

一类线性约束变分不等式问题的幂罚函数法

杨 波^{1,2}, 黄崇超¹

(1. 武汉大学数学与统计学院, 湖北 武汉 430072)

(2. 长江大学工程技术学院, 湖北 荆州 434020)

摘要: 本文研究了一类线性约束变分不等式 (VI) 的幂罚函数法求解问题. 利用 VI 的 KKT 条件, 将 VI 转化为等价的混合互补问题和一个新的 VI 问题, 并在一定条件下分析了解的存在性和唯一性. 利用度理论证明了幂罚方程组解的存在性与唯一性. 由以上结果最终证明了幂罚函数法的收敛性, 即幂罚方程组的解收敛于 VI 问题的解.

关键词: 变分不等式; 线性约束; 互补问题; 幂罚函数法

MR(2010) 主题分类号: 90C33

中图分类号: O224

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2017)03-0457-10

1 引言

定义 1.1 ^[1] 设 $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $F: K \rightarrow \mathbb{R}^n$, 所谓变分不等式问题 $(VI(K, F))$ 是指: 求 $x \in K$, 使得不等式

$$(y - x)^T F(x) \geq 0, \quad \forall y \in K$$

成立. 满足上述不等式的 x 称为 $VI(K, F)$ 的解, 解的全体记为 $SOL(K, F)$.

当 $K = \mathbb{R}_+^n$ 时, $VI(K, F)$ 等价于如下的非线性互补问题: 求 $x \in \mathbb{R}^n$, 满足

$$x \geq 0, \quad F(x) \geq 0, \quad x^T F(x) = 0$$

变分不等式与互补问题在经济理论、控制论、对策论、交通、社会及网络平衡等学科中有着广泛而重要的应用 ^[1]. 求解一般变分不等式问题的算法有很多, 主要包括

(1) 基于变分不等式的等价非光滑方程形式的 Josephy - 牛顿算法;

(2) 基于变分不等式的间隙函数的优化算法;

(3) 基于 KKT 条件将变分不等式转化为互补问题, 利用互补问题的算法, 包括内点算法、半光滑牛顿算法以及光滑化牛顿法等 ^[10]. 对于满足特殊条件的变分不等式又有一些特殊的有效算法. 关于变分不等式的各种具体算法可参见文献 [1], 而互补问题的各种有效算法则可参见文献 [11].

本文主要研究的幂罚函数法最早是由文献 [3] 提出的, 用于求解无限维线性互补问题; 文献 [2] 又将幂罚函数法用于求解无限维非线性互补问题. 而文献 [4-6] 又对幂罚函数法做了进一步的推广, 将其分别应用于求解有限维线性互补问题、非线性互补问题和混合互补问题等. 文献 [7, 10] 则对文献 [5, 6] 中的一些结果做了改进, 并将幂罚函数法推广至求解约束域为 $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ 的 $VI(K, F)$, 具体做法是利用 $VI(K, F)$ 的 KKT 条件将

*收稿日期: 2014-12-14

接收日期: 2015-05-06

作者简介: 杨波 (1981-), 男, 湖北武汉, 讲师, 主要研究方向: 最优化理论与算法.

VI(K, F) 转化为等价的互补问题, 进而设计幂罚函数法求解, 且将这一结果应用于求解非对称交通均衡问题. 最近, 文献 [8] 又将幂罚函数法应用于求解有限维障碍问题.

本文主要研究利用幂罚函数法求解约束域为

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, Cx \leq d\} \quad (1.1)$$

的 VI(K, F), 其中 A, C 分别是 $l \times n, m \times n$ 的实矩阵. 下文出现的 VI(K, F) 中的 K 均是形如 (1.1) 式所定义. 首先, 利用 KKT 条件和互补问题与变分不等式的等价性给出了与 VI(K, F) 等价的两个问题, 并在一定条件下分析了这些问题的解的存在性和唯一性; 然后, 根据等价的混合互补问题提出对应的幂罚方程组, 并利用度理论的有关结论证明了幂罚方程组的解的存在性以及唯一性; 最后, 证明了幂罚函数法的收敛性, 即幂罚方程组的解是收敛于 VI(K, F) 的解的.

