数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

Vol. 37 (2017)
No. 2

异维混沌动力系统的有限时间广义同步

朱泽飞, 涂俐兰, 吴泽虎
(武汉科技大学理学院, 湖北 武汉 430065)

摘 要: 本文研究了异维混沌动力系统的有限时间广义同步的问题. 利用有限时间 Lyapunov 稳定性定理、Jensen 不等式等理论方法, 通过设置不同的控制器, 从理论上提出了一般的异维驱动系统和响应系统的有限时间广义同步的两种方案, 并且对方案二中的影响同步时间因素做了理论分析和证明. 最后, 数值模拟验证了提出理论的正确性和可行性.

关 键 词: 异维混沌系统; 有限时间 Lyapunov 稳定性定理; 有限时间广义同步; 同步时间

MR(2010) **主题分类号**: 93C15; 93D99 **中图分类号**: O231.2

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2017)02-0365-11

1 引言

混沌同步由于在人类大脑 [1]、流体混合 [2]、无线电通讯 [3] 等领域中的广泛应用, 而成为非线性科学研究领域中的热点课题之一. 早期人们在物理学、生物学、气象学、工程学等众多领域中对混沌同步进行了深入地研究, 得到了一系列实现混沌系统同步的方法, 譬如, PC 同步法 [4]、脉冲控制同步法 [5]、广义同步法 [6] 等. 这些方法又可以归纳为两大类同步 – 完全同步和广义同步. 完全同步的最终目标是两个混沌系统的同步态完全相同, 而广义同步的同步态不同, 往往呈现出某种函数关系. 实际上, 现实中的系统很难做到动力学完全相同.

近年来, 混沌系统的同步主要集中在研究同维同结构或同维异结构混沌系统之间的渐近同步 [4−9]. 然而到目前为止, 对异维异结构混沌系统之间的理论研究结果还比较少 [10−11]. 一方面, 当两个混沌系统的维数不同时, 则它们之间的结构必然大相径庭, 而且在相空间中, 它们的吸引域也有很大的差异性; 另一方面, 混沌系统对初值条件极端的敏感, 初值条件的任何微小改变, 最终必将导致系统之间动力学行为的巨大变化. 所以, 相比较同维同结构或同维异结构的混沌系统而言, 实现异维异结构混沌系统间的广义同步就具有更大的挑战性.

同时, 现有的文献研究的渐近同步是指同步时间趋于无穷大时, 混沌系统能否趋于同步状态. 这一要求在实践中有时候并不现实, 譬如, 在保密通信中, 如果混沌振子在有限时间里不能达到同步, 加密信息不能在有限时间里被成功地恢复或发送, 都将造成无法挽回的损失 [12].

基于以上所述, 本文将探讨一般的异维混沌系统的有限时间广义同步. 文献 [10] 研究了异维混沌系统的广义同步问题, 但是同步时间仍然是趋于无穷大时的情形; 文献 [13] 研究了随机扰动下统一混沌系统的有限时间同步, 但是讨论的混沌系统仍然是同维混沌系统; 文献 [11] 研究了异维混沌系统的有限时间广义同步, 提出了一种控制器的设计方案, 但是设计方案还有待提高, 而且文中并没有给出同步时间影响因素的结论证明. 本文在文献 [11] 的基础

*收稿日期: 2015-11-16 接收日期: 2016-02-26
基金项目: 国家自然科学基金资助 (61473338); 国家自然科学基金资助 (61304164).
作者简介: 朱泽飞 (1989–), 男, 湖北十堰, 硕士, 主要研究方向: 非线性分析与控制

之上给出了控制器的两种设计方案, 其中方案一提出了与文献 [11] 的控制器完全不同的设计思路, 而方案二把文献 [11] 中定理 1 中的控制器推广到更一般的情形. 另外, 本文把文献 [11] 中作者给出的同步时间影响因素的结论修改得更加合理, 而且给出了理论证明.

2 预备定义和引理

考察一般混沌系统的驱动系统为

$$\begin{cases} \dot{x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1(x), \\ \dot{x_2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + f_2(x), \\ \quad\vdots \\ \dot{x_n} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + f_n(x). \end{cases} \tag{2.1}$$

响应系统为

$$\begin{cases} \dot{y_1} = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1m}y_m + g_1(y), \\ \dot{y_2} = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2m}y_m + g_2(y), \\ \quad\vdots \\ \dot{y_m} = b_{m1}y_1 + b_{m2}y_2 + \cdots + b_{mm}y_m + g_m(y), \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in R^n$ 是驱动系统 (2.1) 的状态变量, $a_{ij} \in R$ 是不全为零的常数, $f_i(x) : R^n \to R(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是非线性连续函数; $y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^T \in R^m$ 是响应系统 (2.2) 的状态变量, $b_{ij} \in R$ 是不全为零的常数, $g_j(y) : R^m \to R(j = 1, 2, \cdots, m)$ 是非线性连续函数.

