Vol. 37 (2017)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

鞅空间理论的新进展

刘培德
(武汉大学数学与统计学院, 湖北 武汉 430072)

摘 要: 本文是一篇综述性的文字, 内容主要是近年来有关鞅空间理论的发展状况, 特别是集中于 B - 值鞅和弱型鞅空间两个部分, 可以看做是整个鞅空间理论发展的一个侧面. 希望以此引起读者对鞅论的了解和进一步研究的兴趣. 具体内容分为以下三节: 1. 研究鞅空间理论的意义, 阐述鞅空间理论与调和分析的关系; 2. 鞅空间理论的向量值化, 阐述 B - 值鞅不等式与 Banach 空间几何学的相互依存关系; 3. 弱型鞅空间与变指数鞅空间的不等式及其应用.

关键词: 鞅空间; Banach 空间几何学; 弱型空间; 变指数 Lebesgue 空间
MR(2010) **主题分类号:** 60G42; 60G46 **中图分类号:** O177.2
文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2017)03-0445-12

编辑部约我写一篇关于鞅论方面的综述文字, 我想鞅论是一个庞大的体系, 从何处下笔一时难以厘定. 考虑再三莫若从这些年来我们在鞅空间理论方面所做的工作谈起, 希望对感兴趣的读者有所裨益. 这些文字内容当然不是很基础的, 需要有一点鞅论的常识读起来才较为方便. 由篇幅所限, 文中所涉及的符号、概念等也不可能一一例举, 读者可以参考龙瑞麟的专著 [46] 或拙著 [35].

1 研究鞅空间理论的意义

作为随机过程研究的一个对象, 从理论传承的角度来看鞅论最自然的起源应该是对于独立增量随机序列的研究, 鞅保留了此种序列的基本属性而扩大了它的范围. 鞅的概念最早于上世纪 30 年代末由 Ville 引入, Levy 研究了它的基本属性. 40 年代美国概率与分析学家 Doob 一直潜心于鞅论的研究, 得到了奠基性的重要成果, 以至于使得鞅论成为概率论与随机过程理论中的一个独立的分支. 50 年代初 Doob 出版了他的里程碑式的专着《随机过程》一书 [14]. 可贵的是之后 Doob 还系统地比较了鞅与复分析中调和函数的属性, 二者虽然构建在不同的地基之上, 定义方式也迥然不同, 属性上却有颇多相似之处. 以至于后来鞅论和实与复分析、调和分析等学科有了不可分割的联系.

50 年代以后有关鞅论的研究在广度和深度方面都得到迅猛的发展, 它在概率论中的地位不断凸显, 向其它数学分支的渗透也一路高歌猛进. 大致上讲, 可以将其走向归纳为三个方面: 一是沿着随机过程与数理统计方向的延伸, 乃至渗透到高度发展的随机积分与随机微分方程理论中去; 二是沿着函数空间与调和分析方向的发展, 形成了鞅空间的一套广袤的理论; 三是与形形色色的实际问题相结合促成新的应用学科分支的发展. 比较突出的例子是与传染病模型的结合以及与金融理论的结合, 投资风险评估、期权定价等等. 时至今日, 鞅论已然成

*收稿日期: 2016-10-20 接收日期: 2017-01-17
基金项目:国家自然科学基金资助 (11471251).
作者简介: 刘培德 (1943–), 男, 河南开封, 教授, 主要研究方向: 泛函分析及其应用, 鞅论.

为理论系统, 内容浩瀚, 应用广泛的一门学科. 然而无论是自身的理论体系还是思想方法上对于其它学科的借鉴和应用, 鞅论都还在不断地发展着.

作者有幸近年来一直从事鞅空间理论方面的研究, 就某些感兴趣的课题做了一些有益的探索. 借此机会, 我们将对这些工作进行一点阐述与回顾, 文字上并不追求内容的全面性, 而是着重于阐述研究工作的背景以及当初发展的思路. 我们的工作主要集中于鞅空间的向量值化以及通过扩大鞅空间生成函数的类型以扩展鞅空间理论的适用范围. 其实, 鞅又可以分为离散鞅和连续鞅, 单参数鞅与多参数鞅, 由于我们初始研究的目的在于刻画值空间的几何特征, 我们只是集中于离散鞅, 间或涉及多参数鞅. 不过单参数的离散鞅毕竟是整个理论的思想方法体现最为集中的部分, 也是整个理论的基础. 由篇幅所限, 同时期的其它工作, 例如关于重排不变空间中的鞅理论以及非交换鞅论, 本文无法兼及, 没有提及并非意欲降低它们的重要性.

说到鞅空间理论, 先得知道经典函数空间理论以及鞅论与它的关系. 实际上早先的 H^p 空间理论只不过是复分析中的一章. 到了上世纪 70 年代, 经典复分析、调和分析与算子理论得到重大发展, 特别是以 Burkholder-Gundy-Silverstein 的工作为标志可以说走上了一个新的台阶. 他们证明了单位圆中的一个解析 (或调和) 函数 u 属于 H^p 当且仅当它的非切向极大函数 u^* 属于 L^p $(1 < p < \infty)$, 即所谓的 H^p 函数的实变刻画. 紧接着 Fefferman-Stein 又把这一结果推广到高维情况, 给出了高维 H^p 空间的几种实变刻画. 如此以来一个带有本质性的事实被揭示出来: H^p 空间的概念原来根本不依赖于函数的解析性或者调和性, 这和长期以来在复分析氛围下人们的观念大相径庭. 在此基础上实变的 H^p 空间理论发展起来了. 1961 年 John 与 Nirenberg 发现了 H^1 的共轭空间是 BMO 一有界平均震荡空间, 人们的视野开始关注到对于 Lebesgue 空间, Hardy 空间, BMO 以及 Sobolev 空间, Besov 空间, Triebel-Lizorkin 空间等一系列更加广泛的空间类的研究, 对于它们的结构的、拓扑的乃至几何属性进行系统地考察. 在 1974 及以后的几年里, Coifman, Taibleson 与 Weiss 等发现了 H^p 空间的原子结构与分子结构, 包括一维的和高维的, 使得原子分解和分子分解方法成为研究空间结构的重要工具. 与此同时, A_p - 权与加权不等式、实和复内插方法与内插空间理论也蓬勃发展起来. 直到 70 年代末 80 年代初, 关于 Lipschitz 曲线上 Calderon-Zygmund 奇异积分算子的 L^2 有界性的证明以及 $T(1)$, $T(b)$ 判别准则的建立, 这一系列成果不仅使经典分析中一些重大问题实现了突破, 从而大大扩展了函数空间与调和分析理论的内涵, 而且在此过程中围绕 H_p 空间理论发展了一整套实变的技巧, 进而促进了鞅论中以 H_p 空间为代表的相应理论的发展.