2 两类等价问题

变分不等式问题 VI(K, F) 的 KKT 条件是如下的混合互补问题.

问题 2.1 求 $(x^T, u^T, v^T)^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$, 使得

$$F(x) - A^T u - C^T v = 0, \quad Ax = b, \quad 0 \geq v \perp Cx - d \leq 0. \quad (2.1)$$

定理 2.1 $x^* \in \mathbb{R}^n$ 是 VI(K, F) 的解当且仅当存在 $u^* \in \mathbb{R}^l, 0 \geq v^* \in \mathbb{R}^m$, 使得 $(x^{*T}, u^{*T}, v^{*T})^T$ 是问题 2.1 的解.

证 若 $x^* \in \text{SOL}(K, F)$, 则 x^* 是如下线性规划问题的解

$$\begin{aligned} \min \quad & x^T F(x^*), \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \quad Cx \leq d. \end{aligned}$$

从而存在 $u^* \in \mathbb{R}^l, 0 \geq v^* \in \mathbb{R}^m$ 是其 KKT 条件 (2.1) 的解.

反之, 设 $(x^{*T}, u^{*T}, v^{*T})^T$ 是 (2.1) 式的解, 则有 $Ax = Ax^* = b, v^{*T}(Cx^* - d) = 0$, 从而 $\forall x \in K$, 有

$$(x - x^*)^T F(x^*) = (x - x^*)^T (A^T u^* + C^T v^*) = [Ax - Ax^*]^T u^* - [Cx - Cx^*]^T v^* = [Cx - d]^T v^* \geq 0.$$

最后的不等式成立, 是因为 $Cx \leq d, v^* \leq 0$, 从而证得 x^* 是 VI(K, F) 的解.

由此可知 VI(K, F) 与其 KKT 条件 (问题 2.1) 等价, 即求解 VI(K, F) 等价于求解问题 2.1.

令 $K_1 = \{(x^T, u^T, v^T)^T \mid (x^T, u^T, v^T)^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m, v \leq 0\}$, 容易验证 K_1 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$ 中的凸锥, 利用 K_1 定义如下变分不等式问题.

问题 2.2 求 $z = (x^T, u^T, v^T)^T \in K_1$, 使得 $\forall \omega \in K_1$ 都有

$$(\omega - z)^T G(z) \geq 0, \quad (2.2)$$

其中

$$G(z) = G(x, u, v) = \begin{pmatrix} F(x) - A^T u - C^T v \\ Ax - b \\ Cx - d \end{pmatrix}.$$

关于问题 2.1 和问题 2.2, 我们有如下结论.

定理 2.2 设 $z = (x^T, u^T, v^T)^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$, 则 z 是问题 2.1 的解, 当且仅当 z 是问题 2.2 的解.

该定理的证明可以参看文献 [6]. 由此可知 $\text{VI}(K, F)$ 、问题 2.1 和问题 2.2 三者等价.

在下文中, 我们将用 $\|\cdot\|_p$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 空间中向量的 l_p 范数. 特别地, $\|\cdot\|_2$ 表示欧几里得范数. 对于 $\text{VI}(K, F)$, 做如下的假设.

A1 设 $F(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续, 且 ξ -单调, 即存在 $\xi \in (1, 2]$ 和 $\alpha > 0$, 使得

$$(x - y)^T(F(x) - F(y)) \geq \alpha \|x - y\|_2^\xi, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

A2 设线性独立约束规格 (LICQ) 成立, 即矩阵 $B = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$ 是行满秩的, 从而 A, C 均是行满秩矩阵, 且有 $\text{Rank}(B) = \text{Rank}(A) + \text{Rank}(C) = l + m \leq n$.

在假设条件 A1 下, 由文献 [1] 中定理 2.3.3 可知 $\text{VI}(K, F)$ 有唯一解, 记为 x .

在假设条件 A2 下, 容易证明线性方程组 $Ax = b, Cx = d$ 有公共解. 本文接下来的讨论都是假设条件 A1 和 A2 是成立的.