对于响应系统 (2.2) 式, 若施加控制器, 则有

$$\begin{cases} \dot{y_1} = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1m}y_m + g_1(y) + u_1, \\ \dot{y_2} = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2m}y_m + g_2(y) + u_2, \\ \quad\vdots \\ \dot{y_m} = b_{m1}y_1 + b_{m2}y_2 + \cdots + b_{mm}y_m + g_m(y) + u_m, \end{cases} \tag{2.3}$$

其中 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_m)^T \in R^m$ 是待设计的控制器.

下面给出有限时间广义同步的相关定义以及文中需要用到的引理.

定义 1 对于驱动系统 (2.1) 和响应系统 (2.3) 中的状态变量, 设 $E(t) = y(t) - \phi(x(t))$, 称 $E(t)$ 为驱动系统 (2.1) 和响应系统 (2.3) 的广义同步误差, 其中 $\phi(x) : R^n \to R^m$, 即 $\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_m(x))^T \in R^m$ 是任意一个给定的连续可微的向量函数.

定义 2 对于定义 1 中定义的广义同步误差 $E(t)$, 如果存在一个时间常量 $T > 0$, 使得 $\lim\limits_{t \longrightarrow T^-} ||E(t)|| = 0$, 且当 $t \geq T$ 时有 $||E(t)|| \equiv 0$, 则称驱动系统 (2.1) 和响应系统 (2.3) 在控制器 u 的作用下关于向量函数 $\phi(x)$ 在 T 时刻达到有限时间广义同步, 其中 T 称为同步时间, $||.||$ 是 2 - 范数.

定义 3 [14] 考察下面的非线性动力系统

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{2.4}$$

其中 $x \in R^n$ 是系统的状态变量, $f(x): R^n \rightarrow R^n$ 是光滑的非线性函数. 如果存在一个常数 $T > 0$ (T 依赖于初始条件 $x(0)$ 的值) 使得

$$\lim_{t \longrightarrow T^-} ||x(t)|| = 0,$$

且当 $t \geq T$ 时有 $||x(t)|| \equiv 0$, 则称系统 (2.4) 是有限时间稳定的.

引理 1 [14] (有限时间 Lyapunov 稳定性定理) 假设存在连续、正定的函数 $V(t)$ 满足如下微分不等式

$$\dot{V(t)} \leq -cV^{\eta}(t), \forall t \geq t_0 \geq 0, V(t_0) \geq 0, \tag{2.5}$$

其中 $c > 0, 0 < \eta < 1$ 为正常数. 那么对于任意给定的 t_0, 都有

$$\begin{cases} V^{1-\eta}(t) \leq V^{1-\eta}(t_0) - c(1-\eta)(t-t_0), t_0 \leq t \leq T, \\ \forall\, t \geq T, V(t) \equiv 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

其中

$$T = t_0 + \frac{V^{1-\eta}(t_0)}{c(1-\eta)}. \tag{2.7}$$

引理 2 [15] (Jensen 不等式) 对于任意的实数 $a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 以及 $0 < p < 1$, 有

$$(\sum_{i=1}^{n} |a_i|)^p \leq \sum_{i=1}^{n} (|a_i|^p). \tag{2.8}$$

注 1 本文的主要目标是设计合适的控制器 u, 在定义 2 的意义下使得驱动系统 (2.1) 和响应系统 (2.3) 达到有限时间广义同步.

3 主要结果

3.1 控制器的设计方案

由定义 1, 可以给出驱动系统 (2.1) 和响应系统 (2.3) 的广义同步误差为 $E = y - \phi(x)$ 且

$$\dot{E} = \dot{y} - (D\phi(x))\dot{x}, \tag{3.1}$$

其中 $D\phi(x)$ 是 $\phi(x)$ 的 Jacobi 矩阵, 即

$$D\phi(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \phi_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_m(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{m \times n}. \tag{3.2}$$

把 (2.1), (2.3), (3.2) 式代入 (3.1) 式中, 得到驱动系统 (2.1) 和响应系统 (2.3) 的误差系统为

$$\begin{cases} \dot{e_1} = \sum_{k=1}^{m} b_{1k}e_k + r_1(x,y) + u_1, \\ \dot{e_2} = \sum_{k=1}^{m} b_{2k}e_k + r_2(x,y) + u_2, \\ \quad \vdots \\ \dot{e_m} = \sum_{k=1}^{m} b_{mk}e_k + r_m(x,y) + u_m, \end{cases} \tag{3.3}$$

