

## 关于商高数的 Jeśmanowicz 猜想

杨 海<sup>1</sup>, 任荣珍<sup>1</sup>, 付瑞琴<sup>2</sup>

(1. 西安工程大学理学院, 陕西 西安 710048)

(2. 西安石油大学理学院, 陕西 西安 710065)

**摘要:** 本文研究了商高数的 Jeśmanowicz 猜想的整数解问题. 利用初等数论方法, 获得了该猜想的两个新结果并给出证明, 推广了文献 [4–8] 的结果.

**关键词:** 指数 diophantine 方程; 商高数; Jeśmanowicz 猜想

MR(2010) 主题分类号: 11D61

中图分类号: O156.7

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2017)03-0506-07

### 1 引言及主要结论

设  $\mathbf{N}$  是所有正整数的集合. 如果正整数  $a, b, c$  满足

$$a^2 + b^2 = c^2, \gcd(a, b) = 1, 2 \mid b, \quad (1.1)$$

则称  $(a, b, c)$  是一组商高数. 已知如此的  $a, b, c$  可表成 (参阅文献 [1] 的定理 11.6.1)

$$\begin{aligned} a &= u^2 - v^2, \quad b = 2uv, \quad c = u^2 + v^2, \quad u, v \in \mathbf{N}, \\ u &> v, \quad \gcd(u, v) &= 1, \quad 2 \mid uv. \end{aligned} \quad (1.2)$$

1956 年, Jeśmanowicz<sup>[2]</sup> 曾经猜测方程

$$(an)^x + (bn)^y = (cn)^z, \quad x, y, z, n \in \mathbf{N} \quad (1.3)$$

仅有解  $(x, y, z, n) = (2, 2, 2, m)$ , 其中  $m$  是任意正整数. 这是一个至今远未解决的数论难题, 目前已知的结果大多集中在  $n = 1$  时的情况 (参阅文献 [3] 及其参考文献), 而对于  $n > 1$  的情况则知之甚少.

本文将运用初等数论方法讨论方程 (1.3) 适合  $n > 1$  的解  $(x, y, z, n)$ . 1999 年, 乐茂华<sup>[4]</sup> 证明方程 (1.3) 适合  $(x, y, z) \neq (2, 2, 2)$  以及  $n > 1$  的解  $(x, y, z, n)$  必定满足下列条件之一:

- (i)  $\max\{x, y\} > \min\{x, y\} > z$ ;
- (ii)  $x > z > y$ ;
- (iii)  $y > z > x$ .

\*收稿日期: 2015-03-17

接收日期: 2015-10-10

**基金项目:** 国家自然科学基金项目 (11226038; 11371012); 陕西省教育厅科研计划项目 (14Jk1311); 西安石油大学博士科研启动项目 (2015BS06).

**作者简介:** 杨海 (1979–), 男, 陕西府谷, 副教授, 主要研究方向: 数论及其应用.

对于上述结果中的条件 (i), 邓谋杰<sup>[5]</sup> 证明了如果方程 (1.3) 仅有解  $(x, y, z) = (2, 2, 2)$  适合  $n = 1$ , 则该方程没有适合  $\max\{x, y\} > \min\{x, y\} > z$  以及  $n > 1$  的解  $(x, y, z)$ . 本文证明了以下更为一般性的结果.

**定理 1.1** 方程 (1.3) 没有适合  $\max\{x, y\} > \min\{x, y\} > z$  以及  $n > 1$  的解  $(x, y, z, n)$ .

从现有结果的证明过程可知, 文献 [4] 中另外两种情况的排除是一个非常困难的问题. 设  $p$  是奇素数, 本文将讨论式 (1.2) 中的  $u$  和  $v$  满足

$$u = p, v = 2 \quad (1.4)$$

时的情况. 对此, 文献 [6, 7, 8] 分别证明当了  $p = 3, 5$  和  $7$  时, Jeśmanowicz 猜想成立. 本文对于一般的  $p$  证明了以下结果.

**定理 1.2** 当  $u$  和  $v$  满足式 (1.4) 时, 方程 (1.3) 没有适合  $x > z > y$  以及  $n > 1$  的解  $(x, y, z, n)$ .

显然, 本文的两个定理为解决此类问题情况下的 Jeśmanowicz 猜想提供了方便.

