Vol. 37 (2017)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一类带阻尼项的次二次二阶 Hamilton 系统的周期解

居加敏, 王智勇
(南京信息工程大学数学与统计学院, 江苏 南京 210044)

摘 要: 本文研究了一类带阻尼项的二阶 Hamilton 系统周期解的存在性问题. 利用鞍点定理, 在新的次二次条件下, 获得了一个新的存在性结果, 推广并改进了已有文献的相关存在性结论.

关键词: 周期解; 二阶 Hamilton 系统; (C) 条件; 鞍点定理
MR(2010) **主题分类号:** 34K13; 58E30 **中图分类号:** O176.3
文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2017)02-0383-07

1 引言及主要结果

考虑二阶 Hamilton 系统

$$\begin{cases} \ddot{u}(t)+\nabla F(t,u(t))=0 & \text{a.e. } t\in[0,T], \\ u(0)-u(T)=\dot{u}(0)-\dot{u}(T)=0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $T>0$, $F:[0,T]\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ 满足以下条件:

(A) $F(t,x)$ 对任意 $x\in\mathbb{R}^N$ 关于 t 是可测的, 对 a.e. $t\in[0,T]$ 关于 x 是连续可微的, 且存在 $a\in C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$, $b\in L^1(0,T;\mathbb{R}^+)$ 使得 $|F(t,x)|+|\nabla F(t,x)|\leqslant a(|x|)b(t)$ 对所有 $x\in\mathbb{R}^N$ 和 a.e. $t\in[0,T]$ 成立.

近年来, 越来越多的的学者利用变分法研究问题 (1.1) 周期解的存在性, 并得到了一系列可解性条件, 见文献 [1–9] 及其参考文献. 自 1980 年 Rabinowitz[8] 提出次二次条件以来, 次二次条件不断被推广和丰富. 特别的, 唐和吴 [2] 在次二次条件下研究了问题 (1.1) 周期解的存在性, 并且得到了如下结论:

定理 A [2] 假设 F 满足条件 (A) 及以下条件

(F1) 存在 $0<\mu<2, M_1>0$, 使得

$$x\nabla F(t,x)\leqslant\mu F(t,x),\quad \forall|x|\geqslant M_1, x\in\mathbb{R}^N \text{ 和 a.e. } t\in[0,T];$$

(F2) 当 $|x|\to+\infty$ 时, $F(t,x)\to+\infty$ 关于 t 一致成立.

则问题 (1.1) 在空间 H_T^1 中至少有一个周期解, 其中

$$H_T^1=\left\{u:[0,T]\to\mathbb{R}^N\big|u \text{ 在 [0,T] 绝对连续}, u(0)=u(T), \text{且 } \dot{u}\in L^2(0,T;\mathbb{R}^N)\right\},$$

相应的范数为

$$\|u\|=\left(\int_0^T|u(t)|^2dt+\int_0^T|\dot{u}(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

---

*收稿日期: 2014-09-29 接收日期: 2015-08-02
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11026213; 11571176).
作者简介: 居加敏 (1991–), 女, 江苏扬州, 硕士, 主要研究方向: 非线性泛函分析.

本文考虑更一般的带阻尼项的二阶 Hamilton 系统

$$\begin{cases} \ddot{u}(t)+q(t)\dot{u}(t)+\nabla F(t,u(t))=0 \quad \text{a.e. } t\in[0,T], \\ u(0)-u(T)=\dot{u}(0)-\dot{u}(T)=0, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $q(t)\in L^1(0,T;\mathbb{R}^+)$, $Q(t)=\displaystyle\int_0^t q(s)ds$, $Q(T)=0$. 记

$$A_1=\max_{t\in[0,T]} e^{Q(t)}, \quad A_2=\min_{t\in[0,T]} e^{Q(t)}.$$

本文将在一个新的次二次条件下, 利用极小极大作用原理研究问题 (1.2) 周期解的存在性. 方便起见, 以下用 $\mathcal{H}$ 代表连续函数空间, 且对所有 $\theta\in\mathcal{H}$, 存在常数 $M_2>0$ 使得

(i) 对所有 $t\in\mathbb{R}^+$, $\theta(t)>0$;

(ii) 当 $t\to+\infty$ 时, $\displaystyle\int_{M_2}^t \frac{1}{s\theta(s)}ds\to+\infty$.

