Vol. 37 (2017)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一个供应链系统可靠性模型时间依赖解的渐近行为

阿力木 · 米吉提
(新疆广播电视大学远程教育学院, 新疆 乌鲁木齐 830049)

摘 要: 本文研究一个供应链系统可靠性模型的时间依赖解. 利用 C_0 - 半群理论研究该模型相应算子的谱的特征, 获得了该系统模型时间依赖解的渐近行为, 推广了文献 [8] 中的结果.

关键词: 供应链系统; 特征值; 豫解集; 几何重数
MR(2010) **主题分类号**: 47A10; 47N20 **中图分类号**: O177.7
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2017)01-0201-10

1 引言

在全球化趋势下, 对于供应链这个日益复杂的系统, 如何分析和提高其可靠性变得日益迫切, 并受到越来越多的关注 [1−6,8]. Thomas 于 2002 年首次将可靠性工程应用到供应链中, 提出用可靠度来度量供应链系统的可靠性 [3]. Sohn 等认为供应链的可靠性就是顾客要求的产品质量可靠性 [4]. 王建、张文杰从单级供应链可靠性分析出发进行了可靠性的定量分析, 并根据分析结果提出了一些提高供应链可靠性的措施 [5]. 在文献 [6] 中作者通过分析供应链系统的状态之间的转移关系, 引入补充变量, 用补充变量法 [7], 建立了供应链系统的可靠性模型, 并对该模型系统解的存在唯一性进行讨论和证明. 在文献 [8] 中当修复率为常数时讨论系统解的渐近性质. 本文在文献 [6] 的基础上当修复率为函数时, 通过研究相应算子的谱的特征得到该系统时间依赖解的渐近行为.

2 供应链系统模型的转换

由文献 [6] 知道, 该供应链系统的数学模型用以下方程组描述:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\sum_{i=1}^{4}\lambda_i p_0(t) + \sum_{i=1}^{4}\int_0^\infty p_i(x,t)\mu_i(x)dx, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial p_i(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial p_i(x,t)}{\partial x} = -\mu_i(x)p_i(x,t),\ \ i=1,2,3,4, \tag{2.2}$$

$$p_i(0,t) = \lambda_i p_0(t),\ \ i=1,2,3,4, \tag{2.3}$$

$$p_0(0)=1,\ p_i(x,0)=0,\ \ i=1,2,3,4, \tag{2.4}$$

其中 $(x,t)\in[0,\infty)\times[0,\infty)$; $p_0(t)$ 表示在时刻 t 供应链系统正常运作的概率; $p_i(x,t)dx$ $(i=$

*收稿日期: 2014-04-23 接收日期: 2014-11-24
基金项目: 新疆少数民族科技人才特殊培养计划科研项目资助 (2016D0211).
作者简介: 阿力木 · 米吉提 (1978–), 男, 维吾尔族, 新疆阿克陶, 副教授, 主要研究方向: 可靠性模型的动态分析.

$1,2,3,4)$ 表示在时刻 t 供应链系统处于故障状态 i $(i=1,2,3,4)$, 在该状态已经驻留了 x 时间, 在 $(x,x+dx]$ 离开故障状态的概率; λ_i $(i=1,2,3,4)$ 是从正常运作状态到状态 $i\,(i=1,2,3,4)$ 的失效率; $\mu_i(x)$ $(i=1,2,3,4)$ 表示供应链系统离开状态 $i\,(i=1,2,3,4)$ 的修复率.

取状态空间为

$$X=\left\{p\in\mathbb{R}\times\left(L^1[0,\infty)\right)^4 \;\middle|\; \|p\|=|p_0|+\sum_{i=1}^{4}\|p_i\|_{L^1[0,\infty)}\right\}.$$

显然, X 是一个 Banach 空间 [9]. 为简单起见, 定义

$$\begin{aligned}
&B_if(x)=-\frac{df(x)}{dx}-\mu_i(x)f(x),\quad f\in W^{1,1}[0,\infty),\ \ i=1,2,3,4,\\
&\phi_ig(x)=\int_0^\infty g(x)\mu_i(x)dx,\quad g\in L^1[0,\infty),\ \ i=1,2,3,4,\\
&\Lambda=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4,
\end{aligned}$$