其中 $E = (e_1, e_2, \cdots, e_m)^T \in R^m$,

$$\begin{cases} r_1(x,y) = \sum_{j=1}^{m} b_{1j}\phi_j(x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi_1(x)}{\partial x_i}\dot{x}_i + g_1(y), \\ r_2(x,y) = \sum_{j=1}^{m} b_{2j}\phi_j(x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi_2(x)}{\partial x_i}\dot{x}_i + g_2(y), \\ \qquad \vdots \\ r_m(x,y) = \sum_{j=1}^{m} b_{mj}\phi_j(x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi_m(x)}{\partial x_i}\dot{x}_i + g_m(y). \end{cases} \tag{3.4}$$

根据定义 3, 对于驱动系统 (2.1) 和响应系统 (2.3) 的有限时间广义同步问题的研究, 可以等价地转换为研究误差系统 (3.3) 在零点的有限时间稳定性问题. 接下来的目标是设计合适的控制器在定义 3 的意义下, 误差系统 (3.3) 能够达到有限时间稳定. 本文设计了两种方案来施加控制器 u.

注 2 以下设文中的 $\alpha = \frac{q}{p}$ 是合适的有理数, p, q 为正奇数且 $p > q$.

方案一 分 m 个步骤依次地设置控制器 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_m)^T \in R^m$ 中的 m 个分量.

第 1 步 对 (3.3) 式的第一个方程设置控制器

$$u_1 = -\sum_{k=1}^{m} b_{1k}e_k - r_1(x,y) - c_1 e_1^{\alpha} - d_1 e_1, \tag{3.5}$$

其中 c_1, d_1 为任意给定的正常数.

将 (3.5) 式代入误差系统 (3.3) 中的第一个方程中得

$$\dot{e_1} = -c_1 e_1^{\alpha} - d_1 e_1, \tag{3.6}$$

构造 Lyapunov 函数为

$$V_1 = \frac{1}{2}e_1^2, \tag{3.7}$$

对 (3.7) 式关于时间 t 求导数得

$$\dot{V_1} = e_1\dot{e_1}, \tag{3.8}$$

把 (3.6) 式代入 (3.8) 式得

$$\dot{V_1} = -c_1 e_1^{\alpha+1} - d_1 e_1^2 \le -c_1 e_1^{\alpha+1} = -c_1 2^{\frac{\alpha+1}{2}} (\frac{e_1^2}{2})^{\frac{\alpha+1}{2}} = -c_1 2^{\frac{\alpha+1}{2}} V_1^{\frac{\alpha+1}{2}}. \tag{3.9}$$

由引理 1 可知在某个 T_1 时刻, 误差 e_1 趋于零, 且当 $t \ge T_1$ 时, 有 $e_1 \equiv 0$.

第 2 步 类似地, 当 $t \ge T_1$ 时, 由第一步可知 $e_1 \equiv 0$, 于是误差系统 (3.3) 的子系统变为

$$\begin{cases} \dot{e_2} = \sum_{k=2}^{m} b_{2k} e_k + r_2(x,y) + u_2, \\ \dot{e_3} = \sum_{k=2}^{m} b_{3k} e_k + r_3(x,y) + u_3, \\ \qquad \cdots \\ \dot{e_m} = \sum_{k=2}^{m} b_{mk} e_k + r_m(x,y) + u_m. \end{cases} \tag{3.10}$$

对 (3.10) 式的第一个方程设置控制器

$$u_2 = -\sum_{k=2}^{m} b_{2k} e_k - r_2(x,y) - c_2 e_2^{\alpha} - d_2 e_2, \tag{3.11}$$

其中 c_2, d_2 为任意给定的正常数. 将 (3.11) 式代入误差子系统 (3.10) 式中的第一个方程得

$$\dot{e_2} = -c_2 e_2^{\alpha} - d_2 e_2. \tag{3.12}$$

类似地, 构造一个 Lyapunov 函数为

$$V_2 = \frac{1}{2} e_2^2, \tag{3.13}$$

仍然可以得到

$$\dot{V_2} \le -c_2 2^{\frac{\alpha+1}{2}} V_2^{\frac{\alpha+1}{2}}. \tag{3.14}$$

由引理 1 可知在某个 $T_2 > T_1$ 时刻, 误差 e_2 趋于零, 且当 $t \ge T_2$ 时, 有 $e_2 \equiv 0$.

