

双曲空间形式中的全脐超曲面与高阶平均曲率

王 琪

(贵阳学院数学与信息科学学院, 贵州 贵阳 550005)

摘要: 本文研究了双曲空间形式中等距浸入的紧致无边超曲面的全脐性质和高阶平均曲率. 利用高阶平均曲率积分估计的方法, 获得了一个新的定理, 改进了这个研究方向上有关的最近结果.

关键词: 全脐超曲面; 高阶平均曲率; 双曲空间形式

MR(2010) 主题分类号: 53C20; 53C40

中图分类号: O186.17

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2017)01-0211-04

1 引言和结果

Biven^[1] 研究了双曲空间形式中的超曲面, 得到用高阶平均曲率刻画超曲面全脐性质的曲率条件, 即下列定理 1.1.

随后, Sung Eun Koh^[2] 减弱对高阶平均曲率的限制条件, 改进文 [1] 的结果, 得到下列定理 1.2.

最近, 王琪^[3] 进一步减弱对高阶平均曲率的限制, 在外围空间为正曲率空间形式的情形, 得到下列定理 1.3, 对这个研究方向作出进一步的改进.

本文讨论双曲空间形式中的超曲面, 在外围空间是双曲空间形式的情形, 得到一个与定理 1.3 类似的定理, 即下列定理 1.4.

定理 1.1^[1] 设 M^n 是双曲空间形式 H^{n+1} 中紧致无边等距浸入超曲面. 若对某个整数 r ($2 \leq r \leq n$) 而言, 高阶平均曲率 H_{r-1} 和 H_r 在 M^n 上均为常数, 则 M^n 必是全脐的.

定理 1.2^[2] 设 M^n 是双曲空间形式 H^{n+1} 中紧致无边等距浸入超曲面. 若对某个整数 r ($2 \leq r \leq n$), 高阶平均曲率 H_{r-1} 处处非零且 $\frac{H_r}{H_{r-1}}$ 在 M^n 上为常数, 则 M^n 必是全脐的.

定理 1.3^[3] 设 M^n 是球面 $S^{n+1}(c)$ ($c > 0$) 中紧致无边的等距浸入超曲面且 M^n 落在 $S^{n+1}(c)$ 的一个开半球内. 若存在两个整数 r, s ($1 \leq r, s \leq n, r \neq s$) 使得 H_r 处处非零且 $\frac{H_s}{H_r}$ 为常数, 则 M^n 必是全脐的.

定理 1.4 设 M^n 是双曲空间形式 H^{n+1} 中紧致无边等距浸入超曲面. 若存在两个整数 r, s ($1 \leq r, s \leq n, r \neq s$) 使得 H_r 处处非零且 $\frac{H_s}{H_r}$ 为常数, 则 M^n 必是全脐的.

2 准备和引理

设 M^n 是 n 维黎曼流形, 它等距浸入 $(n+1)$ 维黎曼流形 N^{n+1} 中, 即 M^n 是 N^{n+1} 中的超曲面. 记 M^n 的主曲率函数为 λ_i ($1 \leq i \leq n$), 则 M^n 的第 r 个高阶平均曲率

$$H_r \quad (1 \leq r \leq n)$$

*收稿日期: 2014-06-16

接收日期: 2014-12-02

基金项目: 贵州省科学技术基金资助 (黔科合 J 字 [2014]2005); 贵州省科学技术基金资助 (黔科合 J 字 LKG[2013]31).

作者简介: 王琪 (1963-), 男, 湖南双峰, 教授, 主要研究方向: 微分几何.

定义为^[1-3, 5-6]

$$C_n^r H_r = \sum_{\lambda_1 < \dots < \lambda_r} \lambda_1 \cdots \lambda_r,$$

其中 C_n^r 是通常的组合数. 规定

$$H_0 \equiv 1, H_{n+1} \equiv 0.$$

设 H^{n+1} 是 $(n+1)$ 维单连通完备黎曼流形, 且有常数截面曲率 $K \equiv -1$, 则 H^{n+1} 称为双曲空间形式. 本文采用 H^{n+1} 的上半空间模型^[1-2].

本文需要以下几个引理.

引理 2.1^[1-2] 设 M^n 是双曲空间形式 H^{n+1} 中等距浸入紧致无边超曲面, 则 M^n 必有椭圆点.

引理 2.2^[1-2] 若对某个整数 r ($1 \leq r \leq n$) 而言, $H_r > 0$ 在 M^n 上成立, 则对一切 $k = 0, 1, 2, \dots, r$ 必有 $H_k > 0$ 在 M^n 上成立.

引理 2.3^[1-4] 对一切 $r = 1, 2, \dots, n$ 必有

$$H_r^2 \geq H_{r-1} H_{r+1}$$

在 M^n 上处处成立. 又对 $1 \leq r \leq n-1$ 而言, 不等式在且仅在脐点处取等号.