## 2 定理 1.1 的证明

设  $(x, y, z, n)$  是方程 (1.3) 的一组适合  $\max\{x, y\} > \min\{x, y\} > z$  以及  $n > 1$  的解. 此时, 由式 (1.3) 可知

$$c = c_1 c_2, c_1^z = n^{\min\{x, y\} - z}, c_1, c_2 \in \mathbf{N}, c_1 > 1 \quad (2.1)$$

和

$$a^x n^{x - \min\{x, y\}} + b^y n^{y - \min\{x, y\}} = c_2^z. \quad (2.2)$$

因为由式 (1.2) 和式 (2.1) 可知  $c_1$  是  $c = u^2 + v^2$  的大于 1 的约数, 所以  $c_1 \geq 5$ , 故有  $c_2 = \frac{c}{c_1} \leq \frac{c}{5}$ . 因此由式 (2.2) 可得

$$\left(\frac{u^2 + v^2}{5}\right)^z = \left(\frac{c}{5}\right)^z \geq c_2^z > a^x > a^z = (u^2 - v^2)^z \quad (2.3)$$

以及

$$\left(\frac{u^2 + v^2}{5}\right)^z = \left(\frac{c}{5}\right)^z \geq c_2^z > b^y > b^z = (2uv)^z. \quad (2.4)$$

因为  $u > v$ , 所以由式 (2.3) 和式 (2.4) 分别可得

$$v > \sqrt{\frac{2}{3}}u \quad (2.5)$$

以及

$$u > (5 + 2\sqrt{6})v. \quad (2.6)$$

于是, 结合式 (2.5) 和式 (2.6) 即得  $u > (5 + 2\sqrt{6})v > \sqrt{\frac{2}{3}}(5 + 2\sqrt{6})u > u$  这一矛盾. 由此可知方程 (1.3) 没有适合  $\max\{x, y\} > \min\{x, y\} > z$  以及  $n > 1$  的解  $(x, y, z, n)$ . 定理证完.

### 3 定理 1.2 的证明

当  $u$  和  $v$  满足 (1.4) 时, 由式 (1.2) 可知方程 (1.3) 可写成

$$((p^2 - 4)n)^x + (4pn)^y = ((p^2 + 4)n)^z, \quad x, y, z, n \in \mathbf{N}. \quad (3.1)$$

因为由文献 [6–8] 中的结果可知本定理在  $p \leq 7$  时成立, 所以在此不妨假定  $p \geq 11$ , 并设  $(x, y, z, n)$  是方程 (3.1) 的一组适合  $x > z > y$  以及  $n > 1$  的解. 此时, 由 (3.1) 可知

$$b = b_1 b_2 = 4p, \quad \gcd(b_1, b_2) = 1, \quad b_1 > 1, \quad b_1, b_2 \in \mathbf{N}, \quad (3.2)$$

$$b_1^y = n^{z-y}, \quad (3.3)$$

$$(p^2 - 4)^x n^{x-z} + b_2^y = (p^2 + 4)^z. \quad (3.4)$$

因为  $p$  是奇素数, 所以由式 (3.2) 可知  $b_1 \in \{4, p, 4p\}$ . 以下就是按照这三种情况来排除该解的存在性.

**情况 I**  $b_1 = 4, b_2 = p$ .

此时由式 (3.3) 可得  $2^{2y} = n^{z-y}$ . 从而有

$$n = 2^r, \quad r \in \mathbf{N} \quad (3.5)$$

以及

$$2y = r(z - y). \quad (3.6)$$

将式 (3.5) 代入式 (3.4) 即得

$$2^{r(x-z)}(p^2 - 4)^x + p^y = (p^2 + 4)^z. \quad (3.7)$$

首先考虑  $z \equiv y \equiv 1 \pmod{2}$ , 即  $z$  和  $y$  都是奇数的情况. 设  $\left(\frac{*}{p}\right)$  是 Jacobi 符号. 当  $p \equiv 1 \pmod{4}$  时, 因为  $p^2 - 4 \equiv 5 \pmod{8}$ , 所以根据 Jacobi 符号的定义和运算规则 (参见文献 [1] 第 3.6 节), 由式 (3.7) 可得

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{-4}{p}\right) = \left(\frac{p^2 - 4}{p}\right) = \left(\frac{p}{p^2 - 4}\right) \\ &= \left(\frac{p^2 + 4}{p^2 - 4}\right) = \left(\frac{8}{p^2 - 4}\right) = \left(\frac{2}{p^2 - 4}\right) = -1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