引理 2.1 对于任意 $z_i = (x_i^T, u_i^T, v_i^T)^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m, i = 1, 2$, 问题 2.2 中定义的函数 $G(z)$ 满足

$$(z_1 - z_2)^T(G(z_1) - G(z_2)) \geq \alpha \|x_1 - x_2\|_2^\xi,$$

其中 $\xi \in (1, 2], \alpha > 0$.

证 由函数 $G(z)$ 的定义容易得

$$(z_1 - z_2)^T(G(z_1) - G(z_2)) = (x_1 - x_2)^T(F(x_1) - F(x_2)),$$

由于 A1 成立, 故存在 $\xi \in (1, 2], \alpha > 0$ 使得

$$(x_1 - x_2)^T(F(x_1) - F(x_2)) \geq \alpha \|x_1 - x_2\|_2^\xi,$$

从而有

$$(z_1 - z_2)^T(G(z_1) - G(z_2)) \geq \alpha \|x_1 - x_2\|_2^\xi.$$

定理 2.3 问题 2.2 有唯一解.

证 由定理 2.1 知问题 2.1 有解, 设为 $z = (x^T, u^T, v^T)^T$, 由定理 2.2 知 z 也是问题 2.2 的解, 即问题 2.2 有解. 即有

$$F(x) - A^T u - C^T v = F(x) - (A^T, C^T) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0.$$

两边左乘 $B = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$, 得

$$BF(x) - BB^T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0.$$

由 $\text{Rank}(B) = \text{Rank}(A) + \text{Rank}(C) = l + m \leq n$ 知 BB^T 可逆, 从而有

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (BB^T)^{-1}BF(x). \quad (2.3)$$

故由 x 的唯一性, 可得 u, v 也都是唯一的, 即问题 2.2 有唯一解.

3 幂罚方程组及其解的存在唯一性

考虑如下的非线性、非光滑的方程组:

问题 3.1 求 $z_\lambda = (x_\lambda^T, u_\lambda^T, v_\lambda^T)^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m$, 使得

$$G(z_\lambda) + \lambda\Phi(z_\lambda) = 0, \quad (3.1)$$

其中 $\Phi(z_\lambda) = \Phi(x_\lambda, u_\lambda, v_\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ [v_\lambda]_+^{1/k} \end{pmatrix}$, $\lambda \geq 1$ 是罚参数, $k \geq 0$ 是幂参数, $[u]_+ = \max\{u, 0\}$, 对于 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $a > 0$, 规定 $y^a = (y_1^a, y_2^a, \dots, y_n^a)^T$.

方程组 (3.1) 式称为问题 2.1 的幂罚方程组. 本节将主要应用度理论证明 (3.1) 式解的存在性, 并证明其唯一性. 为此, 先将需要用到的度理论的有关结论 (详见文献 [9]) 叙述如下.

在以下结论中, 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为有界开集, $\bar{E}$ 和 ∂E 分别表示 E 的闭包和边界.

引理 3.1 [9] 设 $I: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是恒等映射, 若 $y \in E$, 则 $\deg(I, E, y) = 1$.

引理 3.2 [9] (同伦不变性) 设 $H: \bar{E} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是一连续函数, 若 $y \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$y \notin \{H(x, t) \mid (x, t) \in \partial E \times [0, 1]\},$$

则 $\deg(H(x, t), E, y)$ 是与 $t \in [0, 1]$ 无关的一个常数.

引理 3.3 [9] 设 $f: \bar{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是连续函数, 若 $y \notin f(\partial E)$, 且 $\deg(f, E, y) \neq 0$, 则方程组 $f(x) = y$ 在 E 中有解.