鞅空间理论与调和分析二者的相互影响与渗透是双向的. 首先不仅鞅空间理论中的许多概念源自调和分析, 而且二者研究的课题也存在一定的相似性. 例如二者都研究极大函数的有界性, 都有各自的 H^p 空间、BMO 空间, 都广泛地运用了泛函分析的工具等. 鞅空间理论实际上是概率论、调和分析与泛函分析理论的交叉. 更细致地说, 鞅论中的 H^1 与 BMO 的对偶, John-Nirenberg 定理, H^p 鞅的原子分解, 凸 Φ 函数不等式, A_p - 权与加权不等式, 内插空间等都借鉴了调和分析, 或者多多少少具有调和分析的背景, 以至于可以说至今为止调和分析中许多结论在鞅论中都有“令人满意的对应”. 另一方面, 鞅论中丰富的思想方法和技巧又反馈到调和分析的研究中, 它不仅是经典 H^p 理论的延伸, 而且往往能够为其结论提供更加便捷和更加精准的证明. 例如鞅论中的停时与好 λ - 不等式的思想方法在调和分析中都有很好的运用; 关于 BMO 函数的 Fefferman-Stein 分解, 其构造性证明的思想也来自于三进

鞅. 更近的例子是 Burkholder 关于鞅变换的研究直接导致了一类叫做“具有无条件鞅差序列 (UMD) 性质的空间”的出现, 它揭示了上世纪初 Riesz 兄弟关于 Fourier 分析中著名问题的真谛, 鞅变换对应着调和分析中的奇异积分算子, UMD 空间在向量值调和分析中起到了无可替代的重要作用. 此外龙瑞麟、赵家昂与钱涛关于 $T(b)$ 定理的鞅证明大大简化了原有的证明, 它在 Calderon-Zygmund 奇异积分算子理论中显示了巨大的威力. 凡此种种都可以看出鞅空间理论与调和分析不可分割的联系. 在这种意义上可以说, 鞅空间理论就是概率空间上的调和分析.

一个鞅 $f=(f_n)_{n\geq 0}$ 是一个适应于某个递增 (或递减) σ - 代数流 $(\Sigma_n)_{n\geq 0}$ 的随机变量序列, 人们可以考察它的各种概率属性, 考察由鞅构成的各类空间的性质以及建立在各类空间上的线性或次线性算子的连续性等等. 一个鞅与一个函数空间上的元素的最大区别在于: 一般的函数空间中的元素是定义在既具有线性结构又具有拓扑结构的 R^n 上的可测函数, 鞅空间中的元素却是定义在两者都不具备的概率空间之上的, 仅仅有一个 σ - 代数流可供利用. 所谓连续性、紧性、仿紧性、覆盖引理、Calderon-Zygmund 分解等等统统用不上. 所以看上去一个 R^n 上的函数与一个随机变量都是表达某种函数关系, 实际上二者的差异很大, 要证明如上面所说的那些类似的结果所使用的方法、技巧都有很大的不同, 甚至绝然不同. 于是不难理解, 并非调和分析中的每个结论都能够在鞅论中找到合适的对应, 鞅空间理论更不是调和分析理论的 copy. 在鞅论中, 人们开发了一整套诸如停时、选样、鞅变换、好 λ - 不等式、原子分解等适合于自身的行之有效的方法, 从而赋予了鞅空间理论广阔的发展空间与无穷的生命力, 这才有了今日繁盛的鞅空间理论的局面. 从现代数学的观点来看, 鞅比函数更能够反映过程、反映信息, 反映逼近性. 就连递增 σ - 代数流的框架看上去也不无天然的合理性, 因为人们对于客观世界的认知过程乃至学习的、实践的经历无不是逐渐增加与扩宽的, 这也是信息论的前提. 然而自然界或人类社会的某个规律, 如果是得之于无依托的某个随机状态中, 应该说更能够显示出其客观规律性. 鞅空间理论的结论正因为是建立在一般概率空间之上的, 鞅又是一个随机序列, 所以其结论更能显示出独立的价值.

2 鞅空间的向量值化

60、70 年代 Meyer, Dellacherier, Burkholder, Gundy 和 Davis 等关于标量值连续鞅与离散鞅的工作大大活跃了鞅论的研究. 差不多同时, 一门新兴的数学学科分支蓬勃发展起来, 叫做 Banach 空间几何学. 它是围绕着如何刻画 Banach 空间的 Radon-Nikodym 性质为中心发展起来的. 并非偶然的是, 在论证空间的可凹性与 RN 性质等价的时候, 证明是通过构造一个在此空间中取值的一致有界而处处不收敛的鞅来实现的. 最后结论是对于一个 Banach 空间来说, 其可凹性、RN 性质与取值于其中的鞅的收敛性彼此等价. 由此鞅具有了单纯考察其概率属性以外的价值! 从此关于 B - 值鞅与其值空间的几何特征相互关系的研究一发不可收拾. 1977 年 Diestel 与 Uhl 出版了《向量测度》一书 [13], 该书是这方面研究成果的系统总结. 它在 Banach 空间几何理论中具有重要地位. 此书传到中国来的时候已经是 80 年代初了.

在《向量测度》专讲鞅论一章的注评中例举了法国数学家 Pisier 1975 年关于用鞅不等式刻画值空间一致凸与一致光滑性的工作. 其中对于标量值鞅与向量值鞅有如下的评述: “标量值鞅的不等式由于 Burkholder, Davis 与 Gundy 等人的工作被证明具有无可争议的重要性. 长期以来向量值鞅的不等式却令人难以捉摸, 最可能的原因是在标量情况起到至关重要作用的分布函数方法在向量值情况没有自然的类似物. 直到 Pisier 1975 年令人震惊的工作出

现之前在这方面几乎没有任何的进展, 是他第一次证明了 B - 值鞅的不等式本质上依赖于值空间的几何属性”. Diestel 与 Uhl 还预言: Pisier 的工作还只是一个开头, 这一领域的研究具有极大的发展潜力.

