Vol. 37 (2017)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

基于 ARFIMA-GARCH 模型的混成检验

玄海燕 [1], 史永侠 [2], 张玉春 [1], 徐广业 [1]
(1. 兰州理工大学经济管理学院, 甘肃 兰州 730050)
(2. 兰州理工大学理学院, 甘肃 兰州 730050)

摘 要: 本文研究了 ARFIMA-GARCH 模型的混成检验问题. 基于拟极大指数似然估计, 给出了平方残差自相关函数的渐近性, 进而建立了基于平方残差自相关函数的混成检验统计量. 通过实例分析, 表明可利用基于平方残差自相关函数的混成检验统计量来诊断检验由拟极大指数似然估计方法拟合的 ARFIMA-GARCH 模型.

关键词: ARFIMA-GARCH 模型; 混成检验; 拟极大指数似然估计
MR(2010) 主题分类号: 62F05; 91G70 **中图分类号:** O212.1
文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2017)03-0474-07

1 引言

在金融领域中, 大量时间序列数据具有丰富的特征, 如股票收益具有长期记忆性, 收益分布具有尖峰、细尾等 [1],而这些特征有助于投资者选择最佳投资组合, 以便减少风险. 为了考虑金融资产收益率序列的长记忆性, Hosking[2] 提出了 ARFIMA 模型, 但 ARFIMA 模型不能够刻画资产收益率中普遍存在的波动聚类, 波动率是资产收益不确定性的衡量, 常被用来衡量资产的风险. Bollerslev[3] 提出的 GARCH 模型能有效地捕捉资产收益率波动集聚现象. 为了同时描述资产收益率中的长记忆性和异方差性, 因此产生了 ARFIMA-GARCH 模型, 该模型有利于投资者研究金融资产组合的风险水平问题.

然而, 许多工作致力于模型的提出以及参数估计, 对于模型诊断检验没有得到相应的重视. 对于实践者来说, 去检验模型的准确性是一个基本的问题. 在时间序列模型中, 混成检验是一种广泛有用的诊断工具, 特别对于拟合的模型. 近年来, 随着金融市场日益变得复杂, 关于混成检验也相继有了一些较为成熟的结果. 对于拟极大指数似然估计, Li[4] 和 Zhu[5] 分别给出不同的混成检验统计量. 基于高斯拟极大似然估计, Wong 和 Ling[6] 研究了混合混成检验统计量.

本文对于 ARFIMA-GARCH 模型, 在拟极大指数似然估计下, 给出了平方残差自相关函数的渐近性, 并进行了证明, 进而得到了基于平方残差自相关函数的混成检验统计量; 由实例分析可知, 该统计量有利于诊断检验由拟极大指数似然估计拟合的 ARFIMA-GARCH 模型, 以便确定在实际的股票市场中, 拟合的模型是否准确, 确保对未来股票市场的变化做出较准确的预测.

*收稿日期: 2015-12-24 接收日期: 2016-05-16
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11261031).
作者简介: 玄海燕 (1973–), 女, 朝鲜族, 吉林吉林, 副教授, 主要研究方向: 应用数理统计.

2 ARFIMA-GARCH 模型

ARFIMA(p,d,q)-GARCH(r,s) 模型形式如下

$$\Phi(B)(1-B)^d y_t = \Psi(B)\varepsilon_t, \tag{2.1}$$

$$\varepsilon_t = \eta_t\sqrt{h_t},\ h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{r}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j h_{t-j}, \tag{2.2}$$

其中 B 为滞后算子, d 是分数差分参数, $-1/2 < d < 1/2$, y_t 为 t 时刻的对数收益率, $\Phi(B)$ 和 $\Psi(B)$ 分别是 p 阶和 q 阶的滞后多项式, $\Phi(B) = 1-\phi_1B-\phi_2B-\cdots-\phi_pB^p$, $\Psi(B) = 1+\psi_1B+\psi_2B\cdots+\psi_qB^q$, $(1-B)^d = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{k-d-1)!}{k!(-d-1)!}B^k$, ε_t 是信息序列, 且均值为 0, $\{\eta_t\}$ 是均值为零的独立同分布随机变量序列, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ $(i=1,2,\cdots,r)$, $\beta_j \geq 0$ $(j=1,2,\cdots,s)$, 对所有的 t 都有 η_t 和 ε_t 是相互独立的, 即称随机过程 $\{\varepsilon_t\}$ 为 ARFIMA(p,d,q)-GARCH(r,s) 模型.