为了利用以上结论证明幂罚方程组 (3.1) 的解的存在性, 先构造如下的同伦函数

$$H(z, t) = t\Psi(z) + (1-t)z, \quad t \in [0, 1],$$

其中

$$z = (x^T, u^T, v^T)^T, \quad \Psi(z) = G(z) + \lambda\Phi(z),$$

则 $H(z, t)$ 在 $\bar{E} \times [0, 1]$ 上是连续的. 如果 $H(z, t) = 0$ 有解, 则其解有如下性质:

引理 3.4 对于任意的 $\lambda \geq 1, t \in [0, 1]$, 若 $H(z, t) = 0$ 有解 $z_{\lambda t} = (x_{\lambda t}^T, u_{\lambda t}^T, v_{\lambda t}^T)^T$, 则存在不依赖于 λ, t 和 $z_{\lambda t}$ 的正数 M , 使得

$$\|x_{\lambda t}\|_2 \leq M.$$

证 (a) 当 $t = 0$ 时, $H(z, 0) = z$, 即 $H(z, 0)$ 为恒等映射, $H(z, 0) = 0$ 有唯一解 $z = 0$.

(b) 当 $t \in (0, 1]$ 时, 在等式

$$H(z_{\lambda t}, t) = t\Psi(z_{\lambda t}) + (1-t)z_{\lambda t} = 0$$

两边左乘 $z_{\lambda t}^T$, 得

$$tz_{\lambda t}^T \Psi(z_{\lambda t}) = (t-1)z_{\lambda t}^T z_{\lambda t},$$

即

$$z_{\lambda t}^T [G(z_{\lambda t}) + \lambda \Phi(z_{\lambda t})] = -\frac{1-t}{t} z_{\lambda t}^T z_{\lambda t}.$$

设 x_0 是方程组 $Ax = b, Cx = d$ 的一个公共解, 记 $z_0 = (x_0^T, 0^T, 0^T)^T$, 由函数 $G(z)$ 和 $\Phi(z)$ 的定义可得

$$z_{\lambda t}^T [G(z_{\lambda t}) - G(z_0)] = -\lambda v_{\lambda t}^T [v_{\lambda t}]_+^{1/k} - x_{\lambda t}^T F(x_0) - \frac{1-t}{t} z_{\lambda t}^T z_{\lambda t},$$

从而

$$(z_{\lambda t} - z_0)^T [G(z_{\lambda t}) - G(z_0)] = -\lambda v_{\lambda t}^T [v_{\lambda t}]_+^{1/k} - x_{\lambda t}^T F(x_0) - \frac{1-t}{t} z_{\lambda t}^T z_{\lambda t} + x_0^T F(x_0).$$

再由引理 2.1, 可以得到

$$\alpha \|x_{\lambda t} - x_0\|_2^\xi \leq (z_{\lambda t} - z_0)^T [G(z_{\lambda t}) - G(z_0)] = -\lambda v_{\lambda t}^T [v_{\lambda t}]_+^{1/k} - x_{\lambda t}^T F(x_0) - \frac{1-t}{t} z_{\lambda t}^T z_{\lambda t} + x_0^T F(x_0).$$

又 $v_{\lambda t} = [v_{\lambda t}]_+ - [v_{\lambda t}]_-$, 其中 $[v]_- = \max\{-v, 0\}$, 则有 $[v_{\lambda t}]_+^T [v_{\lambda t}]_- = 0$, 因此有

$$-v_{\lambda t}^T [v_{\lambda t}]_+^{1/k} = -([v_{\lambda t}]_+ - [v_{\lambda t}]_-)^T [v_{\lambda t}]_+^{1/k} = -[v_{\lambda t}]_+^T [v_{\lambda t}]_+^{1/k} \leq 0,$$

且 $t \in (0, 1]$ 时有

$$-\frac{1-t}{t} z_{\lambda t}^T z_{\lambda t} \leq 0.$$

结合上面两式及 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\alpha \|x_{\lambda t} - x_0\|_2^\xi \leq -x_{\lambda t}^T F(x_0) + x_0^T F(x_0) \leq \|x_{\lambda t} - x_0\|_2 \|F(x_0)\|_2.$$

从而有

$$\|x_{\lambda t} - x_0\|_2 \leq (\alpha^{-1} \|F(x_0)\|_2)^{1/(\xi-1)}.$$

进一步有

$$\|x_{\lambda t}\|_2 \leq (\alpha^{-1} \|F(x_0)\|_2)^{1/(\xi-1)} + \|x_0\|_2 = M.$$

结合 (a)、(b) 两种情况即证明了引理.