实际上 Pisier 是在用鞅方法证明 Enflo 的超自反空间具有等价一致凸范数定理时得到他的不等式的. Pisier 证明了 Banach 空间 X 同构于 $p\,(1<p\le 2)$ 一致光滑 (或 $q\,(2\le q<\infty)$ 一致凸) 空间当且仅当存在常数 $c>0$ 使得每个取值于 X 的鞅满足

$$\sup_{n\ge 0} E\parallel f_n\parallel^p\le c\sum_{n=0}^{\infty}E\parallel f_n-f_{n-1}\parallel^p \ (\text{或}\sup_{n\ge 0} E\parallel f_n\parallel^q\ge c\sum_{n=0}^{\infty}E\parallel f_n-f_{n-1}\parallel^q)$$

(见文献 [52]). 之后, Pisier, Hoffman-Jorgensen, Woyczynski 等还用各种相关级数的收敛性刻画了空间的光滑性. 然而在作者接触这段文字之后脑海中始终有一串挥之不去的疑问, 那就是相对于标量值鞅不等式极为丰富的内容, 向量值鞅不等式为何如此贫乏? 这种状况能否改变? 如何改变?

受 Pisier 文章启发, 在学习 Banach 空间几何理论与经典鞅论的基础上, 1987 年我们在 B 值鞅的研究中首次引入了 p - 均方算子 $S^{(p)}$ 和条件 p - 均方算子 $s^{(p)}$ 的概念, 这里 $0<p<\infty$,

$$S^{(p)}(f)=(\sum_{n=0}^{\infty}\parallel df_n\parallel^p)^{\frac{1}{p}},\ \ s^{(p)}(f)=(\sum_{n=0}^{\infty}E(\parallel df_n\parallel^p|\,\Sigma_{n-1}))^{\frac{1}{p}},\ \ \forall f=(f_n),$$

其中 $df_0=f_0$, $df_n=f_n-f_{n-1}$, $n\ge 1$, $(df_n)_{n\ge 0}$ 称为 f 的鞅差, $\|\cdot\|$ 代表 Banach 空间 X 中的范数. 之后围绕 p - 均方算子建立了一系列与之有关的不等式, 事实证明 p 是值空间几何性质的指标. p - 均方算子既是将 Banach 空间的几何性质与鞅不等式联系起来的关键, 又是系统地建立 B - 值鞅空间理论的关键. 详细说来:

1. 有了 p - 均方算子, 才有可能定义各类 B - 值鞅的空间. 诸如 Hardy 空间 ${}_pH_a^s(X)$, ${}_pH_a^S(X)$, ${}_pK_a(X)$, ${}_p\mathcal{K}_a(X)$, ${}_pL_a(X)$, ${}_p\mathcal{L}_a(X)$, 可料空间 ${}_pD_a(X)$, ${}_pQ_a(X)$; 若以凸函数 Φ 代替正实数 a 又可得到 Orlicz-Hardy 空间 ${}_pH_\Phi^s(X)$, ${}_pH_\Phi^S(X)$ 等, 乃至空间 $\mathrm{BMO}_p(X)$, $\mathrm{BMO}_p^+(X)$ 以及 Lorentz 空间、弱型空间等等. 其它还有由极大算子、平削算子、变差算子、鞅变换算子等生成的一系列空间. 它们构成了 B - 值鞅空间理论研究的基本对象或者说基本土壤, 空间与空间之间的相互关系, 各类算子的有界性等构成了 B - 值鞅空间理论的基本内涵, 它们远比标量值鞅更为丰富.

2. 标量值鞅的很多不等式放在 B - 值情况一般不再成立, 究竟是否成立要看它的值空间的几何属性而定. 例如著名的 Burkholder-Gundy-Davis 不等式在 B - 值情况下一般不再成立. 此时 B-G-D 双边不等式被分为两个单边不等式, 以 Hardy 空间为例, 若 $1\le a<\infty$, 它们分别是

$$\parallel f^*\parallel_a\le c\parallel S^{(p)}(f)\parallel_a,\ \ \parallel S^{(q)}(f)\parallel_a\le c\parallel f^*\parallel_a,\ \ \forall f=(f_n). \tag{1}$$

前者仅对 $p\,(1<p\le 2)$ 一致光滑空间成立; 后者仅对 $q\,(2\le q<\infty)$ 一致凸空间成立, 这里 $f^*=\sup\parallel f_n\parallel$ 是 f 的极大函数. 只有当值空间 X 同构于 Hilbert 空间时, 上面两式合二而一成为

$$c^{-1}\parallel f^*\parallel_a\le\parallel S^{(2)}(f)\parallel_a\le c\parallel f^*\parallel_a,\ \ \forall f=(f_n). \tag{2}$$

此时它就和经典的标量值鞅情况完全一致了, 因为实数域或复数域都可以看成 Hilbert 空间的特例. 许多鞅不等式的成立或者鞅空间之间的连续嵌入关系也都是这样的. 如此一来, B - 值鞅的不等式不仅大大扩展了经典鞅论的范围, 而且实际上经典的标量值鞅空间理论只是 B - 值鞅论的一个特例.

3. B - 值鞅的最大特色还在于其中的不等式构成对于值空间几何性质的刻画. 换句话说, 它不仅研究在值空间的某种几何条件下在其中取值的鞅不等式能否成立, 而且反过来研究一定的鞅不等式成立所需要的值空间的几何条件. 例如, (1) 中第一个不等式如果对所有在 Banach 空间 X 中取值的鞅成立, X 一定具有等价范数使之成为 p 一致光滑的. 也就是说, 第一个不等式成立是 X 同构于 p 一致光滑空间的充分必要条件. 同样, (1) 中第二个不等式成立是 X 同构于 q 一致凸空间的充分必要条件, 而 (2) 中的双边不等式成立则是 X 同构于 Hilbert 空间的充分必要条件. 我们所得到的许多鞅不等式都具有这样的功能. 这使得 B - 值鞅与 Banach 空间的几何性质有机结合在一起. 以往在考察经典鞅论时有一个疑问, 为什么总是考虑均方函数 $S^{(2)}$ 或者条件均方函数 $s^{(2)}$, 现在知道那是受到了值空间几何性质的制约. 这只有通过研究取值于一般 Banach 空间的鞅理论才会得到合理的解释.