3 混成检验

设 $\theta = (\gamma^{'},\delta^{'})^{'}$ 是 ARFIMA(p,q,d)-GARCH(r,s) 模型的未知参数, 它的真实值是 θ_0, 其中 $\gamma = (d,\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_p,\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_q)^{'}$, $\delta = (\alpha_0,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\cdots,\beta_s)^{'}$. 令 $l = p+q+r+s+2$, 那么 θ 是一个 l 维向量, 参数空间为 $\Theta = \Theta_\gamma\times\Theta_\delta$, 其中 $\Theta_\gamma \subset \mathbb{R}^{p+q+1}$, $\Theta_\delta \subset \mathbb{R}_0^{r+s+1}$, $\mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$, $\mathbb{R}_0 = [0,+\infty)$. 设 θ_0 是 Θ 中的一个内点, 定义 $\alpha(B) = \sum\limits_{i=1}^{r}\alpha_iB^i$, $\beta(B) = 1-\sum\limits_{j=1}^{s}\beta_jB^j$.

假设 1 $-1/2 < d < 1/2$, 对于每个 $\theta\in\Theta$, 多项式 $\phi(B)$ 和 $\psi(B)$ 的所有根都在单位圆之外, 当 $\phi_p \neq 0$ 或者 $\psi_q \neq 0$ 时, $\phi(B)$ 和 $\psi(B)$ 没有公共根.

假设 2 对于每个 $\theta\in\Theta$, $\alpha(B)$ 和 $\beta(B)$ 没有公共根, $\alpha(1)\neq 0$, $\alpha_r+\beta_s\neq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{s}\beta_j < 1$.

假设 1 表明了 $\{y_t\}$ 的平稳可逆性, 当 $-1/2 < d < 0$ 时, y_t 表现出间断记忆性, 然而当 $0 < d < 1/2$ 时, y_t 表现出长期记忆性. 假设 2 是模型 (2.2) 的可识别性条件. 给出观测值 $\{y_n,\cdots,y_1\}$ 和初始值 $Y_0\equiv\{y_0,y_{-1},\cdots\}$, 写参数模型如下

$$\Phi(B)(1-B)^d y_t = \Psi(B)\varepsilon_t(\gamma),$$

$$\varepsilon_t(\gamma) = \eta_t(\theta)\sqrt{h_t(\theta)},\ h_t(\theta) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{r}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2(\theta) + \sum_{j=1}^{s}\beta_j h_{t-j}(\theta).$$

设 $\hat{\theta}_n = (\hat{\gamma}_n^{'},\hat{\delta}_n^{'})^{'}$, 由文献 [7] 可知 θ_0 的拟极大指数似然估计被定义为

$$\hat{\theta}_n = \arg\min_{\theta\in\Theta} L_n(\theta),\ L_n(\theta) = \sum_{t=1}^{n}\left[\log\sqrt{h_t(\theta)} + \frac{|\varepsilon_t(\gamma)|}{\sqrt{h_t(\theta)}}\right].$$

假设 3 η_t 的中位数等于 0, $E|\eta_t| = 1$, $\mathrm{Var}(\eta_t^2) = \sum\limits_{t=1}^{n}\eta_t^2 < \infty$, η_t 的概率密度函数满足 $f(0) > 0$, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) < \infty$, 且在 0 处是连续的.

假设 4 ε_t 是严平稳遍历过程, 且 $E\varepsilon_t^2<\infty$.

假设 5 $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta_0)=O_p(1)$.

假设 3 是 LAD 类估计的一般性条件, 见文献 [4]. 假设 4 的充分必要条件是 $\sum\limits_{i=1}^{r}\alpha_i+\sum\limits_{j=1}^{s}\beta_j<1$, 见文献 [3]. 假设 5 是为了简化的证明. 在假设 1–4 下, 由文献 [7] 可知

$$\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n-\theta_0\right)\to_d\left(0,\frac{1}{4}\Sigma_0^{-1}\Omega_0\Sigma_0^{-1}\right),$$