如此类似地, 在上一步的基础之上, 一步一步地设置控制器 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_m)^T \in R^m$ 中剩下的 $m-2$ 个分量 $u_3, u_4, \cdots, u_{m-1}, u_m$, 其中

$$\begin{cases} u_3 = -\sum_{k=3}^{m} b_{3k} e_k - r_3(x,y) - c_3 e_3^{\alpha} - d_3 e_3, \\ u_4 = -\sum_{k=4}^{m} b_{4k} e_k - r_4(x,y) - c_4 e_4^{\alpha} - d_4 e_4, \\ \quad \vdots \\ u_{m-1} = -\sum_{k=m-1}^{m} b_{m-1,k} e_k - r_{m-1}(x,y) - c_{m-1} e_{m-1}^{\alpha} - d_{m-1} e_{m-1}, \\ u_m = -b_{mm} e_m - r_m(x,y) - c_m e_m^{\alpha} - d_m e_m, \end{cases} \tag{3.15}$$

其中 c_j, d_j $(j=3,4,\cdots,m)$ 为任意给定的正常数. 仍然由引理 1 可知分别在某个 $T_3<T_4<\cdots<T_{m-1}<T_m$ 时刻, 误差 e_j 趋于零, 且当 $t\geq T_j$ 时, 有 $e_j\equiv 0$ $(j=3,4,\cdots,m)$. 从而在最后的 T_m 时刻有 $\parallel E(t)\parallel$ 趋于零, 且当 $t\geq T_m$ 时有 $\parallel E(t)\parallel\equiv 0$. 即误差系统 (3.3) 是有限时间稳定的. 也就是说在控制器 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_m)^T\in R^m$ 的作用下, 其中

$$u_j=-\sum_{k=j}^{m}b_{jk}e_k-r_j(x,y)-c_je_j^{\alpha}-d_je_j\ (j=1,2,\cdots,m-1,m), \tag{3.16}$$

驱动系统 (2.1) 和响应系统 (2.3) 关于向量函数 $\phi(x)$ 在 T_m 时刻达到有限时间广义同步.

方案二 一次性地把控制器 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_m)^T\in R^m$ 中的 m 个分量 $u_1,u_2,\cdots,u_m$ 同时施加上去, 只求最后的同步时间.

考察误差系统 (3.3), 若设施加的控制器 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_m)^T\in R^m$ 中的分量满足如下条件

$$\begin{cases} u_1=-\sum\limits_{k=1}^{m}b_{1k}e_k-r_1(x,y)-e_1^{\alpha}-p_1e_1, \\ u_2=-\sum\limits_{k=1}^{m}b_{2k}e_k-r_2(x,y)-e_2^{\alpha}-p_2e_2, \\ \quad\vdots \\ u_m=-\sum\limits_{k=1}^{m}b_{mk}e_k-r_m(x,y)-e_m^{\alpha}-p_me_m, \end{cases} \tag{3.17}$$

其中 p_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 为任意给定的正常数, 那么误差系统 (3.3) 是有限时间稳定的.

构造 Lyapunov 函数为

$$V=\frac{1}{2}\parallel E(t)\parallel^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}e_i^2, \tag{3.18}$$

对 (3.18) 式沿着轨线 (3.3) 对时间 t 求导数得

$$\begin{aligned}\dot V&=\sum_{i=1}^{m}e_i\dot e_i\\&=e_1\dot e_1+e_2\dot e_2+\cdots+e_m\dot e_m\\&=e_1(\sum_{k=1}^{m}b_{1k}e_k+r_1(x,y)+u_1)+e_2(\sum_{k=1}^{m}b_{2k}e_k+r_2(x,y)+u_2)\\&\quad+\cdots+e_m(\sum_{k=1}^{m}b_{mk}e_k+r_m(x,y)+u_m),\end{aligned} \tag{3.19}$$

把 (3.17) 式代入 (3.19) 式中得

$$\begin{aligned}\dot V&=\sum_{i=1}^{m}e_i(-e_i^{\alpha}-p_ie_i)=-\sum_{i=1}^{m}e_i^{\alpha+1}-\sum_{i=1}^{m}p_ie_i^2\\&\leq-\sum_{i=1}^{m}e_i^{\alpha+1}=-\sum_{i=1}^{m}(2^{\frac{\alpha+1}{2}}(\frac{e_i^2}{2})^{\frac{\alpha+1}{2}})=-2^{\frac{\alpha+1}{2}}\sum_{i=1}^{m}((\frac{e_i^2}{2})^{\frac{\alpha+1}{2}}).\end{aligned} \tag{3.20}$$