4. 探寻值空间的几何属性对 p 均方算子的依赖有多深刻, 这是一个饶有兴味的问题. 对此我们有下面的结论: X 同构于 q 一致凸空间当且仅当对于每个正规鞅 $f=(f_n)$, 集合 $\{f^*<\infty\}\subset\{S^{(q)}(f)<\infty\}$ a.e., 即在相差一个 0 测度集上包含关系成立. X 同构于 p 一致光滑空间当且仅当对于每个正规鞅, $\{S^{(p)}(f)<\infty\}\subset\{f^*<\infty\}$ a.e., X 同构于 Hilbert 空间当且仅当对于每个正规鞅, $\{f^*<\infty\}=\{S^{(2)}(f)<\infty\}$ a.e. 对于非正规的鞅稍加辅助条件同样能够得到类似的结论. 这即是值空间几何属性的微局部鞅刻画.

5. 关于用鞅不等式刻画值空间的几何属性, 除上面提到空间的嵌入关系、算子的有界性以外, 我们还调动了其它可能的手段. 例如用关于上、下函数 $M(f)=S^{(2)}(f)\bigvee f^*$ 与 $m(f)=S^{(2)}(f)\bigwedge f^*$ 的范数不等式以及关于微分从属的不等式刻画 Hilbert 空间的同构特征; 用共轭空间的表现以及经典的 Azema-Gandy-Yor 定理—— L^1 有界鞅一致可积的条件刻画值空间的一致凸和一致光滑性. 甚至还使用过以标量值鞅的向量值可料变换刻画值空间的 2- 光滑性, 给出了相应的充分必要条件. 这些事实进一步反映了 B - 值鞅不等式与值空间几何属性的紧密联系.

6. 像标量值鞅的情况一样, 加权与内插是 B - 值鞅论中热门的研究课题. 正如可以预料的那样, 它们的许多结论也都依赖于空间的几何性质. 例如关于加权不等式, 我们证明了对于满足 $A_\infty\bigcap S^-$ 条件的权函数, 相应的 Orlicz-Hardy 空间单边加权不等式成立

$$\| f^* \|_{\widetilde{\Phi}}\leq c\,\| S^{(p)}(f) \|_{\widetilde{\Phi}},\ \ \| S^{(q)}(f) \|_{\widetilde{\Phi}}\leq c\,\| f^* \|_{\widetilde{\Phi}},\ \ \forall f=(f_n).$$

当然也要视值空间是同构于 p 一致光滑空间还是 q 一致凸空间而定. 应用实内插方法, 我们还证明了 B - 值鞅空间的内插不等式. 反过来, 应用鞅空间的内插不等式给出了空间 p 光滑性与 q 一致凸性的内插继承性: 对于内插空间对 (X_0,X_1), 若 X_i $(i=0,1)$ 分别同构于 p_i 一致光滑空间, $1<p_0,p_1\leq 2$, $0<\theta<1$, $p=(1-\theta)/p_0+\theta/p_1$, 则内插空间 $(X_0,X_1)_\theta p$ 同构于 p 一致光滑空间. 对于 q 一致凸性, 对偶的结论也同样成立. 换句话说, 凸性和光滑性的指标与空间一样满足通常的内插指标规律, 而且两者是同步的.

7. 原子分解方法能否应用于 B - 值鞅的研究? 实际上应用 p - 均方算子 $S^{(p)}$ 和条件 p - 均方算子 $s^{(p)}$ 也可以定义所谓的第一、第二类强原子、弱原子, 给出相应空间的强、弱原子结

构. 先是 1998 年我和侯友良 [38] 使用了 p - 均方算子和条件 p - 均方算子定义 B - 值鞅空间的原子, 并用于建立 B - 值鞅不等式. 2001 年我与研究生于林 [40] 藉助于这种原子分解建立了小指数 B - 值鞅空间的一系列不等式. 事实证明在 B - 值情况, 原子分解的存在性也与值空间的几何性质有关, 而且原子分解在小指数空间情况特别好用, 比大指数空间上的传统方法还要简捷. 于林还证明了 B - 值鞅的 Rosenthal 不等式.

8. 从 1981 年开始, Burkholder[7] 在他关于标量值鞅变换工作的基础上, 开展了关于 B - 值鞅变换的研究并由此提出了一类 UMD 空间. Bourgain, Maurey, Aldous, Pisier, Rubio de Francia 等在这方面做了大量工作. 此工作不久转移到向量值函数空间上 Hilbert 变换以及诸多奇异积分算子有界性的研究, 建立了一系列的等价条件, 其系列成果被称为“向量值的调和分析”. 我们较早地注意到了这一理论的发展, 并研究了 UMD 空间的提升性质, 鞅变换的 Neveu-Woycynski 型和 Marcinkiewicz-Zygmund 型强弱大数定律, 建立了鞅变换的强弱大数定律成立与值空间 UMD 性质之间的等价关系. 还与龙瑞麟合作研究了平削算子、变差算子、鞅变换算子的点态的和 L^p 范数的不等式, 给出了鞅变换与微分从属的 A_p - 权加权不等式. 结论表明鞅变换不等式、值空间的 UMD 属性、A_p - 权函数之间具有相互制约的关系.

9. 事实证明 B - 值鞅论是一个具有广袤活动空间的研究领域, 因为它既有纯粹鞅论的一片沃土, 又有值空间属性多样变化的水源, 各种因素的改变都可能给生态带来变化. 80 年代初, 前苏联数学家 Bukhvalov 与 Danilevich[5] 在研究单位圆内向量值解析函数的边值问题时发现了复空间与实空间不同的几何属性——即解析 RN 性质不同于 RN 性质, 由此引发了对于复空间中解析鞅、Hardy 鞅以及复凸性、解析凸性关系的鞅刻画问题的研究. Garling, Edgar, Blasco, 步尚全 [4], 许全华 [57] 等在此方面先后做了很多工作. 我和 Helsinki 大学的两位博士 Saksman 与 Tylli [39] 一起研究了解析鞅并用以刻画值空间的 PL 凸性, 与研究生 Bekjan [1] 等就 Hardy 鞅不等式、Hardy 鞅变换不等式以及解析凸性与解析 UMD 空间的刻画方面进行了研究, 得到了有意义的结果.