其中

$$\Omega_0=E\left[\frac{1}{h_t(\theta_0)}\frac{\partial\varepsilon_t(\gamma_0)}{\partial\theta}\frac{\partial\varepsilon_t(\gamma_0)}{\partial\theta^T}\right]+\frac{E\eta_t^2-1}{4}E\left[\frac{1}{h_t^2(\theta_0)}\frac{\partial h_t(\theta_0)}{\partial\theta}\frac{\partial h_t(\theta_0)}{\partial\theta}^T\right],$$

$$\Sigma_0=f(0)E\left[\frac{1}{h_t(\theta_0)}\frac{\partial\varepsilon_t(\gamma_0)}{\partial\theta}\frac{\partial\varepsilon_t(\gamma_0)}{\partial\theta^T}\right]+\frac{1}{8}E\left[\frac{1}{h_t^2(\theta_0)}\frac{\partial h_t(\theta_0)}{\partial\theta}\frac{\partial h_t(\theta_0)}{\partial\theta}^T\right].$$

定义残差 $\hat{\eta}_t=\eta_t(\hat{\theta}_n)$, 那么滞后 ι 平方残差自相关函数被定义为

$$\hat{\rho}_\iota^*=\frac{\sum\limits_{t=\iota+1}^{n}(\hat{\eta}_t^2-\bar{\eta})(\hat{\eta}_{t-\iota}^2-\bar{\eta})}{\sum\limits_{t=1}^{n}(\hat{\eta}_t^2-\bar{\eta})^2},$$

其中 $\bar{\eta}=\frac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n}\hat{\eta}_t^2$, 由假设 5 可知, $\hat{\theta}_n-\theta_0=o_p(1)$. 在假设 1–4 下, 在文献 [8] 中由定理 3.1 和控制收敛定理, 能够表明

$$\bar{\eta}=\mu+o_p(1),\frac{1}{n}\sum_{t=\iota+1}^{n}(\hat{\eta}_t^2-\bar{\eta})^2=\sigma_0^2+o_p(1),$$

其中 $\mu=E\eta_t^2$, 因此理论上只需要考虑

$$\hat{\rho}_\iota=\frac{1}{n\sigma_0^2}\sum_{t=\iota+1}^{n}(\hat{\eta}_t^2-\mu)(\hat{\eta}_{t-\iota}^2-\mu).\tag{3.1}$$

设 $C=(C_1,C_2,\cdots,C_M)^{'}$, $\hat{C}=\left(\hat{C_1},\hat{C_2},\cdots,\hat{C_M}\right)^{'}$, 其中 M 为正整数, $\iota=1,2,\cdots,M$, $C_\iota=\frac{1}{n}\sum\limits_{t=\iota+1}^{n}(\eta_t^2-\mu)\left(\eta_{t-\iota}^2-\mu\right)$, $\hat{C}_\iota=\frac{1}{n}\sum\limits_{t=\iota+1}^{n}\left(\hat{\eta}_t^2-\mu)(\hat{\eta}_{t-\iota}^2-\mu\right)$, 由泰勒展示, 有

$$\hat{C}\simeq C+\frac{\partial C}{\partial\theta}\left(\hat{\theta}_n-\theta_0\right),\tag{3.2}$$

其中 $\partial C/\partial\theta=(\partial C_1/\partial\theta,\partial C_2/\partial\theta,\cdots,\partial C_m/\partial\theta)^{'}$,