引理 2.4^[1-2] 设 M^n 是双曲空间形式 H^{n+1} 中紧致无边等距浸入超曲面. 用 x 表示 M^n 典型嵌入在 R^{n+2} 中的位置向量, η 表示 M^n 的单位法向量场. 则对 $k = 1, 2, \dots, n$ 有下列推广的 Minkowski 积分公式

$$\int_M \{H_{k-1} \langle x, \cdot \rangle + H_k \langle \eta, p \rangle\} dM = 0,$$

其中 $p \in R^{n+2}$ 为任意固定向量, 而 dM 表示黎曼流形 M^n 的体积元, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 R^{n+2} 中的 Lorentz 内积.

3 定理 1.4 的证明

首先, 不妨设 $s < r$.

由引理 2.1, M^n 必有椭圆点, 故在该点处 H_r 和 H_s 均为正值, 从而常数 $a = \frac{H_s}{H_r}$ 是正数. 因为假设 H_r 在 M^n 上处处非零, 从而 $H_r > 0$ 在 M^n 上处处成立, 于是从引理 2.2, 对 $k = 0, 1, 2, \dots, r$ 有 $H_k > 0$ 在 M^n 上处处成立, 所以从引理 2.3 有

$$0 < \frac{H_r}{H_{r-1}} \leq \frac{H_{r-1}}{H_{r-2}} \leq \dots \leq \frac{H_s}{H_{s-1}}. \quad (3.1)$$

由引理 2.4, 可以写以下两个公式

$$\int_M \{H_{r-1} \langle x, \cdot \rangle + H_r \langle \eta, p \rangle\} dM = 0, \quad (3.2)$$

$$\int_M \{H_{s-1} \langle x, \cdot \rangle + H_s \langle \eta, p \rangle\} dM = 0. \quad (3.3)$$

因为 $a = \frac{H_s}{H_r}$ 在 M^n 上是常数, 故由 (3.2) 式和 (3.3) 式立得

$$\int_M \{aH_{r-1}\langle x, \cdot \rangle + aH_r\langle \eta, p \rangle\} dM = 0, \quad (3.4)$$

$$\int_M \{H_{s-1}\langle x, \cdot \rangle + aH_r\langle \eta, p \rangle\} dM = 0. \quad (3.5)$$

现在, 从 (3.4) 式和 (3.5) 式立即写下

$$\int_M \{aH_{r-1} - H_{s-1}\}\langle x, p \rangle dM = 0. \quad (3.6)$$

注意到 (3.1) 式, 事实上在 M^n 上恒有

$$aH_{r-1} - H_{s-1} \geq 0. \quad (3.7)$$

引理 2.4 的积分公式中的向量 $p \in R^{n+2}$ 是可以任意取定的, 并且 H^{n+1} 是典型嵌入在 R^{n+2} 的上半空间中, 故可以适当选定 $p \in R^{n+2}$ 使得下式成立

$$\langle x, p \rangle > 0, \forall x \in M^n. \quad (3.8)$$

至此, 由 (3.6)、(3.7) 和 (3.8) 式, 在 M^n 上恒有

$$aH_{r-1} - H_{s-1} \equiv 0. \quad (3.9)$$

再由 (3.1) 式和 (3.9) 式, 在 M^n 上恒有

$$H_{r-1}^2 \equiv H_r H_{r-2}. \quad (3.10)$$

最后, 从 (3.10) 式及引理 2.3 立即知道, M^n 是全脐的.

参 考 文 献

- [1] Bivens I. Integral formulas and hypersurfaces in a simply connected space form[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1983, 88(1): 113–118.
- [2] Koh Sung-Eun. A characterization of round spheres[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1998, 126(12): 3557–3660.
- [3] 王琪. 正曲率空间形式中超曲面的全脐性与高阶平均曲率 [J]. 数学学报, 2014, 57(1): 47–50.
- [4] Beckenbach E F, Bellman R. Inequalities[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1971.
- [5] 韩英波, 冯书香. 双曲空间 $H^{n+1}(-1)$ 中完备超曲面 (英文)[J]. 数学杂志, 2013, 33(5): 10–15.
- [6] 韩英波, 冯书香. 双曲空间形式中具有常平均曲率的超曲面 (英文)[J]. 数学杂志, 2014, 34(4): 34–40.

TOTALLY UMBILICAL HYPERSURFACES IN THE HYPERBOLA SPACE FORM AND HIGHER ORDER MEAN CURVATURES

WANG Qi

(School of Mathematics and Information Science, Guiyang University, Guiyang 550005, China)

Abstract: In this paper, we study the totally umbilical property of hyper-surfaces in the hyperbola space form and higher order mean curvatures. Under a weaker condition on higher mean curvatures, we give a new theorem to improve and generalize some recent results in the research field.

Keywords: totally umbilical hyper-surface; higher order mean curvature; hyperbola space form

2010 MR Subject Classification: 53C20; 53C40