这一时期, 对于标量值鞅和 Clifford 代数值鞅我们也进行了一些研究. 复测度鞅是在调和分析中有重要应用的一类鞅, 关于 Lipschtz 曲线上 Cauchy 积分算子有界性的鞅证明实际上使用的就是复测度鞅. 我和侯友良 [19] 在函数 ϕ 满足较弱的 $b_p^+(K)$ 和 $a_p(K)$ 条件下证明了以 ϕdv 为复测度的鞅其极大算子的弱 (1, 1) 、强 (p,p) 有界性, 均方算子的强 (p,p) 有界性和凸 Φ 不等式. 研究了关于复测度 ϕdv 的若干类型的鞅空间与关于非负测度 dv 的相应空间的同构性, 找出了它们的对偶空间. 此外还证明了龙瑞麟关于仿增长性的一个猜想.

对于所谓的双 Φ 函数鞅不等式, 即不同的算子在不同 Φ 函数生成的空间上的有界性, 比如极大算子 $M: L_{\Phi_1} \to L_{\Phi_2}$ 的有界性, 要点是找出 Φ_1, Φ_2 之间的关系以保证 M 有界. 我和研究生梅涛 [49] 等给出了几种充分必要条件, 并在此基础上证明了若干双 Φ 函数的鞅不等式, 包括弱型的双 Φ 不等式.

总括起来, p - 均方算子的引入使得建立各类鞅空间成为可能, 不仅在空间一定几何条件下可以证明 B - 值鞅的一系列不等式, 包括 B-G-D 不等式, 一般 Φ 函数不等式, 鞅变换不等式; 研究空间的相互嵌入关系, 鞅空间上算子的有界性, 共轭空间, 鞅空间的加权与内插, 微分从属, 原子分解等等; 反过来应用这些不等式又可以刻画值空间的一致凸性、一致光滑性, UMD 性质, Hilbert 空间的同构特征, 解析 RN 性质, 复一致凸性等. 它们给出了 B - 值鞅的概率性质、生成鞅空间函数的分析性质与值空间的几何性质之间的相互制约、相互依存的关系. 其结论在鞅论、Banach 空间几何学与调和分析几方面都颇具意义. 时至今日, B - 值鞅理

论业已成为内容丰富的系统理论, 这一理论把标量值鞅和向量值鞅有机地整合在一个统一体系中, 值空间的几何性质成为其不可替代的重要支柱乃至各种形式不等式的分类依据, 经典的鞅空间理论仅仅是其中值空间为 Hilbert 空间的特殊情况. 就此, 一个具有 Banach 空间特色的 H^p 鞅空间理论建立起来了, 这些成果扩展并深化了 Pisier, Burkholder, Gundy, Davis, Hoffman-Jorgensen, Woycynski 等人的工作, 其中使用的一系列创新思想方法还为后续的研究提供了有力的工具. Diestel 与 Uhl 在《向量测度》一书中的预想实现了.

3 弱型鞅空间、变指数鞅空间及其应用

前面提到的鞅空间, 主要是由指数型函数生成的空间 L^p, H^p $(1 \le p \le \infty)$ 以及凸 Φ 函数生成的空间 L_Φ, H_Φ. 这里所说的弱型空间却是指小指数空间 L^p, H^p $(0 \le p < 1)$, Lorentz 空间 L_{pq}, H_{pq} $(0 < p < \infty, 0 < q \le \infty)$, 弱空间 $\omega L^p, \omega H^p$ $(0 < p \le \infty)$ 以及弱 Orlicz 空间、弱 Orlicz-Hardy 空间 $\omega L_\Phi, \omega H_\Phi$ 等. 这些空间范围广, 性质差, 从泛函空间的角度来看它们有些连局部凸空间都不是, 经典分析和经典鞅论中的传统方法对于它们往往不适用一它们实际上是一些被经典分析边缘化了的空间.

弱型函数空间发展的源头比较早. 例如 Lorentz 空间的概念上世纪 50 年代初就出现了, 以后在内插与加权理论中也经常被用到. 80、90 年代以后国际上对于 $\omega L^p, \omega H^p$ 的研究进一步深化了. 90 年代后期我们把目光转向弱型鞅空间, 和研究生一起我们先后研究了包括小指数空间, Lorentz 空间, 弱 Orlicz 空间在内的各种空间中的鞅不等式, 建立了不同空间中原子分解的存在定理, 论证了次线性算子的有界性、内插与外插定理、加权不等式等, 通过扩大生成函数的类型从另一个渠道达到了扩展鞅论的目的. 通过这些工作我们走出了一条路子, 使得经典结论在扩大了的空间中以某种形式仍然成立. 新结论改变了经典鞅论的基础, 丰富了它的内涵, 从而再一次大大扩充了鞅论的适用范围. 详细地说:

以往调和分析中关于 Lorentz 空间的结论都是由 L^p 或 H^p 空间的内插得到. 借鉴了 Weisz [56] 应用原子分解研究 ωH^p 中鞅不等式的思想, 我和研究生焦勇 [22] 首次将原子分解方法应用于 Lorentz 空间的研究, 建立了多种形式的适应于不同条件的原子分解定理, 在此基础上证明了不同 Lorentz 鞅空间之间的连续嵌入关系, 包括加权空间的鞅不等式以及弱型空间之间的内插定理 [20,21]. 它们把原先在 Hardy 空间上成立的事实扩展到 Lorentz 空间. 以往的内插方法不考虑小指标 Lorentz 空间的问题, 应用原子分解则不受其限制. 焦勇还研究了 B - 值 Lorentz 鞅空间上的算子鞅变换, 应用 Carleson 测度与 BMO 鞅不等式给出值空间若干几何特征的刻画. 研究生范丽萍研究了另一类 Lorentz 鞅空间 Λ_{pq} 的原子分解与内插问题, 得到了类似的结果.

Weisz 关于 ωH^p 鞅空间的弱原子分解目的是讨论 Vilenkin 鞅不等式以及 Fourier 级数的收敛问题. 任彦波与侯友良 [18] 改造了 Weisz 使用的原子分解方法, 证明了 ωH^p 鞅空间上次线性算子的有界性, 给出了各类 ωH^p 鞅空间的相互嵌入关系. 研究生李驭繁将它推广到双参数鞅空间, 马涛给出了 B - 值弱型 Hardy 鞅空间的共轭.