$$\frac{\partial C_\iota}{\partial\theta}=\frac{1}{n}\sum_{t=\iota+1}^{n}\frac{\partial\left(\eta_t^2-\mu\right)}{\partial\theta}(\eta_{t-\iota}^2-\mu)+\frac{1}{n}\sum_{t=\iota+1}^{n}(\eta_t^2-\mu)\frac{\partial(\eta_{t-\iota}^2-\mu)}{\partial\theta}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{n}\sum_{t=\iota+1}^{n}\frac{\partial(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t}-\mu)}{\partial\theta}\left(\frac{\varepsilon_{t-\iota}^2}{h_t}-\mu\right)+\frac{1}{n}\sum_{t=\iota+1}^{n}\left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t}-\mu\right)\frac{\partial(\frac{\varepsilon_{t-\iota}^2}{h_{t-\iota}}-\mu)}{\partial\theta}\\
&=\frac{1}{n}\sum_{t=\iota+1}^{n}\left(\frac{2\varepsilon_t}{h_t}\frac{\partial\varepsilon_t}{\partial\theta}-\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2}\frac{\partial h_t}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\varepsilon_{t-\iota}^2}{h_{t-\iota}}-\mu\right)\\
&\quad+\frac{1}{n}\sum_{t=\iota+1}^{n}\left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t}-\mu\right)\left(\frac{2\varepsilon_{t-\iota}}{h_{t-\iota}}\frac{\partial\varepsilon_{t-\iota}}{\partial\theta}-\frac{\varepsilon_{t-\iota}^2}{h_{t-\iota}^2}\frac{\partial h_{t-\iota}}{\partial\theta}\right)\\
&=\frac{1}{n}\sum_{t=\iota+1}^{n}\frac{2\varepsilon_t}{h_t}\frac{\partial\varepsilon_t}{\partial\theta}\left(\frac{\varepsilon_{t-\iota}^2}{h_{t-\iota}}-\mu\right)-\frac{1}{n}\sum_{t=\iota+1}^{n}\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2}\frac{\partial h_t}{\partial\theta}\left(\frac{\varepsilon_{t-\iota}^2}{h_{t-\iota}}-\mu\right)\\
&\quad+\frac{1}{n}\sum_{t=\iota+1}^{n}\left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t}-\mu\right)\frac{2\varepsilon_{t-\iota}}{h_{t-\iota}}\frac{\partial\varepsilon_{t-\iota}}{\partial\theta}-\frac{1}{n}\sum_{t=\iota+1}^{n}\left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t}-\mu\right)\frac{\varepsilon_{t-\iota}^2}{h_{t-\iota}^2}\frac{\partial h_{t-\iota}}{\partial\theta},
\end{aligned}
$$

由遍历定理可知, 上式中最后一个等式的第一、三、四项都为 0, 因此有

$$
\frac{\partial C_\iota}{\partial\theta}=-\frac{1}{n}\sum_{t=\iota+1}^{n}\frac{\varepsilon_t^2}{h_t^2}\frac{\partial h_t}{\partial\theta}\left(\frac{\varepsilon_{t-\iota}^2}{h_{t-\iota}}-\mu\right)=-\frac{1}{n}\sum_{t=\iota+1}^{n}\frac{\eta_t^2\left(\eta_{t-\iota}^2-\mu\right)}{h_t}\frac{\partial h_t}{\partial\theta},
$$

因此当 $n\to\infty$ 时, $\frac{\partial C_\iota}{\partial\theta}\xrightarrow{\text{a.s.}}-\mu X_{\rho\iota}$, 其中 $X_{\rho\iota}=E\left[\frac{\eta_{t-\iota}^2-\mu}{h_t}\frac{\partial h_t}{\partial\theta}\right]$. 令 $X_\rho=\left(X_{\rho1},X_{\rho2},\cdots,X_{\rho M}\right)'$, 则等式 (3.2) 可写成

$$
\hat{C}\simeq C+(-\mu X_\rho)\left(\hat{\theta}_n-\theta_0\right). \tag{3.3}
$$

设 $\hat{\rho}=(\hat{\rho}_1,\hat{\rho}_2,\cdots,\hat{\rho}_M)^T$, $\rho=(\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_M)^T$, 由等式 (3.1) 和等式 (3.3), 有

$$
\sqrt{n}\hat{\rho}=\sqrt{n}\rho+\sigma_0^{-2}\left(-\mu X_\rho\right)\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n-\theta_0\right)+o_p(1). \tag{3.4}
$$

定理 1 如果假设 1–5 成立, 那么

$$
\sqrt{n}\hat{\rho}=\left(\hat{\rho}_1,\hat{\rho}_2,\cdots,\hat{\rho}_M\right)'\longrightarrow_d N\left(0,V\right),
$$

其中

$$
V=1_M+\frac{\mu^2}{4\sigma_0^4}X_\rho\Sigma_0^{-1}\Omega_0\Sigma_0^{-1}X_\rho^T-\frac{\mu\kappa_1}{2\sigma_0^4}X_\rho\Sigma_0^{-1}X_\rho^T+\frac{\mu\kappa_2}{2\sigma_0^4}\left(X_\rho^*\Sigma_0^{-1}X_\rho^T+X_\rho^T\Sigma_0^{-1}X_\rho^*\right),
$$

$X_\rho^*=\left(X_{\rho1}^*,X_{\rho2}^*,\cdots,X_{\rho M}^*\right)'$, $X_{\rho\iota}^*=E\left[\frac{\eta_{t-\iota}^2-\mu}{\sqrt{h_t}}\frac{\partial\varepsilon_t(\theta_0)}{\partial\theta}\right]$, $\kappa_1=E\left[\eta_t^2(|\eta_t|-1)\right]$, $\kappa_2=E\left[\text{sgn}(\eta_t)\eta_t^2\right]$.