主要结果如下

定理 1.1 假设 F 满足条件 (A) 及以下条件

(H1) 存在 $\theta(|x|)\in\mathcal{H}$ 且 $0<\frac{1}{\theta(|x|)}<2$, $M_2>0$ 使得

$$(\nabla F(t,x),x)\leqslant\left(2-\frac{1}{\theta(|x|)}\right)F(t,x), \quad \forall|x|\geqslant M_2 \text{ 和 a.e. } t\in[0,T];$$

(H2) 当 $|x|\to+\infty$ 时, $F(t,x)\geqslant 0$ 关于 t 一致成立;

(H3) 当 $|x|\to+\infty$ 时, $\displaystyle\int_0^T e^{Q(t)}\frac{F(t,x)}{\theta(|x|)}dt\to+\infty$.

则问题 (1.2) 在空间 H_T^1 中至少有一个周期解.

注 1.1 令 $\inf\limits_{|x|\geqslant M_2}\frac{1}{\theta(|x|)}:=k$, 其中 k 是常数, 看到

(a) 在 (H2) 下, 当 $k>0$ 时, (H1) 和 (F1) 是等价的, 但当 $k=0$ 时, 条件 (H1) 比 (F1) 弱.

(b) 研究的问题 (1.2) 带有阻尼项 $q(t)\dot{u}(t)$, 当 $q(t)\equiv 0$ 时, 定理 1.1 和定理 A 考虑的是相同的系统, 而且此时, 根据 (H2), 当 $k>0$ 时, (H3) 即为

(H3)' 当 $|x|\to+\infty$ 时, $\displaystyle\int_0^T F(t,x)dt\to+\infty$,

注意到 (H2) 和 (H3)' 比 (F2) 更弱. 因此结果显著推广了定理 A.

2 预备知识

在 H_T^1 上定义泛函 φ 为

$$\varphi(u)=\frac{1}{2}\int_0^T e^{Q(t)}|\dot{u}(t)|^2dt-\int_0^T e^{Q(t)}F(t,u(t))dt. \tag{2.1}$$

定义 2.1 [3] 设 X 是实的 Banach 空间, $\varphi\in C^1(X,\mathbb{R})$, 如果对任意的 $v\in X$, 都有 $(\varphi'(u),v)=0$, 就称 u 是泛函 φ 的临界点. 泛函在临界点处所取的值, 就称为临界值.

由文献 [3] 中定理 1.4 易知 φ 在 H_T^1 上连续可微, 且 $\forall u,v\in H_T^1$, 有

$$(\varphi'(u),v)=\int_0^T e^{Q(t)}(\dot{u}(t),\dot{v}(t))dt-\int_0^T e^{Q(t)}(\nabla F(t,u(t)),v(t))dt. \tag{2.2}$$

众所周知, $u\in H_T^1$ 是问题 (1.2) 的解当且仅当它是 φ 的临界点.

定义 2.2 [3] 设 X 是实的 Banach 空间, $\varphi\in C^1(X,\mathbb{R})$, 如果 $\{u_n\}\subset X$, $\varphi(u_n)$ 有界, $\varphi'(u_n)\to 0$ $(n\to\infty)$ 蕴含 $\{u_n\}$ 有收敛子列, 则称泛函 φ 满足 Palais–Smale 条件 (简称 PS 条件).

定义 2.3 [3] 设 X 是实的 Banach 空间, $\varphi\in C^1(X,\mathbb{R})$, 如果 $\{u_n\}\subset X$,$\varphi(u_n)$ 有界, $\|\varphi'(u_n)\|(1+\|u_n\|)\to 0$ $(n\to\infty)$ 蕴含 $\{u_n\}$ 有收敛子列, 则称泛函 φ 满足 Cerami 条件 (简称 C 条件).

注 2.1 易证 (PS) 条件蕴含 (C) 条件, 但反之不一定成立, 即 (C) 条件比 (PS) 条件更弱.