推论 3.1 对于任意的 $\lambda \geq 1$, 若 $\Psi(z) = 0$ (即问题 3.1) 有解 $z_\lambda = (x_\lambda^T, u_\lambda^T, v_\lambda^T)^T$, 则存在不依赖于 λ 和 z_λ 的正数 M' , 使得

$$\|x_\lambda\|_2 \leq M', \quad \|y_\lambda\|_2 \leq M',$$

其中 $y_\lambda = (u_\lambda^T, v_\lambda^T)^T$.

证 在引理 3.4 中取 $t = 1$ 即可得第一个不等式.

由 (2.3) 式可知

$$y_\lambda = \begin{pmatrix} u_\lambda \\ v_\lambda \end{pmatrix} = (BB^T)^{-1}BF(x_\lambda),$$

其中 $B = (A^T, C^T)^T$, 从而有

$$\|y_\lambda\|_2 \leq \| (BB^T)^{-1} \|_2 \cdot \|B\|_2 \cdot \|F(x_\lambda)\|_2.$$

由条件 A1 的假设, $F(x)$ 是连续的, 又由上面的证明知, 对于任意的 $\lambda \geq 1$, $\|x_\lambda\|_2$ 都是有界的, 从而 $\|F(x_\lambda)\|_2$ 是有界的, 也就证明了第二个式子.

下面证明问题 3.1 的解存在且唯一.

定理 3.1 对于任意的 $\lambda \geq 1$, 问题 3.1 有唯一解.

证 设 M 是引理 3.4 中所定义的正数, 取 $r > M$, 令

$$D = \{z = (x^T, u^T, v^T)^T \mid \|x\|_2 < r, \|(u^T, v^T)^T\|_2 < r\},$$

则 D 是 $\mathbb{R}^{n+m+l}$ 中的有界开集. 由同伦函数

$$H(z, t) = t\Psi(z) + (1-t)z, \quad t \in [0, 1]$$

的定义可知, $H(z, t)$ 在 $\bar{D} \times [0, 1]$ 上连续.

由引理 3.4, 对于任意的 $\lambda \geq 1, t \in [0, 1]$, 若 $H(z, t) = 0$ 有解 $z_{\lambda t} = (x_{\lambda t}^T, u_{\lambda t}^T, v_{\lambda t}^T)^T$, 则有

$$\|x_{\lambda t}\|_2 \leq M < r.$$

从而有 $z_{\lambda t} \notin \partial D$, 即方程 $H(z, t) = 0$ 在 $\partial D \times [0, 1]$ 上没有解, 由引理 3.2 有

$$\deg(H(z, 1), D, 0) = \deg(H(z, 0), D, 0),$$

而 $H(z, 0) = z = I(z)$ 为恒等映射, 且 $0 \in D$, 由引理 3.1 知 $\deg(I, D, 0) = 1$. 又 $H(z, 1) = \Psi(z)$, 从而有

$$\deg(\Psi(z), D, 0) = \deg(H(z, 1), D, 0) = \deg(H(z, 0), D, 0) = \deg(I, D, 0) = 1.$$

再由引理 3.3 可得方程 $\Psi(z) = 0$ 在 D 中有解, 即问题 3.1 的解存在.

下证问题 3.1 的解是唯一的. 设 $z_i = (x_i^T, u_i^T, v_i^T)^T$ (其中 $i = 1, 2$) 是问题 3.1 的两个解. 容易证明 $\Phi(z)$ 是单调的 (可参考文献 [10]), 故有

$$(z_1 - z_2)^T (\Phi(z_1) - \Phi(z_2)) = (v_1 - v_2)^T ([v_1]_+^{1/k} - [v_2]_+^{1/k}) \geq 0.$$

从而

$$\begin{aligned} 0 &= (z_1 - z_2)^T (\Psi(z_1) - \Psi(z_2)) = (z_1 - z_2)^T (G(z_1) - G(z_2)) + (z_1 - z_2)^T (\Phi(z_1) - \Phi(z_2)) \\ &\geq (z_1 - z_2)^T (G(z_1) - G(z_2)). \end{aligned}$$

由引理 2.1 立即可得 $x_1 = x_2$. 而由 (2.3) 式可知

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = (BB^T)^{-1}BF(x_1), \quad \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = (BB^T)^{-1}BF(x_2),$$

可得 $\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$. 从而 $z_1 = z_2$, 唯一性得证.