证 由文献 [9] 中的定理 2.8.1, 能够得到 $\sqrt{n}C\longrightarrow_d N\left(0,\sigma_0^4 1_M\right)$, 其中 l_M 为 $M\times M$ 阶单位矩阵. 令

$$
D_t=\frac{|\eta_t|-1}{4h_t}\frac{\partial h_t(\theta_0)}{\partial\theta}-\frac{\text{sgn}(\eta_t)}{2\sqrt{h_t}}\frac{\partial\varepsilon_t(\theta_0)}{\partial\theta},
$$

由文献 [3] 可知

$$
\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n-\theta_0\right)=\frac{\Sigma_0^{-1}}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}D_t+o_p(1),
$$

因此由 Mann-Wald device 和鞅差中心极限定理 [10] 可知

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cov}\left(\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta_0),\sqrt{n}C\right)=E\left[\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta_0)\cdot\sqrt{n}C^T\right]\\=\;&E\left[\frac{\Sigma_0^{-1}}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}D_t\cdot\sqrt{n}C^T\right]=\Sigma_0^{-1}E\left[\sum_{t=1}^{n}D_t\cdot C^T\right],\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}E[\sum_{t=1}^{n}D_t\cdot C_\iota]&=E\left[\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{|\eta_t|-1}{4h_t}\frac{\partial h_t(\theta_0)}{\partial\theta}-\frac{\mathrm{sgn}(\eta_t)}{2\sqrt{h_t}}\frac{\partial\varepsilon_t(\theta_0)}{\partial\theta}\right)\cdot\frac{1}{n}\sum_{s=\iota+1}^{n}\left(\eta_s^2-\mu\right)\left(\eta_{s-\iota}^2-\mu\right)\right]\\&=\frac{1}{n}E\left[\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{|\eta_t|-1}{4h_t}\frac{\partial h_t(\theta_0)}{\partial\theta}\right)\cdot\sum_{s=\iota+1}^{n}\left(\eta_s^2-\mu\right)\left(\eta_{s-\iota}^2-\mu\right)\right]\\&\quad-\frac{1}{n}E\left[\frac{\mathrm{sgn}(\eta_t)}{2\sqrt{h_t}}\frac{\partial\varepsilon_t(\theta_0)}{\partial\theta})\cdot\sum_{s=\iota+1}^{n}\left(\eta_s^2-\mu\right)\left(\eta_{s-\iota}^2-\mu\right)\right]\\&=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=\iota+1}^{n}E\left[\frac{|\eta_t|-1}{4h_t}\frac{\partial h_t(\theta_0)}{\partial\theta}\left(\eta_s^2-\mu\right)\left(\eta_{s-\iota}^2-\mu\right)\right]\\&\quad-\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=\iota+1}^{n}E\left[\frac{\mathrm{sgn}(\eta_t)}{2\sqrt{h_t}}\frac{\partial\varepsilon_t(\theta_0)}{\partial\theta}\left(\eta_s^2-\mu\right)\left(\eta_{s-\iota}^2-\mu\right)\right]\\&=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}E\left[\frac{|\eta_t|-1}{4h_t}\frac{\partial h_t(\theta_0)}{\partial\theta}\left(\eta_t^2-\mu\right)\left(\eta_{t-\iota}^2-\mu\right)\right]\\&\quad-\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}E\left[\frac{\mathrm{sgn}(\eta_t)}{2\sqrt{h_t}}\frac{\partial\varepsilon_t(\theta_0)}{\partial\theta}\left(\eta_t^2-\mu\right)\left(\eta_{t-\iota}^2-\mu\right)\right]\\&=E\left[\frac{|\eta_t|-1}{4h_t}\frac{\partial h_t(\theta_0)}{\partial\theta}\left(\eta_t^2-\mu\right)\left(\eta_{t-\iota}^2-\mu\right)\right]\\&\quad-E\left[\frac{\mathrm{sgn}(\eta_t)}{2\sqrt{h_t}}\frac{\partial\varepsilon_t(\theta_0)}{\partial\theta}\left(\eta_t^2-\mu\right)\left(\eta_{t-\iota}^2-\mu\right)\right],\end{aligned}$$