这一矛盾. 当  $p \equiv 3 \pmod{4}$  时, 因为由式 (3.7) 可知  $2^{r(x-z)}(p^2 - 4)^x \equiv (p^2 + 4)^z - p^y \equiv (p^2 + 4) - p \equiv 1 - (-1) \equiv 2 \pmod{4}$ , 所以

$$r(x - z) = 1. \quad (3.9)$$

将式 (3.9) 代入式 (3.7) 即得

$$2(p^2 - 4)^x + p^y = (p^2 + 4)^z. \quad (3.10)$$

又因  $z$  是奇数, 故由式 (3.9) 可知此时  $x$  是偶数. 由于  $p^2 + 4 \equiv 5 \pmod{8}$ ,  $\left(\frac{p}{p^2+4}\right) = \left(\frac{p^2+4}{p}\right) = \left(\frac{4}{p}\right) = 1$ , 所以由式 (3.10) 可得

$$1 = \left(\frac{-2(p^2-4)^x p^y}{p^2+4}\right) = \left(\frac{-2p}{p^2+4}\right) = \left(\frac{2}{p^2+4}\right) = -1 \quad (3.11)$$

这一矛盾, 故不可能.

以下考虑  $z \equiv y \equiv 0 \pmod{2}$ , 即  $z$  和  $y$  都是偶数的情况. 此时, 因为

$$\gcd\left((p^2+4)^{\frac{z}{2}} + p^{\frac{y}{2}}, (p^2+4)^{\frac{z}{2}} - p^{\frac{y}{2}}\right) = 2,$$

所以由式 (3.7) 可知

$$\begin{aligned} (p^2+4)^{\frac{z}{2}} + p^{\frac{y}{2}}\lambda &= 2f^x, \quad (p^2+4)^{\frac{z}{2}} - p^{\frac{y}{2}}\lambda = 2^{r(x-z)-1}g^x, \\ p^2-4 &= fg, \quad \gcd(f, g) = 1, \quad \lambda \in \{\pm 1\}, \quad f, g \in \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

由式 (3.12) 可得

$$(p^2+4)^{\frac{z}{2}} = f^x + 2^{r(x-z)-2}g^x > (\max\{f, g\})^x. \quad (3.13)$$

由式 (3.12) 的第三个等式可知  $f$  和  $g$  都是奇数. 设  $k = \max\{f, g\}$ ,  $l = \min\{f, g\}$ . 如果  $k = l$ , 则由  $p^2 - 4 = k^2$  可得  $5 \equiv p^2 - 4 \equiv k^2 \equiv 1 \pmod{8}$  这一矛盾. 因此  $k \neq l$ ,  $k > l$  且  $k - l \geq 2$ . 如果  $k = l + 2$ , 则由  $p^2 - 4 = (l + 2)l$  可得  $1 \equiv p^2 - 4 \equiv l^2 + 2l \equiv 3 \pmod{4}$  这一矛盾. 由此可知  $k - l \geq 4$ , 故有

$$\max\{f, g\} \geq p + 2. \quad (3.14)$$

因为  $x > z$ , 所以由式 (3.13) 和式 (3.14) 可得

$$(p^2+4)^z > (p+2)^{2x} = (p^2+4p+4)^x > (p^2+4)^x > (p^2+4)^z \quad (3.15)$$

这一矛盾.

从以上分析可知  $y$  和  $z$  必定一奇一偶. 此时由式 (3.6) 可知  $r$  必为偶数.

当  $y$  是偶数时,  $z$  是奇数. 因为  $p^2 - 4 \equiv 5 \pmod{8}$ , 所以由式 (3.7) 可得

$$1 = \left(\frac{p^2+4}{p^2-4}\right) = \left(\frac{8}{p^2-4}\right) = \left(\frac{2}{p^2-4}\right) = -1$$

这一矛盾.

当  $y$  是奇数时,  $z$  是偶数. 因为  $r$  是偶数, 所以对式 (3.7) 取模  $p^2 + 4$  可得

$$\left(\frac{2}{p^2+4}\right)^{r(x-z)} \left(\frac{p^2-4}{p^2+4}\right)^x = \left(\frac{-1}{p^2+4}\right) \left(\frac{p}{p^2+4}\right)^y,$$

即有

$$(-1)^x = \left(\frac{2}{p^2+4}\right)^x = \left(\frac{-2}{p^2+4}\right)^x = \left(\frac{-8}{p^2+4}\right)^x = \left(\frac{p}{p^2+4}\right)^y = \left(\frac{p}{p^2+4}\right) = \left(\frac{4}{p}\right) = 1,$$

从而可知  $x$  是偶数. 由于  $p$  是奇素数, 故由式 (3.7) 可得

$$(p^2 + 4)^{\frac{z}{2}} + 2^{\frac{r(x-z)}{2}}(p^2 - 4)^{\frac{z}{2}} = p^y. \quad (3.16)$$

然而, 由于  $x > z > y$ , 故由式 (3.16) 可得  $p^y > (p^2 + 4)^{\frac{z}{2}} > p^z > p^y$  这一矛盾.