由引理 2 可知

$$(\sum_{i=1}^{m}\frac{e_i^2}{2})^{\frac{\alpha+1}{2}} \leq \sum_{i=1}^{m}((\frac{e_i^2}{2})^{\frac{\alpha+1}{2}}), \tag{3.21}$$

从而

$$-2^{\frac{\alpha+1}{2}}\sum_{i=1}^{m}((\frac{e_i^2}{2})^{\frac{\alpha+1}{2}}) \leq -2^{\frac{\alpha+1}{2}}(\sum_{i=1}^{m}\frac{e_i^2}{2})^{\frac{\alpha+1}{2}} = -2^{\frac{\alpha+1}{2}}V^{\frac{\alpha+1}{2}}, \tag{3.22}$$

结合 (3.19)–(3.22) 式可知

$$\dot{V} \leq -2^{\frac{\alpha+1}{2}}V^{\frac{\alpha+1}{2}}. \tag{3.23}$$

由引理 1 可知存在 $T>0$ 使得在 T 时刻有 $\parallel E(t) \parallel$ 趋于零, 且当 $t \geq T$ 时有 $\parallel E(t) \parallel \equiv 0$. 即误差系统 (3.3) 是有限时间稳定的. 所以驱动系统 (2.1) 和响应系统 (2.3) 关于向量函数 $\phi(x)$ 在 T 时刻达到有限时间广义同步.

注 3 显然, 利用方案一在进行控制器的设计时, 误差系统 (3.3) 的子系统变得更加简单, 而且其复杂程度是低于方案二的.

注 4 特别地, 在方案二的控制器的分量 (3.17) 式中, 当 $p_1 = p_2 = \cdots = p_m = 1$ 时, 此时的控制器就是文献 [11] 中定理 1 的结果. 也就是说, 文献 [11] 中的定理 1 只是本文方案二中 (3.17) 式的特殊情形.

3.2 同步时间的影响因素分析

在上一节中用两种方案设计出了达到有限时间广义同步的控制器, 在这一节中本文将分析方案二中达到广义同步所需时间的影响因素.

对于 (3.23) 式, 结合引理 1 可知

$$c = 2^{\frac{\alpha+1}{2}}, \eta = \frac{\alpha+1}{2}, \tag{3.24}$$

把 (3.24) 式代入引理 1 中的 (2.7) 式, 整理得

$$T = t_0 + \frac{1}{1-\alpha} \parallel E(t_0) \parallel^{1-\alpha}, \tag{3.25}$$

其中 $E(t_0) = y(t_0) - \phi(x(t_0)), t_0 \in [0, +\infty), \alpha \in (0,1)$.

由 (3.25) 式可知驱动系统 (2.1) 和响应系统 (2.3) 关于向量函数 $\phi(x)$ 的同步时间 T, 可以通过控制初始误差状态 $E(t_0)$ 和参数 $\alpha \in (0,1)$ 来实现. 下面讨论 $E(t_0)$ 与参数 α 分别变化时, 对同步时间 T 的影响结果.

注 5 下文中的 e 是自然对数的底数.

定理 1 假设给定初始状态 $E(t_0)$,

(1) 若 $0 < ||E(t_0)|| \leq e$, 则 T 为 $\alpha \in (0,1)$ 上的严格递增函数;

(2) 若 $||E(t_0)|| > e$,

① 当 $\alpha \in (1 - \frac{1}{\ln\|E(t_0)\|}, 1) \triangleq D_1$ 时, 则 T 为 $\alpha \in D_1$ 上的严格递增函数;

② 当 $\alpha \in (0, 1 - \frac{1}{\ln\|E(t_0)\|}) \triangleq D_2$ 时, 则 T 为 $\alpha \in D_2$ 上的严格递减函数.

证 (1) 由题设可知 t_0 和 $||E(t_0)||$ 都是已知的, 则 T 是关于 $\alpha\in(0,1)$ 上的一元函数, 对 T 关于 α 求导数得

$$\frac{dT}{d\alpha}=\frac{\parallel E(t_0)\parallel^{1-\alpha}(1-\ln\parallel E(t_0)\parallel+\alpha\ln\parallel E(t_0)\parallel)}{(1-\alpha)^2}. \tag{3.26}$$

因为 $0<||E(t_0)||\le e$, 所以 $-\infty<\ln||E(t_0)||\le 1$.