加权不等式理论的核心不仅在于扩大不等式适用的范围, 而且要研究权函数的属性与不等式成立之间的依存关系. 通常 A_p - 权的因子分解、逆向 Holder 不等式、A_p - 权与 BMO 函数类的关系等都是该理论中关注的问题. 我和研究生陈伟 [8,9] 着重研究了 Orlicz 鞅类上极大算子与几何极大算子的加权理论并建立了一系列新型的加权不等式; 给出了 A_∞ - 权的几种等价刻画; 首次将广义极大算子引入鞅论, 并用 Carleson 测度刻画了它的有界性. 此外, 对于

某些双指标的鞅空间, 借助于外插方法也建立了极大算子的加权不等式. 由于 Φ 函数一般不具有齐性, 所以 Orlicz 鞅类的加权不等式呈现出互不等价的形式, 包括范数的、模函数的以及积分的, 它们对于权函数的要求各不相同, 有时候还要被迫引入带参数的权, 显示了 Orlicz 鞅类上加权理论的特殊性与复杂性.

2010 年我们首次引进了更具概括性的弱型 Orlicz 鞅空间 ωL_Φ 与 ωH_Φ, 后者又分为 ωH_Φ^*, ωH_Φ^s, ωH_Φ^S 等. ωL_Φ 一般来说是拟 Banach 空间并且是序列完备的, 但不是局部凸的. 事实证明, 在这些空间中, 原子分解与好 λ - 不等式方法是可行的, 包括强原子和弱原子. 我们证明了如果 Φ 是严格凸的, 对于标量值鞅, Doob 极大算子是 $\omega L_\Phi \to \omega H_\Phi^*$ 有界的; 若 Φ 是一般凸函数, 则关于 ωL_Φ 拟范数的 B-G-D 不等式成立, 即 $\omega H_\Phi^* \sim \omega H_\Phi^S$; 利用弱原子分解我们还建立了几种 ωL_Φ 空间的相互嵌入关系以及次线性算子的 $\omega H_\Phi \to \omega L_\Phi$ 有界性 (见文献 [42]).

作为弱型鞅空间的应用, 我们这里提到两点: 一是对于调和分析中 Marcinkiewicz 内插定理的应用 (见文献 [43]). 如通常所知, 在 L^p 空间的内插中, 一个次线性或拟线性算子 T 如果同时是弱 (p_0, p_0) 型与弱 (p_1, p_1) 型的, T 必是强 (p, p) 型的, 这里 $0 < p_0 < p < p_1 \le \infty$. 现在我们证明了, 若 Φ 是凸函数, p_Φ 与 q_Φ 分别是其上、下指标, $0 < p_0 < q_\Phi \le p_\Phi < p_1 \le \infty$, 如果 T 同时是弱 (p_0, p_0) 型与弱 (p_1, p_1) 型的, 则 T 必是强 (Φ, Φ) 型与弱弱 (Φ, Φ) 型的, 即分别存在常数 $c > 0$ 使得

$$\| Tf \|_{L_\Phi} \le c \| f \|_{L_\Phi}, \forall f \in L_\Phi; \ \| Tf \|_{\omega L_\Phi} \le c \| f \|_{\omega L_\Phi}, \forall f \in \omega L_\Phi,$$

其中弱弱型是我们第一次定义的. 然后再运用于调和分析中 Young 卷积算子、满足 Hormander 条件的奇异积分算子、Littlewood-Paley G 函数 (算子) 与 Lusin 面积函数 (算子) 乃至 Zygmund 空间, 分别得到了相应算子有界性的结论. 这使得经典调和分析中老的结论注入了新的思想, 并得出了新的结果.

二是用于二进域 (或局部域) 上的调和分析. 二进域上的调和分析在信号处理方面具有重要应用. 我和研究生张传洲、陈丽红应用鞅方法处理二进域上调和分析的问题, 克服了其中的某些困难, 分别证明了二进积分的收敛性以及包括二进积分极大算子、Cesaro 平均极大算子在内的几类算子在 Lorentz 空间上的有界性, 对于 B - 值的情况也进行了类似的考察. 进一步地还讨论了扩大的 Vilenkin-like 系统以及该系统上 Walsh-Dirichlet 核加权平均算子的有界性.

最后来谈谈变指数鞅空间. 变指数函数空间 $L^{p(\cdot)}(R^n)$ 是将 Lebesgue p 方可积条件中的常数 p 换为非负可测函数得到的可测函数集合. 变指数函数空间是一个既具有理论意义又具有实用价值的崭新研究领域. 上世纪 30 年代 Orlicz 就曾定义了今日所说的 Musielak-Orlicz 空间, 变指数空间是它的特例. 90 年代以后, 在几个不同实践领域发现了它的应用, 它通常是与具有非标准局部增长条件的各种实际问题相联系的. 在此条件下的流体力学、非线性弹性理论、大气环流、图像恢复等的数学模型中就常常导致变指数极值问题, 变分问题, 变系数的微分算子等. Kovacik 与 Rakosnik[26], Fan 与 Zhao 等 [15] 先后研究了变指数 Lebesgue 空间与变指数 Sobolev 空间的属性和一系列基本不等式. 2005 年 Diening, Cruz-Uribe, Nekvinda 等先后证明了在指数 p 满足对数 Holder 连续性以及在无穷远点的衰减条件下, Hardy-Littlewood 极大算子有界, 之后有关的研究出现了“井喷式”的发展. 时至今日, 有关变指数 Lebesgue 空间与 Sobolev 空间及其应用的研究已经有了相当丰富的内容与初具雏形

的理论体系, 但仍有许多经典问题没有相应的类似.

带着鞅论与函数空间理论彼此融汇、相互促进的关系反观变指数鞅空间与函数空间理论的发展, 你会再一次发现两者之间的巨大差异. 首先像函数空间上那样关于指数 $p(x)$ 的对数 Holder 连续性与衰减条件无法定义. 其次对于变指数, 通常随机变量范数的分布函数表达式以及 Jensen 不等式不再成立, 条件期望的压缩性也受到局限. 此外, 变指数空间一般不再是重排不变的. 由于这些非常基础的条件不具备, 为新空间的研究造成了很大的障碍, 同时也带来了挑战. 就此而言, 变指数鞅空间既与变指数函数空间不同, 也将与经典鞅空间不同.