4 幂罚函数法的收敛性分析

下面主要证明问题 3.1 的解收敛于问题 2.2 的解.

由定理 3.1 和推论 3.1 可知, 若 $z_\lambda = (x_\lambda^T, u_\lambda^T, v_\lambda^T)^T$ 是问题 3.1 的解, 则存在有界集 $S \subset \mathbb{R}^n$, 使得 $\forall \lambda \geq 1$, 都有 $x_\lambda \in S$, 利用这个性质, 接下来证明 $\| [v_\lambda]_+ \|_2 \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow \infty$).

引理 4.1 对于任意的 $\lambda \geq 1$, 设 $z_\lambda = (x_\lambda^T, u_\lambda^T, v_\lambda^T)^T$ 是 (3.1) 的解, 则存在不依赖于 λ 和 z_λ 的正数 M_0 , 使得

$$\| [v_\lambda]_+ \|_2 \leq M_0 \lambda^{-k}.$$

证 在 (3.1) 式两边左乘 $(0^T, [v_\lambda]_+^T)$, 得

$$[v_\lambda]_+^T (Cx_\lambda - d) + \lambda [v_\lambda]_+^T [v_\lambda]_+^{1/k} = 0.$$

设 $p = 1 + 1/k, q = 1 + k$, 由 Hölder 不等式有

$$\lambda [v_\lambda]_+^T [v_\lambda]_+^{1/k} = \lambda \| [v_\lambda]_+ \|_p^p = -[v_\lambda]_+^T (Cx_\lambda - d) \leq \| [v_\lambda]_+ \|_p \cdot \| Cx_\lambda - d \|_q,$$

即

$$\| [v_\lambda]_+ \|_p^{p-1} \leq \| Cx_\lambda - d \|_q \cdot \lambda^{-1}.$$

两边开 $p-1$ 次方得

$$\| [v_\lambda]_+ \|_p \leq \| Cx_\lambda - d \|_q^{1/(p-1)} \cdot \lambda^{-1/(p-1)} \leq M_S \lambda^{-k}, \quad (4.1)$$

其中 $M_S = \sup_{\omega \in S} \| C\omega - d \|_q^k$, S 是如上所定义的有界集.

由欧几里得空间中范数的等价性可知存在正数 δ , 使得

$$\| [v_\lambda]_+ \|_2 \leq \delta \| [v_\lambda]_+ \|_p.$$

结合 (4.1) 式可得

$$\| [v_\lambda]_+ \|_2 \leq \delta M_S \lambda^{-k} = M_0 \lambda^{-k},$$

其中 $M_0 = \delta M_S$.

下面介绍主要的收敛定理.

定理 4.1 对于任意的 $\lambda \geq 1$, 设

$$z = (x^T, u^T, v^T)^T, z_\lambda = (x_\lambda^T, u_\lambda^T, v_\lambda^T)^T$$

分别是问题 2.1 和问题 3.1 的解. 则存在不依赖于 λ 和 z_λ 的正数 L , 使得

$$\| x - x_\lambda \|_2 \leq L \lambda^{-k/(\xi-1)}.$$

进一步, 若令 $y = (u^T, v^T)^T$, $y_\lambda = (u_\lambda^T, v_\lambda^T)^T$, 则有 $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} y_\lambda = y$.