引理 2.1 [3] $\forall u\in H_T^1$, 令 $\bar{u}=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$, $\tilde{u}=u(t)-\bar{u}$, 则存在常数 $C>0$, 使得下面两个不等式成立:

$$\begin{aligned}&\|\tilde{u}\|_\infty\leqslant C\|\dot{u}\|_{L^2}\quad(\text{Sobolev 不等式}),\\&\|\tilde{u}\|_{L^2}\leqslant C\|\dot{u}\|_{L^2}\quad(\text{Wirtinger 不等式}),\end{aligned}$$

其中 $\|\tilde{u}\|_\infty:=\max\limits_{t\in[0,T]}|\tilde{u}(t)|$.

引理 2.2 [3] (鞍点定理) 设 X 是实的 Banach 空间, $\varphi\in C^1(X,\mathbb{R})$, $X=X^-\oplus X^+$ 及 $\dim X^-<\infty$, 且 $\sup\limits_{u\in S_R^-}\varphi(u)<\inf\limits_{u\in X^+}\varphi(u)$, 其中

$$\begin{aligned}&S_R^-=\big\{u\in X^-\big|\|u\|=R\big\},\quad B_R^-=\big\{u\in X^-\big|\|u\|\leqslant R\big\},\\&M=\Big\{g\in C(B_R^-,X)\Big|g\big|_{S_R^-}=id\Big\},\quad c=\inf_{g\in M}\sup_{s\in B_R^-}\varphi(g(s)),\end{aligned}$$

则当 φ 满足 (PS) 条件时, c 为临界值.

注 2.2 文献 [6] 表明, 鞍点定理在 (C) 条件下依然成立.

引理 2.3 假设 $F(t,x)$ 满足 (A) 和 (H1), 则对所有 $x\in\mathbb{R}^N$ 和 a.e. $t\in[0,T]$, 有

$$F(t,x)\leqslant\frac{h_1(t)}{M_2^2}|x|^2G(|x|)+h_1(x),$$

其中

$$h_1(t):=\max_{|x|\leqslant M_2}a(|x|)b(t),\quad G(|x|):=\exp\bigg(-\int_{M_2}^{|x|}\frac{1}{t\theta(t)}dt\bigg).$$

证 $\forall s\geqslant\frac{M_2}{|x|}$, 取 $f(s):=F(t,sx)$. 则由 (H1), 对所有 $s\geqslant\frac{M_2}{|x|}$, 可证得

$$f'(s)=\frac{1}{s}(\nabla F(t,sx),sx)\leqslant\frac{1}{s}\bigg(2-\frac{1}{\theta(s|x|)}\bigg)F(t,sx)=\frac{1}{s}\bigg(2-\frac{1}{\theta(s|x|)}\bigg)f(s). \tag{2.3}$$

令
$$g(s) := f'(s) - \frac{1}{s}\left(2 - \frac{1}{\theta(s|x|)}\right)f(s). \tag{2.4}$$
将 (2.3) 式代入 (2.4) 式可得
$$g(s) \leqslant 0. \tag{2.5}$$
通过解线性常微分方程 (2.4), 得到
$$f(s) = \left(\int_{\frac{M_2}{|x|}}^{s} \frac{g(r)}{r^2 G(r|x|)}dr + C^*\right)s^2 G(s|x|),$$
其中 $C^* = \frac{f\left(\frac{M_2}{|x|}\right)|x|^2}{M_2^2}$. 结合 (2.5) 式, 得
$$f(s) \leqslant \frac{f\left(\frac{M_2}{|x|}\right)|x|^2}{M_2^2} s^2 G(s|x|), \quad \forall s \geqslant \frac{M_2}{|x|}.$$
因此
$$F(t,x) = f(1) \leqslant \frac{F\left(t, \frac{M_2 x}{|x|}\right)}{M_2^2}|x|^2 G(|x|), \quad \forall |x| \geqslant M_2. \tag{2.6}$$
此外, 由假设 (A), 对所有 $x \in \mathbb{R}^N$ 和 a.e. $t \in [0,T]$, 有
$$F\left(t, \frac{M_2 x}{|x|}\right) \leqslant h_1(t). \tag{2.7}$$
所以由 (2.6), (2.7) 式和假设 (A), 对所有 $x \in \mathbb{R}^N$ 和 a.e. $t \in [0,T]$, 可得
$$F(t,x) \leqslant \frac{h_1(t)}{M_2^2}|x|^2 G(|x|) + h_1(t).$$
也就是说引理 2.3 得证.