则 $E[\sum\limits_{t=1}^{n}D_t\cdot C_\iota]=\frac{\kappa_1}{4}X_{\rho\iota}-\frac{\kappa_2}{2}X_{\rho\iota}^*$, 那么 $\mathrm{Cov}\left(\sqrt{n}(\hat{\theta}_n-\theta_0),\sqrt{n}C^T\right)=\Sigma_0^{-1}E\left[\frac{\kappa_1}{4}X_\rho-\frac{\kappa_2}{2}X_\rho^*\right]$, 因此 $\sqrt{n}\rho$ 的协方差为

$$\begin{aligned}&\mathrm{var}\left(\sqrt{n}\rho\right)=\sigma_0^{-4}\mathrm{var}(\sqrt{n}\hat{C})\\=\;&\sigma_0^{-4}[\mathrm{var}\left(\sqrt{n}C\right)+\mathrm{var}\left(-\mu X_\rho\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n-\theta_0\right)\right)\\&+\mathrm{cov}\left(\sqrt{n}C,-\mu X_\rho\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n-\theta_0\right)\right)+\mathrm{cov}\left(-\mu X_\rho\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n-\theta_0\right),\sqrt{n}C\right)]\\=\;&\sigma_0^{-4}[\sigma_0^4 1_M+\mu^2X_\rho\frac{1}{4}\Sigma_0^{-1}\Omega_0\Sigma_0^{-1}X_\rho^T-\mu\left(\frac{\kappa_1}{4}X_\rho-\frac{\kappa_2}{2}X_\rho^*\right)\Sigma_0^{-1}X_\rho^T\\&-\mu X_\rho^T\Sigma_0^{-1}\left(\frac{\kappa_1}{4}X_\rho-\frac{\kappa_2}{2}X_\rho^*\right)]\\=\;&1_M+\frac{\mu^2}{4\sigma_0^4}X_\rho\Sigma_0^{-1}\Omega_0\Sigma_0^{-1}X_\rho^T-\frac{\mu\kappa_1}{2\sigma_0^4}X_\rho\Sigma_0^{-1}X_\rho^T+\frac{\mu\kappa_2}{2\sigma_0^4}\left(X_\rho^*\Sigma_0^{-1}X_\rho^T+X_\rho^T\Sigma_0^{-1}X_\rho^*\right),\end{aligned}$$

即完成了定理的证明.

在定理 1 中, 通过样本均值来估计 V, 记为 $\hat{V}$, 在假设 1–4 下, 表明 $\hat{V} = V + o_p(1)$, 因此由定理 1, 下面的结论是直接成立的.

结论 1 如果假设 1–5 成立, 那么当 $n \to \infty$ 时, $Q(M) = n\hat{\rho}^T\hat{V}^{-1}\hat{\rho} \longrightarrow_d \chi^2(M)$. 对于拟极大指数似然估计, 在结论 1 中称 $Q(M)$ 为基于平方残差自相关函数的混成检验统计量, 并且可用 $Q(M)$ 来诊断检验由拟极大指数似然估计拟合的 ARFIMA-GARCH 模型.