(i) 若 $\ln\parallel E(t_0)\parallel=0$, 则 $\frac{dT}{d\alpha}=\frac{1}{(1-\alpha)^2}>0$, 所以 T 为 $\alpha\in(0,1)$ 上的严格递增函数;

(ii) 若 $-\infty<\ln\parallel E(t_0)\parallel<0$, 则 $1-\frac{1}{\ln\parallel E(t_0)\parallel}>1>\alpha$, 从而 $\alpha-(1-\frac{1}{\ln\parallel E(t_0)\parallel})<0$, 于是 $\frac{dT}{d\alpha}>0$, 所以 T 为 $\alpha\in(0,1)$ 上的严格递增函数;

(iii) 若 $0<\ln\parallel E(t_0)\parallel\le 1$, 则 $1-\ln\parallel E(t_0)\parallel\ge 0$, 而 $\alpha\ln\parallel E(t_0)\parallel>0$, 所以 $1-\ln\parallel E(t_0)\parallel+\alpha\ln\parallel E(t_0)\parallel>0$, 于是 $\frac{dT}{d\alpha}>0$, 所以 T 为 $\alpha\in(0,1)$ 上的严格递增函数.

综上 (i), (ii), (iii) 所述, T 为 $\alpha\in(0,1)$ 上的严格递增函数.

(2) 假设给定初始状态 $E(t_0)$ 且 $\parallel E(t_0)\parallel>e$, 则 $\ln\parallel E(t_0)\parallel>1$, 由 (3.26) 式可知

$$\frac{dT}{d\alpha}=\frac{\parallel E(t_0)\parallel^{1-\alpha}(\ln\parallel E(t_0)\parallel)(\alpha-(1-\frac{1}{\ln\parallel E(t_0)\parallel}))}{(1-\alpha)^2}. \tag{3.27}$$

因为 $\ln\parallel E(t_0)\parallel>1$, 所以 $0<1-\frac{1}{\ln\parallel E(t_0)\parallel}<1$.

① 若 $1-\frac{1}{\ln\parallel E(t_0)\parallel}<\alpha<1$, 则 $\alpha-(1-\frac{1}{\ln\parallel E(t_0)\parallel})>0$, 于是 $\frac{dT}{d\alpha}>0$, 从而 T 为 $\alpha\in D_1$ 上的严格递增函数;

② 若 $0<\alpha<1-\frac{1}{\ln\parallel E(t_0)\parallel}$, 则 $\alpha-(1-\frac{1}{\ln\parallel E(t_0)\parallel})<0$, 于是 $\frac{dT}{d\alpha}<0$, 从而 T 为 $\alpha\in D_2$ 上的严格递减函数.

定理 2 假设给定参数 α, 则 T 为关于初始状态 $\parallel E(t_0)\parallel\in[0,+\infty)$ 上的严格递增函数.

该定理显然成立, 证明从略.

注 6 定理 1 从理论上严格地证明了同步时间 T 和参数 α 之间的关系.

4 数值模拟

为了证明本文提出方案的有效性和正确性, 本节将对上节方案二的结果做数值模拟, 并且只讨论驱动系统 (2.1) 的维数 n 大于响应系统 (2.3) 的维数 m 时的情形.

本节以三维 Lorenz 系统和二维 Duffing 系统分别作为驱动系统和响应系统进行验证. 驱动系统为

$$\begin{cases}\dot{x_1}=-10x_1+10x_2,\\ \dot{x_2}=28x_1-x_2-x_1x_3,\\ \dot{x_3}=-\dfrac{8}{3}x_3+x_1x_2.\end{cases} \tag{4.1}$$

响应系统为

$$\begin{cases}\dot{y_1}=y_2+u_1,\\ \dot{y_2}=y_1-y_2-y_1^3+0.8\cos t+u_2.\end{cases} \tag{4.2}$$

由于 $\phi(x):R^3\to R^2$ 是任意给定的连续可微的向量函数, 所以为了简便起见不妨设

$$\phi(x)=(x_1+x_3,x_2)^T\in R^2, \tag{4.3}$$

那么

$$D\phi(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.4}$$

且广义同步误差为

$$\begin{cases} e_1 = y_1 - (x_1 + x_3), \\ e_2 = y_2 - x_2. \end{cases} \tag{4.5}$$

由公式 (3.3) 可得误差系统为

$$\begin{cases} \dot{e_1} = 10x_1 - 9x_2 + \dfrac{8}{3}x_3 - x_1x_2 + e_2 + u_1, \\ \dot{e_2} = -27x_1 + x_3 + x_1x_3 + e_1 - e_2 - y_1^3 + 0.8\cos t + u_2. \end{cases} \tag{4.6}$$