注 2.3 (1) 利用 θ 的条件 (ii), 可知当 $|x| \to +\infty$ 时, $G(|x|) \to 0$.

(2) 由 $\frac{1}{\theta}$ 的范围及 $(t^2G(t))' = tG(t)\left(2 - \frac{1}{\theta(t)}\right) > 0$ 可知, 函数 $t^2G(t)$ 关于 t 是递增的.

3 定理证明

为了叙述方便, 在下面的证明中, $C_i, i = 1,2,3,\cdots$, 表示一系列不同的正常数.

定理 1.1 的证明 (1) 证明 φ 满足 (C) 条件.

首先证明 $\{u_n\}$ 在 H_T^1 上有界. 令 $\{u_n\}$ 是泛函 φ 的 (C) 序列, 即 $\{\varphi(u_n)\}$ 有界, 且当 $n \to \infty$ 时, 有 $\|\varphi'(u_n)\|(1+\|u_n\|) \to 0$, 则 $\forall n \in \mathbb{N}$ 有
$$\varphi(u_n) \leqslant C_1, \quad \|\varphi'(u_n)\|(1+\|u_n\|) \leqslant C_1. \tag{3.1}$$

假设 $\{u_n\}$ 在 H_T^1 中无界, 则不妨设当 $n \to \infty$ 时, 有 $\|u_n\| \to +\infty$. 令 $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$, 则 $\{v_n\}$ 在 H_T^1 上有界. 因此存在子序列, 不妨仍记为 $\{v_n\}$, 使得 在 H_T^1 上, 有 $v_n \rightharpoonup v_0$, 在 $C([0,T],\mathbb{R}^N)$ 上, 有 $v_n \to v_0$. 因此当 $n \to \infty$ 时, 有
$$\bar{v}_n \to \bar{v}_0. \tag{3.2}$$

因为 H_T^1 紧嵌入到 $C(0,T;\mathbb{R})$, 则对所有 $u\in H_T^1$, 存在常数 $d>0$ 使得

$$\|u\|_\infty \leqslant d\|u\|. \tag{3.3}$$

由 (3.1), (2.1), (3.3) 式, 引理 2.3 和注 2.3 中的 (2), 可得

$$\begin{aligned}
C_1 \geqslant \varphi(u_n) &= \frac{1}{2}\int_0^T e^{Q(t)}|\dot{u}_n|^2dt - \int_0^T e^{Q(t)}F(t,u_n)dt\\
&\geqslant \frac{1}{2}A_2\|\dot{u}_n\|_{L_2}^2 - A_1\int_0^T\left(\frac{h_1(t)}{M_2^2}|u_n(t)|^2G(|u_n(t)|)+h_1(t)\right)dt\\
&\geqslant \frac{1}{2}A_2\|\dot{u}_n\|_{L_2}^2 - C_2\int_0^T\|u_n(t)\|_\infty^2G(\|u_n(t)\|_\infty)dt - C_3\\
&\geqslant \frac{1}{2}A_2\|\dot{u}_n\|_{L_2}^2 - C_4\|u_n\|^2G(d\|u_n\|) - C_3.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

将上述不等式 (3.4) 的两边同除 $\|u_n\|^2$, 则由注 2.3 中的 (1) 易知, 当 $n\to\infty$ 时, $\|\dot{v}_n\|_{L^2}\to 0$. 再利用 (3.2) 式, 有 $v_n\to\bar{v}_0$. 从而得到 $v_0=\bar{v}_0$, $T|\bar{v}_0|^2=\|\bar{v}_0\|^2=1$. 因此当 $n\to\infty$ 时, $|u_n|\to+\infty$, 结合 (H3) 得

$$\int_0^T e^{Q(t)}\frac{F(t,u_n)}{\theta(|u_n|)}dt \to +\infty. \tag{3.5}$$

另一方面, 结合假设 (A) 和 (H1), $\forall x\in\mathbb{R}^N$ 和 a.e. $t\in[0,T]$, 有

$$-h_2(t)+(\nabla F(t,x),x) \leqslant \left(2-\frac{1}{\theta(|x|)}\right)F(t,x), \tag{3.6}$$