证 将 $z - z_\lambda$ 分解如下

$$z - z_\lambda = z - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ [v_\lambda]_+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_\lambda \\ -u_\lambda \\ [v_\lambda]_- \end{pmatrix} = r_\lambda - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ [v_\lambda]_+ \end{pmatrix},$$

其中 $r_\lambda = z + (-x_\lambda^T, -u_\lambda^T, [v_\lambda]_-^T)^T$, 注意到 $z - r_\lambda = (x_\lambda^T, u_\lambda^T, -[v_\lambda]_-^T)^T \in K_1$, 用 $z - r_\lambda$ 替换 (2.2) 式中的 ω 可得

$$-r_\lambda^T G(z) \geq 0, \quad (4.2)$$

在 (3.1) 式两边左乘 r_λ^T 得

$$r_\lambda^T G(z_\lambda) + \lambda r_\lambda^T \Phi(z_\lambda) = 0. \quad (4.3)$$

将 (4.2) 和 (4.3) 式相加可得

$$r_\lambda^T [G(z_\lambda) - G(z)] + \lambda r_\lambda^T \Phi(z_\lambda) \geq 0. \quad (4.4)$$

由 $[v_\lambda]_-^T [v_\lambda]_+^{1/k} = 0, v \leq 0, [v_\lambda]_+^{1/k} \geq 0$ 可得

$$r_\lambda^T \Phi(z_\lambda) = (v + [v_\lambda]_-)^T [v_\lambda]_+^{1/k} = v^T [v_\lambda]_+^{1/k} \leq 0.$$

结合 (4.4) 式可得

$$r_\lambda^T [G(z) - G(z_\lambda)] \leq 0.$$

又 $[v_\lambda]_- = -v_\lambda + [v_\lambda]_+$, 有 $r_\lambda = z - z_\lambda + (0^T, 0^T, [v_\lambda]_+^T)^T$, 则上面的不等式变为

$$(z - z_\lambda)^T [G(z) - G(z_\lambda)] \leq -[v_\lambda]_+^T C(x - x_\lambda).$$

再由引理 2.1 和引理 4.1, 以及上述不等式, 并利用 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$\alpha \|x - x_\lambda\|_2^\xi \leq \| [v_\lambda]_+ \|_2 \cdot \| C \|_2 \cdot \| x - x_\lambda \|_2 \leq M_0 \lambda^{-k} \| C \|_2 \cdot \| x - x_\lambda \|_2.$$

即

$$\|x - x_\lambda\|_2 \leq (\alpha^{-1} M_0 \|C\|_2)^{1/(\xi-1)} \lambda^{-k/(\xi-1)} = L \lambda^{-k/(\xi-1)},$$

其中 $L = (\alpha^{-1} M_0 \|C\|_2)^{1/(\xi-1)}$, M_0 是引理 4.1 中所定义的正数.

注意到 z, z_λ 分别是问题 2.1 和问题 3.1 的解, 即分别满足

$$0 = F(x) - A^T u - C^T v = F(x) - B^T y, \quad 0 = F(x_\lambda) - A^T u_\lambda - C^T v_\lambda = F(x_\lambda) - B^T y_\lambda,$$

其中 $B = (A^T, C^T)^T$. 两式相减便有

$$F(x) - F(x_\lambda) = B^T (y - y_\lambda).$$

又因 B 是行满秩矩阵, 故有

$$y - y_\lambda = (BB^T)^{-1} B[F(x) - F(x_\lambda)]. \quad (4.5)$$

再由定理的前部分结果以及函数 $F(x)$ 的连续性, 容易得到 $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (y - y_\lambda) = 0$, 即

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} y_\lambda = y.$$

这就完成了定理的证明.

所谓 $F(x)$ 是 Hölder 连续的, 是指存在常数 $\beta > 0, \gamma \in (0, 1]$, 使得

$$\|F(x_1) - F(x_2)\|_2 \leq \beta \|x_1 - x_2\|_2^\gamma, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n. \quad (4.6)$$

从定义中可知, 当 $\gamma = 1$ 时, Hölder 连续就是 Lipschitz 连续. 对于 Hölder 连续和 Lipschitz 连续, 我们有下面的推论.

推论 4.1 对于任意的 $\lambda \geq 1$, 设 $z = (x^T, u^T, v^T)^T$, $z_\lambda = (x_\lambda^T, u_\lambda^T, v_\lambda^T)^T$ 分别是问题 2.1 和问题 3.1 的解. 令 $y = (u^T, v^T)^T$, $y_\lambda = (u_\lambda^T, v_\lambda^T)^T$.