最近几年对此新兴课题我们给予了很大关注, 通过精心考察, 不无意外地证明了 B-G-D 不等式及其它若干著名的鞅不等式在变指数空间仍然成立. 详细说来, 若 $1 \le p^- \le p^+ < \infty$, 这里 $p^- = \operatorname{ess\,inf} p$, $p^+ = \operatorname{ess\,sup} p$ 分别是 p 的下指标和上指标, 记 $\| u \|_{p(\cdot)}$ 是可测函数 u 的变指数 Lebesgue 空间范数, 通过改进 Dellacherie 定理使之适应于变指数情况并应用指数逼近, 我们在文献 [44] 证明了对于任何鞅 f,

(1) $\| f^* \|_{p(\cdot)} \sim \| S(f) \|_{p(\cdot)}$ (B-G-D 不等式);

(2) $\| M(f) \|_{p(\cdot)} \sim \| m(f) \|_{p(\cdot)}$ (Chevalier 不等式);

(3) 存在仅与 p 有关的常数 $c > 0$ 使得 $\| s^2(f) \|_{p(\cdot)} \le c \| S^2(f) \|_{p(\cdot)}$ (凸性引理);

(4) $\| f \|_{D_{p(\cdot)}} \sim \| f \|_{Q_{p(\cdot)}}$ ($D_{p(\cdot)}, Q_{p(\cdot)}$ 分别是 $|f_n|$ 或 $S_n(f)$ 被可料控制的空间);

(5) 若 σ - 代数 $(\Sigma_n)_{n\ge 0}$ 是正则的, 则五类空间 $H^*_{p(\cdot)} \sim H^s_{p(\cdot)} \sim H^S_{p(\cdot)} \sim D_{p(\cdot)} \sim Q_{p(\cdot)}$.

我们还证明了一般形式的 Doob 强型和弱型不等式, 特别是给出了强型 Doob 不等式成立的充要条件. 此外, 我们还举出具体的例子说明 Doob 强型极大不等式在变指数 $p > 1$ 条件下一般不再成立. 相信它们将在进一步构建变指数鞅空间相应理论中起到奠基作用.

焦勇 [23] 等早前曾用一种特殊形式的原子分解研究了变指数情况下某些鞅空间的共轭以及变指数情况的 John-Nirenberg 不等式, 从而得到变指数 BMO 鞅空间也不随指标函数而改变. 同时在 σ - 代数至多由可数多个原子生成以及指数 p 的一定限制条件下给出了强型和弱型 Doob 极大不等式不同的证明. 2013 年 Nakai 和 Sadasue [50] 运用乘子方法在每个 σ - 代数至多由可数多个原子生成的条件下证明过强型 Doob 极大不等式成立.

有关变指数鞅空间理论的研究才刚刚开始, 人们期待有更多好的结果出现.

参 考 文 献

[1] Bekjan T N, Liu P D. Inequalities of Hardy martingales and convexity in complex space[J]. Acta Math. Sinica, 1997, 40: 133–143.

[2] Blasco O. Boundary values of functions in vector-valued Hardy spaces and geometry on Banach spaces[J]. J. Func. Anal., 1988, 78: 346–364.

[3] Bourgain J. Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional[J]. Ark. Math., 1983, 21: 163–168.

[4] Bu S Q. The analytic Radon-Nikodym property in Banach spaces of measurable vector-valued functions[J]. Ann. Math., 1990, 288: 345–360.

[5] Bukhvalov A V, Danilevich A A. Boundary properties of analytic and harmonic functions with values in Banach spaces[J]. Math. Notes, 1982, 31: 104–110.

[6] Burkholder D L. Distribution function inequalities for martingales[J]. Ann. Prob., 1973, 1: 19–42

[7] Burkholder D L. A geometrical characterization of Banach spaces in which martingale differen-ce sequences are unconditional[J]. Ann. Prob., 1981, 9: 997–1011.

[8] Chen W, Liu P D. Weighted integral inequalities for the maximal geometric mean operator of martingales[J]. J. Math. Anal. Appl., 2010, 371: 821–831.

[9] Chen W, Liu P D. Weighted integral inequalities in Orlicz martingale classes[J]. Sci. Sin. Math., 2011, 54: 1–10.

[10] Chen W, Liu P D. Weighted norm inequalities for multisublinear maximal operator on martin-gale spaces[J]. Tohoku Math. J., 2014, 66: 539–553.

[11] Cruz-Uribe D, Fiorenza A, Neugebauer C J. Weighted norm inequalities for the maximal operator on variable Lebesgue spaces[J]. J. Math. Anal. Appl., 2012, 394: 744–760.

[12] Diening L. Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L_{p(\cdot)}$[J]. Math. Ineq. Appl., 2004, 72: 245–254.

[13] Diestel J, Uhl J J. Vector measures[M]. Math. Surveys 15, Providence: Amer. Math. Soc., 1977.

[14] Doob J L. Stochastic processes[M]. New York: Wiley, 1953.

[15] Fan X L, Zhao D. On the spaces $L_{p(x)}(\Omega)$ and $W_m, p(x)(\Omega)$[J]. J Math. Anal. Appl., 2001, 263: 424–446.

[16] Garsia A. Martingale inequalities[M]. Benjamin: Sem Notes Recent Progress, 1973.

[17] Garling D J H. On martingales with values in a complex Banach space[J]. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1988, 104: 399–406.

[18] Hou Y L, Liu P D. b_p^+-weighted inequalities for Cliford-martingales[J]. Adv. Math., 1998, 27: 122–132.

[19] Hou Y L, Ren Y B. Vector-valued weak martingale Hardy spaces and atomic decompositions[J]. Acta Math. Hungar, 2007, 115: 235–246.

[20] Jiao Y, Fan L P, Liu P D. Interpolation theorems on weighted Lorentz martingale spaces[J]. Sci. China, 2007, 50A: 1217–1226.

[21] Jiao Y, Liu P D, Interpolation on weak martingale Hardy space[J]. Acta Math. Sinica., 2009, 25B: 1297–1304.

[22] Jiao Y, Peng L H, Liu P D. Atomic decompositions of Lorentz martingale spaces and applications[J]. J. Func. Spaces Appl., 2009, 7: 153–166.

[23] Jiao Y, Zhou D J, Hao Z W, Chen W. Martingale Hardy spaces with variable exponent[J]. Banach J. Math. Anal., 2016, 10(4): 750–770.

[24] Kikuchi M. On weighted weak type maximal Inequalities for Martingales[J]. Math. Ineq. Appl., 2003, 6(1): 163–175.