综上所述可知情况 I 不成立.

**情况 II**  $b_1 = p, b_2 = 4$ .

此时由式 (3.3) 可得  $p^y = n^{z-y}$ . 从而有

$$n = p^s, s \in \mathbf{N} \quad (3.17)$$

以及

$$y = s(z - y). \quad (3.18)$$

将式 (3.17) 代入式 (3.4) 即得

$$(p^2 - 4)^x p^{s(x-z)} + 2^{2y} = (p^2 + 4)^z. \quad (3.19)$$

因为  $p \geq 11$ , 所以  $3 \nmid p$  且  $p^2 - 4 \equiv 0 \pmod{3}$ . 又因为  $2^{2y} \equiv 1 \pmod{3}$ ,  $p^2 + 4 \equiv 2 \equiv -1 \pmod{3}$ , 故由式 (3.19) 可得  $1 \equiv (p^2 - 4)^x p^{s(x-z)} + 2^{2y} \equiv (p^2 + 4)^z \equiv (-1)^z \pmod{3}$ . 由此可知此时  $z$  是偶数. 由于  $p$  是奇素数, 由式 (3.19) 可知  $((p^2 + 4)^{\frac{z}{2}})^2 \equiv 2^{2y} \pmod{p^{s(x-z)}}$ , 故有  $(p^2 + 4)^{\frac{z}{2}} \equiv 2^y \lambda \pmod{p^{s(x-z)}}$ , 其中  $\lambda \in \{\pm 1\}$ . 因此由式 (3.19) 可知

$$\begin{aligned} (p^2 + 4)^{\frac{z}{2}} + 2^y \lambda &= f^x, \quad (p^2 + 4)^{\frac{z}{2}} - 2^y \lambda = p^{s(x-z)} g^x, \\ p^2 - 4 &= fg, \quad \gcd(f, g) = 1, \quad f, g \in \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

由式 (3.20) 可得

$$2(p^2 + 4)^{\frac{z}{2}} = f^x + p^{s(x-z)} g^x > (\max\{f, g\})^x. \quad (3.21)$$

由于在情况 I 的证明过程中已知式 (3.20) 中的  $f$  和  $g$  满足式 (3.15), 所以由式 (3.15) 和式 (3.21) 可得  $2(p^2 + 4)^{\frac{z}{2}} > (p + 2)^x \geq (p + 2)^{z+1}$  以及

$$4(p^2 + 4)^z > (p^2 + 4)^{z+1} > 4(p^2 + 4)^z \quad (3.22)$$

这一矛盾, 故不可能.

**情况 III**  $b_1 = 4p, b_2 = 1$ .

此时由式 (3.3) 可得  $2^{2y} p^y = n^{z-y}$ , 从而有

$$n = 2^{2s} p^s, s \in \mathbf{N}, \quad (3.23)$$

其中  $s$  适合式 (3.18). 将式 (3.23) 代入式 (3.4) 即得

$$2^{2s(x-z)} p^{s(x-z)} (p^2 - 4)^x + 1 = (p^2 + 4)^z. \quad (3.24)$$

因为  $p^2 - 4 \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $p^2 + 4 \equiv 2 \pmod{3}$ , 所以由式 (3.24) 可知此时  $z$  必为偶数. 因此

$$(p^2 + 4)^z - 1 \equiv 0 \pmod{(p^2 + 3)(p^2 + 5)}. \quad (3.25)$$

由式 (3.24) 和式 (3.25) 可知

$$(p^2 + 3) \mid 2^{2s(x-z)} p^{s(x-z)} (p^2 - 4)^x \quad (3.26)$$

以及

$$(p^2 + 5) \mid 2^{2s(x-z)} p^{s(x-z)} (p^2 - 4)^x. \quad (3.27)$$

由于  $p^2 + 3 \equiv 4 \pmod{8}$ , 所以

$$p^2 + 3 = 4t_1, \quad t_1 > 1, \quad 2 \nmid t_1, \quad t_1 \in \mathbf{N}. \quad (3.28)$$