其中 $h_2(t):=(2+M_2)h_1(t)\geqslant 0$. 由 (2.1), (2.2), (3.1) 和 (3.6) 式有

$$\begin{aligned}
3C_1 &\geqslant \|\varphi'(u_n)\|(1+\|u_n\|) - 2\varphi(u_n) \geqslant (\varphi'(u_n),u_n) - 2\varphi(u_n)\\
&= \int_0^T e^{Q(t)}[2F(t,u_n)-(\nabla F(t,u_n),u_n)]dt\\
&\geqslant \int_0^T e^{Q(t)}\frac{F(t,u_n)}{\theta(|u_n|)}dt - A_1\int_0^T h_2(t)dt.
\end{aligned}$$

因此有

$$\int_0^T e^{Q(t)}\frac{F(t,u_n)}{\theta(|u_n|)}dt \leqslant C_5. \tag{3.7}$$

这与 (3.5) 式矛盾! 因此 $\{u_n\}$ 在 H_T^1 上有界.

下面证明 $\{u_n\}$ 有收敛子列.

因为 $\{u_n\}$ 在 H_T^1 上有界, 则存在子序列, 不妨仍记为 $\{u_n\}$, 使得

$$\text{在 } H_T^1 \text{ 上, 有 } u_n \rightharpoonup u, \tag{3.8}$$

$$\text{在 } C([0,T],\mathbb{R}^N) \text{ 上, 有 } u_n \to u. \tag{3.9}$$

于是当 $n\to\infty$ 时, 有

$$\int_0^T |u_n-u|^2dt \to 0. \tag{3.10}$$

考虑到 (3.9) 式和条件 (A), 有当 $n\to\infty$ 时,

$$\int_0^T e^{Q(t)}(\nabla F(t,u_n)-\nabla F(t,u),u_n-u)dt\to 0. \tag{3.11}$$

由 (3.8) 式及 $\varphi'(u_n)\to 0$ 知, 当 $n\to\infty$ 时,

$$(\varphi'(u_n)-\varphi'(u),u_n-u)\to 0. \tag{3.12}$$

此外, 根据 (2.2) 式可得

$$(\varphi'(u_n)-\varphi'(u),u_n-u)=\int_0^T e^{Q(t)}|\dot u_n-\dot u|^2dt+\int_0^T e^{Q(t)}(\nabla F(t,u_n)-\nabla F(t,u),u_n-u)dt.$$

因此结合 (3.11), (3.12) 式有 $0\leqslant M_2\int_0^T|\dot u_n-\dot u|^2dt\leqslant\int_0^T e^{Q(t)}|\dot u_n-\dot u|^2dt\to 0$. 所以当 $n\to\infty$ 时, $\int_0^T|\dot u_n-\dot u|^2dt\to 0$. 上式结合 (3.10) 式可得

$$\|u_n-u\|=\left(\int_0^T|\dot u_n-\dot u|^2dt+\int_0^T|u_n-u|^2dt\right)^{\frac12}\to 0.$$

即 $\{u_n\}$ 在 H_T^1 上强收敛于 u, 这意味着 φ 满足 (C) 条件.

(2) 接下来证明 φ 满足几何条件.

令 $X=H_T^1$, $\widetilde H_T^1=\{u\in H_T^1|\bar u=0\}$, 则 $X=\widetilde H_T^1\oplus\mathbb{R}^N,\dim\mathbb{R}^N<\infty$. 根据引理 2.2 可知, 只需证明

($\varphi1$) 在 $\widetilde H_T^1$ 中, 当 $\|u\|\to+\infty$ 时, $\varphi(u)\to+\infty$, 这意味着 $\inf\limits_{u\in\widetilde H_T^1}\varphi(u)>-\infty$;

($\varphi2$) 在 $\mathbb{R}^N$ 中, 当 $\|u\|\to+\infty$ 时, $\varphi(u)\to-\infty$.

则显然可得 $\inf\limits_{u\in\widetilde H_T^1}\varphi(u)>\sup\limits_{u\in\mathbb{R}^N}\varphi(u)$.

