[J]. Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A, 1992, 122(3-4): 341-351.
- [4] Zhang P, Liao J F. Existence and nonexistence results for classes of singular elliptic problem[J]. Abstr. Appl. Anal., 2010: 1-10.

- [5] Sun Y J, Wu S P, Long Y M. Combined effects of singular and superlinear nonlinearities in some singular boundary value problems[J]. *J. Diff. Equ.*, 2001, 176(2): 511–531.
- [6] Hirano N, Saccon C, Shioji N. Brezis-Nirenberg type theorems and multiplicity of positive solutions for a singular elliptic problem[J]. *J. Diff. Equ.*, 2008, 245(8): 1997–2037.
- [7] Sun Y J, Wu S P. An exact estimate result for a class of singular equations with critical exponents[J]. *J. Funct. Anal.*, 2011, 260(5): 1257–1284.
- [8] Wang X, Zhao L, Zhao P H. The existence and multiplicity of classical positive solutions for a singular nonlinear elliptic problem with any growth exponents[J]. *Nonl. Anal.*, 2014, 101: 37–46.
- [9] Liao J F, Wu X P. Existence of solutions for a class of singular semilinear elliptic equations[J]. *J. Southwest Univ. (Natural Sci. Edi.)*, 2008, 30(2): 10–14.
- [10] Liao J F, Zhang P. Existence and nonexistence of solutions for some singular semilinear elliptic problem[J]. *J. Math.*, 2011, 31(5): 777–784.
- [11] 龚亚英. 一类拟线性奇异椭圆方程无穷多解的存在性 [J]. *数学杂志*, 2010, 30(4): 726–730.
- [12] Rudin W. *Real and complex analysis*[M]. New York, London: McGraw-Hill, 1966.
- [13] Willem M. *Minimax theorems*[M]. Boston: Birkhäuser, 1996.

UNIQUENESS OF POSITIVE SOLUTIONS FOR A CLASS OF RESONANCE ELLIPTIC EQUATION

LIAO Jia-feng, CHEN Ming, ZHANG Peng

(School of Mathematics and Computational Science, Zunyi Normal College, Zunyi 563002, China)

Abstract: In this paper, the resonance problem for a class of singular elliptic problem is considered. By the variational method, the uniqueness of positive solutions is obtained, which generalizes the result of Pino [3].

Keywords: singular elliptic equations; resonance; positive solution; uniqueness; variational method

2010 MR Subject Classification: 35A01; 35J75