根据 (3.17) 式可得所求的控制器为

$$\begin{cases} u_1 = -10x_1 + 9x_2 - \dfrac{8}{3}x_3 + x_1x_2 - e_2 - p_1e_1 - e_1^{\alpha}, \\ u_2 = 27x_1 - x_3 - x_1x_3 - e_1 + e_2 + y_1^3 - 0.8\cos t - p_2e_2 - e_2^{\alpha}. \end{cases} \tag{4.7}$$

因为 p_1, p_2 是任意给定的正常数, 所以为了简便起见, 不妨取 $p_1 = p_2 = 1$, 那么 (4.7) 式可化为

$$\begin{cases} u_1 = -10x_1 + 9x_2 - \dfrac{8}{3}x_3 + x_1x_2 - e_2 - e_1 - e_1^{\alpha}, \\ u_2 = 27x_1 - x_3 - x_1x_3 - e_1 + y_1^3 - 0.8\cos t - e_2^{\alpha}. \end{cases} \tag{4.8}$$

取驱动系统 (4.1) 和响应系统 (4.2) 的初始状态分别为

$$(x_1(0), x_2(0), x_3(0))^T = (1, -1, 0)^T \text{ 和 } (y_1(0), y_2(0))^T = (-2, 2)^T.$$

下面对参数 α 分别取 $\frac{5}{7}$ 和 $\frac{3}{5}$ 时做数值模拟.

利用 MATLAB, 可获得驱动系统、响应系统以及误差系统的轨迹图. 图 1 是驱动系统 (4.1) 的轨迹图, 图 2 是响应系统 (4.2) 的轨迹图, 图 3 是当参数 $\alpha = \frac{5}{7}$ 时在控制器 (4.8) 作用下的误差系统轨迹图, 图 4 是当参数 $\alpha = \frac{3}{5}$ 时在控制器 (4.8) 作用下的误差系统轨迹图.

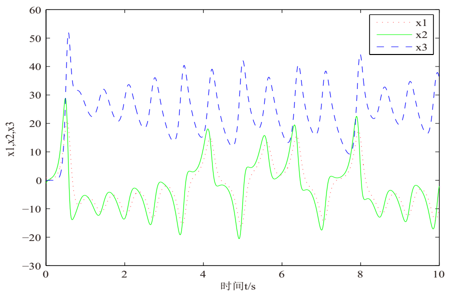

图 1: 驱动系统 (4.1) 的轨迹图

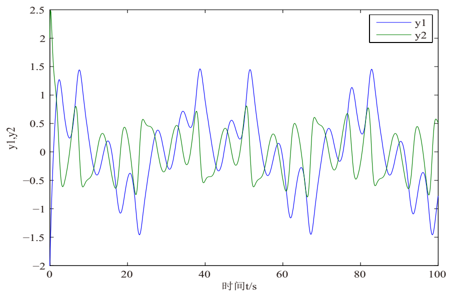

图 2: 响应系统 (4.2) 的轨迹图

从模拟图中可以发现图 3 与图 4 显示了误差系统在有限时间收敛到零, 也就是说, 驱动系统 (4.1) 和响应系统 (4.2) 在控制器 (4.8) 的作用下, 在有限时间里达到了广义同步, 而

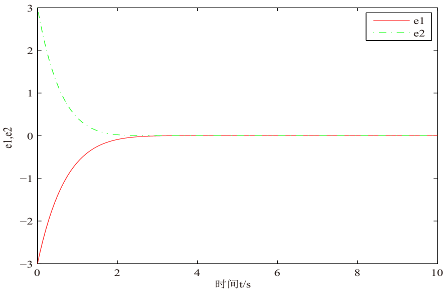

图 3: 误差系统 (4.6) 的轨迹图

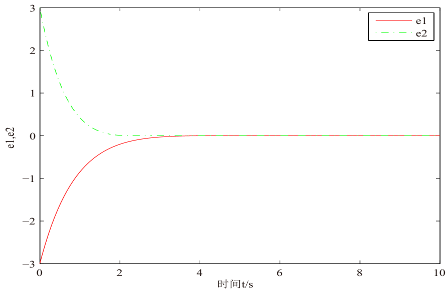

图 4: 误差系统 (4.6) 的轨迹图

且图 3 的同步时间比图 4 的同步时间要长一些, 这与定理 1 的理论结果是一致的. 事实上, 经过计算可知 $||E(0)|| = 3\sqrt{2} > e$, 而 $1 - \frac{1}{\ln\|E(0)\|} \approx 0.308$, 又因为 $\alpha = \frac{5}{7} > \frac{3}{5}$, 所以 $\alpha \in (1 - \frac{1}{\ln\|E(0)\|}, 1)$, 于是由定理 1 中的结论①可知同步时间 T 是关于参数 α 的严格递增函数, 所以图 3 的同步时间比图 4 的同步时间要长一些.