因为  $p$  是适合  $p \geq 11$  的奇素数, 所以  $p \nmid (p^2 + 3)$ , 故由式 (3.26) 和式 (3.28) 可得

$$t_1 \mid (p^2 - 4)^x. \quad (3.29)$$

设  $q_1$  是适合  $t_1$  的奇素因数. 因为由式 (3.28) 可知  $p^2 \equiv -3 \pmod{q_1}$ , 又由式 (3.29) 可知  $p^2 \equiv 4 \pmod{q_1}$ , 所以  $q_1$  仅可能等于 7, 故由式 (3.28) 可得

$$p^2 + 3 = 4 \cdot 7^\alpha, \quad \alpha \in \mathbf{N}. \quad (3.30)$$

类似地, 因为  $p^2 + 5 \equiv 2 \pmod{4}$ , 所以

$$p^2 + 5 = 2t_2, \quad t_2 > 1, \quad 2 \nmid t_2, \quad t_2 \in \mathbf{N}. \quad (3.31)$$

又因  $p \nmid (p^2 + 5)$ , 故由式 (3.27) 和式 (3.31) 可得

$$t_2 \mid (p^2 - 4)^x. \quad (3.32)$$

设  $q_2$  是适合  $t_2$  的奇素因数. 因为由式 (3.31) 可知  $p^2 \equiv -5 \pmod{q_2}$ , 又由式 (3.32) 可知  $p^2 \equiv 4 \pmod{q_2}$ , 所以  $q_2$  仅可能等于 3, 故由式 (3.31) 可得

$$p^2 + 5 = 2 \cdot 3^\beta, \quad \beta \in \mathbf{N}. \quad (3.33)$$

因此由式 (3.30) 和式 (3.33) 可得

$$3^\beta - 2 \cdot 7^\alpha = 1. \quad (3.34)$$

然而, 因为由式 (3.34) 可知  $3^\beta \equiv 2 \cdot 7^\alpha + 1 \equiv 3 \pmod{4}$ , 所以  $\beta$  必为奇数, 故由该式可得

$$1 = \left(\frac{3}{7}\right) = -\left(\frac{7}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right) = -1$$

这一矛盾.

综上所述可知方程 (3.1) 没有适合  $x > z > y$  以及  $n > 1$  的解  $(x, y, z, n)$ . 定理证完.

## 参 考 文 献

- [1] 华罗庚. 数论导引 [M]. 北京: 科学出版社, 1979.
- [2] Jeśmanowicz L. Several remarks on Pythagorean numbers (in Polish)[J]. Wiadom. Mat., 1955, 1956, 1(2): 196–202.
- [3] Miyazaki T. Generalizationa of classical results on Jeśmanowicz’ conjecture concerning Pythagorean triples[J]. J. Number Theory, 2013, 133(3): 583–595.
- [4] Le M H. A note on Jeśmanowicz’ conjecture concerning Pythagorean triples[J]. Bull. Austr. Math. Soc., 1999, 59(3): 477–480.
- [5] Deng M J. A note on the diophantine equation  $(na)^x + (nb)^y = (nc)^z$  [J]. Bull. Austral. Math. Soc., 2014, 89(2): 316–321.
- [6] Deng M J, Cohn G L. On the conjecture of Jeśmanowicz concerning Pythagorean triples[J]. Bull. Austral. Math. Soc., 1998, 57(4): 515–524.
- [7] Cheng Z, Sun C F, Du X N. On the diophantine equation  $(20n)^x + (21n)^y = (29n)^z$ [J]. Math. Appl., 2013, 26(1): 129–133.
- [8] Sun C F, Cheng Z. A note on the Jeśmanowicz’ conjecture[J]. J. Math., 2013, 33(5): 788–794.

THE JEŚMANOWICZ’ CONJECTURE ON PYTHAGOREAN  
TRIPLESYANG Hai<sup>1</sup>, REN Rong-zhen<sup>1</sup>, FU Rui-qin<sup>2</sup>*(1.School of Science, Xi’an Polytechnic University, Xi’an 710048, China)**(2.School of Science, Xi’an Shiyou University, Xi’an 710065, China)*

**Abstract:** In this paper, we study the integer solutions of the Jeśmanowicz’ conjecture on Pythagorean triples. By using some elementary number theory methods, we obtain and prove two new results for the conjecture and generalize some results of references [4–8].

**Keywords:** exponential diophantine equation; Pythagorean triple; Jeśmanowicz’ conjecture

**2010 MR Subject Classification:** 11D61