4 实例分析

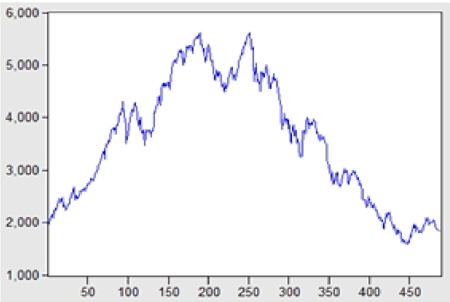

图 1: 中证 800 指数原始数据图

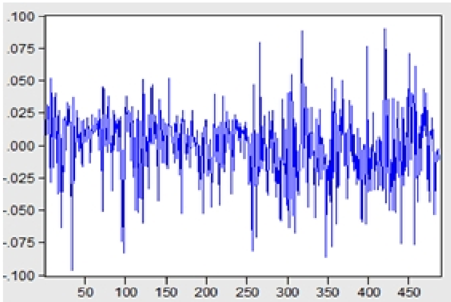

图 2: 中证 800 指数对数收益率图

在拟极大指数似然估计下, 为验证基于平方残差自相关函数的混成检验统计量的有效性, 以中证 800 指数的股票价格为例, 选取从 2007 年 1 月 4 日到 2008 年 12 月 31 日共 488 个数据 (数据来自 http://quotes.money.163.com/1399906.html). 根据 ADF 检验法, 可知该序列是平稳的. 由图 1 和图 2 可以看出, 序列显然存在异方差性. 通过 MATLAB 软件, 利用 R/S 检验法可以计算出中证 800 指数收益率序列的 Hurst 指数, 即 $H = 0.5405$, 由于 $H > 0.5$, 因此该序列存在长记忆性. 由以上可知, 对该序列建立 ARFIMA(1, d, 0)-GARCH(1, 1) 模型, 使用拟极大指数似然估计方法, 得到的拟合模型为

$$
\begin{aligned}
&(1 - 0.0427B)(1 - B)^{0.0003}y_t = \varepsilon_t,\\
&\varepsilon_t = \eta_t\sqrt{h_t},\ h_t = 0.0836 + 0.2349\varepsilon_{t-1}^2 + 0.5000h_{t-1}.
\end{aligned}
$$

然而, 在实际中拟合的模型是否有误差, 是否真正符合实际数据, 就需要对拟合后的模型进行诊断检验. 因此, 可利用基于平方残差自相关函数的混成检验统计量 ($Q(M)$) 对上述拟合模型进行诊断检验. 由卡方分布表可知, 在 0.05 显著性水平下, $\chi^2(6) = 12.592$, $\chi^2(12) = 21.026$. 通过 MTALAB 软件计算可得, $Q(6) = 4.3431 < \chi^2(6)$, $Q(12) = 8.2062 < \chi^2(12)$. 从而可以看出, 上述拟合的 ARFIMA(1, d, 0)-GARCH(1, 1) 模型是准确的, 符合实际数据, ARFIMA(1, d, 0)-GARCH(1, 1) 模型适合于拟合该时间段内的中证 800 指数收益率序列.

参 考 文 献

[1] 彭静, 刘剑锋, 王晓天. 股票收益的分形特征的实证分析 [J]. 数学杂志, 2005, 25(5): 579–582.

[2] Hosking J R M. Fractional differencing[J]. Biometrika, 1981, 68(1): 165–176.

[3] Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity[J]. J. Econ., 1986, 31(3): 307–327.

[4] Li G D, Li W K. Least absolute deviation estimation for fractionally integrated autoregressive moving average time series models with conditional heteroscedasticity[J]. Biometrika, 2008, 95(2): 399–414.

[5] Zhu K. A mixed portmanteau test for ARMA-GARCH models by the quasi-maximum exponential likelihood estimation approach[J]. J. Time Ser. Anal., 2013, 34(2): 230–237.

[6] Wong H, Ling S Q. Mixed portmanteau tests for time series models[J]. J. Time Ser. Anal., 2005, 26(4): 569–579.

[7] Pan B G, Chen M. Self-weighted quasi-maximum exponential likelihood estimator for ARFIMA-GARCH models[J]. J. Stat. Plan. Infer., 2013, 143(4): 716–729.

[8] Ling S Q, Mcaleer M. Asymptotic theory for a new vector ARMA-GARCH model[J]. Econ. The., 2003, 19(2): 280–310.

[9] Lehmann E L. Elements of large-sample theory[M]. New York: Springer, 1998.

[10] Billingsley P. The linderberg-levy theorem for martingales[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1961, 12(5): 788–792.

PORTMANTEAU TEST BASED ON THE ARFIMA-GARCH MODEL

XUAN Hai-yan[1], SHI Yong-xia[2], ZHANG Yu-chun[1], XU Guang-ye[1]

(*1.School of Economics and Management, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China*)

(*2.School of Sciences, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China*)

Abstract: In this paper, we study the portmanteau test problem of ARFIMA-GARCH model. Based on the quasi-maximum exponential likelihood estimator, the asymptotic of squared residual autocorrelation function is given, and the portmanteau test statistic based on squared residual autocorrelation function is established. By the analysis of a real example, it is showed that we can use the portmanteau test statistic based on squared residual autocorrelation function to the diagnostic test of ARFIMA-GARCH model fitting by quasi-maximum exponential likelihood estimator.

Keywords: ARFIMA-GARCH model; portmanteau test; quasi-maximum exponential likelihood estimation

2010 MR Subject Classification: 62F05; 91G70