首先证明 ($\varphi1$). $\forall u\in\widetilde H_T^1$, 根据 (2.1) 式, 引理 2.3, 注 2.3 中的 (2) 和 Sobolev 不等式有

$$\begin{aligned}\varphi(u)&=\frac12\int_0^T e^{Q(t)}|\dot u(t)|^2dt-\int_0^T e^{Q(t)}F(t,u(t))dt\\&\geqslant\frac12A_2\|\dot u\|_{L^2}^2-A_1\int_0^T\left(\frac{h_1(t)}{M_2^2}|u(t)|^2G(|u(t)|)+h_1(t)\right)dt\\&\geqslant\frac12A_2\|\dot u\|_{L^2}^2-C_6\|u\|_\infty^2G(\|u\|_\infty)-C_3\\&\geqslant\left(\frac12A_2-C_7G\big(C\|\dot u\|_{L^2}\big)\right)\|\dot u\|_{L^2}^2-C_3.\end{aligned}\tag{3.13}$$

因为在 $\widetilde H_T^1$ 中, 根据 Wirtinger 不等式, $\|u\|\to+\infty$ 等价于 $\|\dot u\|_{L^2}\to+\infty$, 则由 (3.13) 式和注 2.3 中的 (1) 有当 $\|u\|\to+\infty$ 时, $\varphi(u)\to+\infty$, 即 ($\varphi1$) 成立.

最后证明 ($\varphi2$). $\forall u\in\mathbb{R}^N$, 因为 $0<\frac{1}{\theta(t)}<2$, 则由 (2.1) 式和 (H2) 有

$$\varphi(u)=-\int_0^T e^{Q(t)}F(t,u(t))dt\leqslant-\frac12\int_0^T e^{Q(t)}\frac{F(t,u(t))}{\theta(|u(t)|)}dt. \tag{3.14}$$

而在 $\mathbb{R}^N$ 中, $\|u\| \to +\infty$ 等价于 $|u| \to +\infty$. 因此由 (H3) 和 (3.14) 式可得, 当 $\|u\| \to +\infty$ 时, $\varphi(u) \to -\infty$, 即 (φ2) 成立.

综上, 利用鞍点定理 (引理 2.2), 根据步骤 (1), (2) 知 φ 至少有一个临界点. 因此问题 (1.2) 在空间 H_T^1 中至少有一个周期解. 即定理 1.1 得证.

参 考 文 献

[1] Tang Chunlei, Wu Xingping. A note on periodic solutions of nonautonomous second order systems[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 2004, 132 (5): 1295–1303.

[2] Tang Chunlei, Wu Xingping. Notes on periodic solutions of subquadratic second order systems[J]. J. Math. Anal. Appl., 2003, 285 (1): 8–16.

[3] Mawhin J, Willem M. Critical point theory and Hamiltonian systems[M]. New York: Springer-Verlag, 1989.

[4] Tang Chunlei, Wu Xingping. Periodic solutions for a class of new superquadratic second order Hamiltonian systems[J]. Appl. Math. Lett., 2014, 34: 65–71.

[5] Wang Zhiyong, Zhang Jinhui. Periodic solutions of a class of second order non-autonomous Hamiltonian systems[J]. Nonl. Anal., 2010, 72 (12): 4480–4487.

[6] Rabinowitz P H. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations[M]. CBMS Reg. Conf. Ser. Math., Vol. 65, Providence RI: Amer. Math. Soc., 1986.

[7] 张申贵. 一类带阻尼项的二阶 Hamilton 系统的多重周期解 [J]. 数学研究, 2013, 46 (3): 303–310.

[8] Rabinowitz P H. On subharmonic solutions of Hamiltonian systems[J]. Comm. Pure. Appl. Math., 1980, 33 (5): 609–633.

[9] 贺铁山, 陈文革. 二阶非线性差分方程多重周期解的存在性 [J]. 数学杂志, 2009, 29 (3): 300–306.

PERIODIC SOLUTIONS OF A CLASS OF SUBQUADRATIC SECOND ORDER HAMILTONIAN SYSTEMS WITH DAMPED VIBRATION

JU Jia-min, WANG Zhi-yong

(*School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044, China*)

Abstract: In this paper, we study the problems about existence of periodic solutions for second-order Hamiltonian systems with damped vibration. Via saddle point theorem under a new subquadratic condition, an existence theorem is obtained, which extends and improves previously known results.

Keywords: periodic solutions; second-order Hamiltonian systems; (C) condition; saddle point theorem

2010 MR Subject Classification: 34K13; 58E30