(1) 若 $F(x)$ 是 Hölder 连续的, 则存在不依赖于 λ 和 z_λ 的正数 M_1 , 使得

$$\|y - y_\lambda\|_2 \leq M_1 \lambda^{-k\gamma/(\xi-1)}.$$

(2) 若 $F(x)$ 是强单调且 Lipschitz 连续的, 则存在不依赖于 λ 和 z_λ 的正数 M_2 , 使得

$$\|y - y_\lambda\|_2 \leq M_2 \lambda^{-k}.$$

证 (1) 由 (4.5) 式和 Hölder 连续的定义 (4.6), 有

$$\|y - y_\lambda\|_2 = \|(BB^T)^{-1}B\|_2 \|F(x) - F(x_\lambda)\|_2 \leq \|(BB^T)^{-1}B\|_2 \beta \|x - x_\lambda\|_2^\gamma.$$

再由定理 4.1 可得结论.

(2) 强单调即 $\xi = 2$, Lipschitz 连续即 $\gamma = 1$, 结合定理 4.1 及 (1) 的结果可得 (2).

参 考 文 献

- [1] Facchinei F, Pang J S. Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems[M]. New York: Springer, 2003.
- [2] Wang S, Huang C S. A power penalty method for solving a nonlinear parabolic complementarity problem[J]. Nonl. Anal.: The., Meth. Appl., 2008, 69(4): 1125–1137.
- [3] Wang S, Yang X Q, Teo K L. Power penalty method for a linear complementarity problem arising from American option valuation[J]. J. Optim. The. Appl., 2006, 129(2): 227–254.
- [4] Wang S, Yang X. A power penalty method for linear complementarity problems[J]. Oper. Res. Lett., 2008, 36(2): 211–214.
- [5] Huang C, Wang S. A power penalty approach to a nonlinear complementarity problem[J]. Oper. Res. Lett., 2010, 38(1): 72–76.
- [6] Huang C, Wang S. A penalty method for a mixed nonlinear complementarity problem[J]. Nonl. Anal.: The., Meth. Appl., 2012, 75(2): 588–597.
- [7] Chen M, Huang C. A power penalty method for the general traffic assignment problem with elastic demand[J]. Management, 2014, 10(4): 1019–1030.

- [8] Wang S. A penalty method for a finite-dimensional obstacle problem with derivative constraints[J]. Optim. Lett., 2014, 8(6): 1799–1811.
- [9] Ortega J M, Rheinboldt W C. Iterative solution of nonlinear equations in several variables[M]. New York: Academic Press, 1970.
- [10] 陈明. 幂罚函数法及其在非对称交通分配问题中的应用研究 [D]. 武汉: 武汉大学, 2013.
- [11] 韩继业, 修乃华, 戚厚铎. 非线性互补理论与算法 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2006.
- [12] 杜文, 黄崇超. 求解二层规划问题的遗传算法 [J]. 数学杂志, 2005, 25(2): 167–170.

POWER PENALTY METHOD FOR VARIATIONAL INEQUALITY PROBLEMS WITH A CLASS OF LINEAR CONSTRAINTS

YANG Bo^{1,2}, HUANG Chong-chao¹

(1. School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

(2. College of Technology and Engineering, Yangtze University, Jingzhou 434020, China)

Abstract: In this paper, we study the problem that adopts power penalty method to solve a variational inequality (VI) problem with a class of linear constraints. Under certain conditions, by using the KKT condition of the VI, we transform the VI problem into an equivalent mixed complementarity problem and a new VI problem and analyze the existence and uniqueness of the solutions. In addition, we prove the existence of solution of the power penalty equations by degree theory and the uniqueness. At last, we prove the convergence of the power penalty method, in other words, the solution of the power penalty equations converges to the solution of the VI problem.

Keywords: variational inequality; linear constraint; complementarity problem; power penalty method

2010 MR Subject Classification: 90C33