[25] Kikuchi M. New martingale inequalities in rearrangement-invariant function spaces[J]. Proc. Edinburgh Math. Soc., 2004, 47: 633–657.

[26] Kovacik O, Rakosnik J. On spaces $L^p(x)$ and $W^{k,p(x)}$ [J]. Czechoslovak Math. J., 1991, 41: 592–618.

[27] Lerner A K. Some remarks on the Hardy-Littlewood maximal function on variable L_p spaces[J]. Math. Z., 2005, 251: 509–521.

[28] Li Y F, Liu P D. Atomic decompositions of the weak martingales with two indexes[J]. Chin. Ann. Math., 2008, 29A: 333–342.

[29] Li Y F, Liu P D. Weak Atomic decomposition for B-valued martingales with two-parameters[J]. Acta Math Hungar, 2010, 127(3): 225–238.

[30] Liu P D. A isomorphic characterization of Hilbert spaces[J]. Adv. Math., 1989, 18: 219–225.

[31] Liu P D. Martingale inequalities and convexity and smoothness of Banach spaces[J]. Acta Math. Sinica, 1989, 32: 765–775.

[32] Liu P D. 2-moothness of Banach spaces and a spacial class of martingale transforms[J]. Ann. Math., 1991, 12A: 70–77.

[33] Liu P D. Martingale spaces and the geometrical properties of Banach spaces[J]. Sci. China, 1991, 34A: 513–527.

[34] Liu P D. Isomorphic characterizations of Hilbert spaces by differential subordination of martingales[J]. Acta Math. Sinica, 1992, 35: 387–395.

[35] Liu P D. Martingales and geometry in Banach spaces[M]. 1st ed., Wuhan: Wuhan Univ. Press, 1993; 2nd ed., Beijing: Sci. Press, 2007.

[36] Liu P D, Long R L. Boundedness of several operators on martingale spaces and the geometry of Banach spaces[J]. Ann. Math., 1992, 13B: 167–179.

[37] Liu P D, Hou Y L. Complex measure martingales under condition $b+p(K)$[J]. Acta. Math. Sinica, 1997, 40: 235–245.

[38] Liu P D, Hou Y L, Atomic decompositions for Banach-space-valued martingales[J]. Sci. China, 1998, 41: 884–892.

[39] Liu P D, Saksman E, Tylli H-O. Boundedness of the q-mean-square operator on vector-valued analytic martingales[J]. Canadian Math. Bull., 1999: 287–296.

[40] Liu P D, Yu L. Atomic decompositions and small index spaces of Banach-space-valued martingales[J]. Sci. China, 2001, 44A: 615–625

[41] Liu P D, Zuo H L. Weighted inequalities for the geometrical maxmal operator on martingale spaces[J]. Acta Math. Sci., 2008, 28B: 81–85.

[42] Liu P D, Hou Y L, Wang M F. Weak Orlicz space and its applications to martingale theory[J]. Sci. China, 2010, 53A : 905–914.

[43] Liu P D, Wang M F. Weak Orlicz spaces: some basic properties and their applications to harmonic analysis[J]. Sci. China, 2013, 56: 789–802.

[44] Liu P D, Wang M F. Burkholder-Gundy-Davis inequality in martingale Hardy spaces with variable exponent[J]. to appear, arXiv: 1412.8146.

[45] Liu P D, Liu N. Nome convergence and weak-type Doob's maximal inequality in variable exponent martingale spaces[J]. to appear.

[46] Long R L. Martingale spaces and inequalities[M]. Beijing: Beijing Univ. Press, 1993.

[47] Long R L, Liu P D. Real interpolations of B-valued regular martingale spaces[J]. Ann. Math., 1992, 12A: 152–158.

[48] Ma T, Liu P D. Atomic decomposition and duals of weak Hardy spaces of B-valued martingales[J]. Acta. Math. Sci., 2009, 29B: 1439–1452.

[49] Mei T, Liu P D. On the maximal inequalities for martingales involving two functions[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 2002, 130: 819–824.

[50] Nakai E, Sadasue G. Maximal function on generalized martingale Lebesgue spaces with variable exponent[J]. Stat. Prob. Lett., 2013, 83: 2168–2171.

[51] Nekvinda A. Hardy-Littlewood maximal operator on $L_{p(x)}(R_n)$[J]. Math. Ineq. Appl., 2004, 7: 255–266.

[52] Pisier G. Martingales with values in uniformly convex spaces[J]. Israel J. Math., 1975, 20, 326–350.

[53] Pisier G, Xu Q H. The strong p-variation of martingales and orthogonal series[J]. Prob. The. Relat. Fiel., 1988, 77: 497–514.

[54] Rubio de Francia J L. Fourier series and Hilbert transforms with values in UMD Banach spaces[J]. Stud. Math., 1985, 81: 95–105.

[55] Weisz F. Martingale Hardy spaces and their applications in Fourier analysis[M]. New York: Springer, 1994, 1568.

[56] Weisz F. Weak martingale Hardy spaces[J]. Prob. Math. Stat., 1998, 18: 133–148.

[57] Xu Q H. Inegalites pour les martringales de Hardy et renormage des espaces quasi-norms[J]. C R Acad. Paris, 1988, 306: 601–614.

[58] Yu L. Generalized Rosenthal's inequality for Banach-space-valued martingales[J]. Acta Math. Sci., 2009, 29B: 305–312.

[59] Zhang C Z, Liu P D. Weighted averange of Dirichlet kernals for Vilenkin-like system[J]. Acta Math. Sci., 2009, 29B: 45–55.

[60] Zuo H L, Liu P D. The minimal operator and weighted inequalities for martingales[J]. Acta Math. Sci., 2006, 26B, 31–40.

THE NEW PROGRESS IN MARTINGALE SPACE THEORY

LIU Pei-de

(*School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China*)

Abstract: In this paper, we present some new progress in martingale space theory: including vector-valued martingale spaces and weak-type martingale spaces. The paper includes three sections: 1. The significance to study martingale space theory, a description for the relation of martingale theory with harmonic analysis; 2. The Banach-space-valued martingales, a expression of the relation of martingale theory with the geometry in Banach spaces; 3. The weak-type martingale spaces and the variable exponent martingale spaces.

Keywords: martingale space; geometry in Banach space; weak-type space; variable Lebesgue space

2010 MR Subject Classification: 62G42; 62G46