5 结论

本文通过设置不同的控制器, 从理论上提出了一般的异维驱动系统与响应系统的有限时间广义同步的两种方案, 其中方案一给出了与文献 [11] 完全不同的设计思路, 方案二把文献 [11] 中的结论推广到一般情形. 进一步地, 本文给出了方案二中的参数和误差系统的初始状态对同步时间影响的理论分析和证明, 从而可以通过适当地改变参数和系统的初始状态来控制同步速度. 最后, 利用三维的 Lorenz 系统和二维的 Duffing 系统进行了数值仿真实验, 验证了文中理论的有效性和正确性.

参 考 文 献

[1] Schiff S J, Jerger K, Duong D H, Chang T, Spano M L, Ditto W L. Controlling chaos in the brain[J]. Nature, 1994, 370(6491): 615–620.

[2] Ottino J M, Muzzio F J, Tjahjadi M, Franjione J G, Jana S C, Kusch H A. Chaos, symmetry, and self-similarity: exploiting order and disorder in mixing processes [J]. Sci., 1992, 257(5071): 754–760.

[3] Argyris A, Syvridis D, Larger L, Annovazzi L V, Colet P, Fischer I, Garcia O J, Mirasso C R, Pesquera L, Shore K A. Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links[J]. Nature, 2005, 438(7066): 343–346.

[4] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems[J]. Phys. Rev. Lett., 1990, 64(8): 821–824.

[5] Liu J G. A novel study on the impulsive synchronization of fractional-order chaotic systems [J]. Chinese Phys. B, 2013, 22(6): 285–288.

[6] Rulkov N F, Sushchik M M, Tsimring L S. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems [J]. Phys. Rev. E, 1995, 51(2): 980–994.

[7] 于娜, 丁群, 陈红. 异结构系统混沌同步及其在保密通信中的应用 [J]. 通信学报, 2007, 28(10): 73–78.

[8] 李爽, 徐伟, 李瑞红, 李玉鹏. 异结构系统混沌同步的新方法 [J]. 物理学报, 2006, 55(11): 5681–5687.

[9] Jia Z, Lu J A, Deng G M. Hybrid projective synchronization of uncertain chaotic systems[J]. J. Math., 2011, 31(2): 275–283.

[10] Ge Z M, Yang C H. The generalized synchronization of a Quantum-CNN chaotic oscillator with different order systems[J]. Chaos Sol. Frac., 2008, 35(5): 980–990.

[11] Cai N, Li W Q, Jing Y W. Finite-time generalized synchronization of chaotic systems with different order[J]. Nonl. Dyn., 2011, 64(4): 385–393.

[12] Bowong S, Kakmeni M, Koina R. Chaos synchronization and duration time of a class of uncertain chaotic systems[J]. Math. Comp. Simul., 2006, 71(3): 212–228.

[13] 王娇, 涂俐兰, 朱泽飞. 随机扰动下统一混沌系统的有限时间同步 [J]. 数学杂志, 2014, 34(1): 1–8.

[14] Wang H, Han Z Z, Xie Q Y, Zhang W. Finite-time chaos control of unified chaotic systems with uncertain parameters[J]. Nonl. Dyn., 2009, 55(4): 323–328.

[15] Gao F, Yuan F. Adaptive finite-time stabilization for a class of uncertain high order nonholonomic systems[J]. Isa Trans., 2014, 54: 75–82.

FINITE-TIME GENERALIZED SYNCHRONIZATION OF CHAOTIC DYNAMICAL SYSTEMS WITH DIFFERENT DIMENSIONS

ZHU Ze-fei, TU Li-lan, WU Ze-hu

(*School of Science, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430065, China*)

Abstract: In this paper, finite-time generalized synchronization of chaotic dynamical systems with different dimensions is investigated. Based on the theoretical approaches of finite-time Lyapunov stability theorem and Jensen inequality etc., and by means of setting up different controllers, two kinds of schemes are proposed in theory so as to achieve finite-time generalized synchronization between general drive system and response system with different dimensions. Furthermore, the factors in the second scheme have been theoretically analyzed and proved which have an impact on the synchronization time. Finally, some numerical simulations are presented to verify that the proposed theories are correct and feasible.

Keywords: chaotic system with different dimensions; finite-time Lyapunov stability theorem; finite-time generalized synchronization; synchronization time

2010 MR Subject Classification: 93C15; 93D99