则可以定义算子 A_m 和它的定义域 $D(A_m)$ 为

$$A_mp=\begin{pmatrix}-\Lambda & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4\\ 0 & B_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & B_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & B_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_0\\ p_1(x)\\ p_2(x)\\ p_3(x)\\ p_4(x)\end{pmatrix},$$

$$D(A_m)=\left\{p\in X\;\middle|\;\frac{dp_i(x)}{dx}\in L^1[0,\infty),p_i(x)\text{ 是绝对连续函数},i=1,2,3,4\right\}.$$

选取 X 的边界空间 $\partial X:=\mathbb{C}^4$, 并且定义边界算子 $L:D(A_m)\to\partial X$ 与 $\Phi:D(A_m)\to\partial X$ 如下:

$$Lp=\begin{pmatrix}p_1(0)\\ p_2(0)\\ p_3(0)\\ p_4(0)\end{pmatrix},\quad \Phi p=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_0\\ p_1(x)\\ p_2(x)\\ p_3(x)\\ p_4(x)\end{pmatrix}.$$

如果定义算子 $(A,D(A))$ 为 $Ap=A_mp,\ \ D(A)=\{p\in D(A_m)\,|Lp=\Phi p\}$, 那么方程 (2.1)–(2.4) 可以描述为Banach 空间 X 上的抽象 Cauchy 问题:

$$\begin{cases}\frac{dp(t)}{dt}=Ap(t),\quad t\in[0,\infty),\\ p(0)=(1,0,0,0,0).\end{cases}\tag{2.5}$$

在文献 [6] 中作者得到了以下结果.

定理 2.1 算子 $(A,D(A))$ 生成一个正压缩 C_0 - 半群 $T(t)$. 系统 (2.5) 存在唯一的正时间依赖解 $p(x,t)=T(t)p(0)$, 并且满足

$$\|p(\cdot,t)\|=p_0(t)+\sum_{i=1}^{4}\int_0^\infty p_i(x,t)dx=1,\ \forall t\in[0,\infty).$$

3 系统 (2.5) 相应算子的谱特征

引理 3.1 0 是 A 的几何重数为 1 的特征值.

证 讨论方程 $Ap=0$, 即

$$\Lambda p_0=\sum_{i=1}^{4}\int_0^{\infty}p_i(x)\mu_i(x)dx, \tag{3.1}$$

$$\frac{dp_i(x)}{dx}=-\mu_i(x)p_i(x),\quad i=1,2,3,4, \tag{3.2}$$

$$p_i(0)=\lambda_i p_0,\quad i=1,2,3,4. \tag{3.3}$$

解 (3.2) 有

$$p_i(x)=a_i e^{-\int_0^x \mu_i(\xi)d\xi},\quad i=1,2,3,4. \tag{3.4}$$

(3.4) 式结合 (3.3) 式推出

$$a_i=p_i(0)=\lambda_i p_0,\quad i=1,2,3,4. \tag{3.5}$$

由 (3.4) 与 (3.5) 式算出

$$\|p\|=|p_0|+\sum_{i=1}^{4}\|p_i\|_{L^1[0,\infty)}=\left(1+\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\int_0^{\infty}e^{-\int_0^x \mu_i(\xi)d\xi}dx\right)|p_0|<\infty.$$

这说明 0 是 A 的特征值. 由 (3.1), (3.4), (3.5) 式知道对应于 0 的特征向量空间是一维的线性空间, 即 0 的几何重数为 1. 证毕.

下面研究 A 的豫解集. 为此首先定义算子 $(A_0,D(A_0))$ 并研究它的豫解集; 其次通过考虑 $(\gamma I-A_m)$ 的核来定义 Dirichlet 算子 D_γ 并推出 ΦD_γ 的表达式; 然后用文献 [10] 中的结果得到 A 的豫解集, 从而推出本文的主要结果.

定义算子 $(A_0,D(A_0))$ 为

$$A_0p=A_mp,\quad D(A_0)=\{p\in D(A_m)|Lp=0\},$$

那么对任意 $y\in X$, 考虑方程 $(\gamma I-A_0)p=y$, 这等价于

$$[\gamma+\Lambda]p_0=\sum_{i=1}^{4}\int_0^{\infty}p_i(x)\mu_i(x)dx+y_0, \tag{3.6}$$

$$\frac{dp_i(x)}{dx}=-[\gamma+\mu_i(x)]p_i(x)+y_i(x),\quad i=1,2,3,4, \tag{3.7}$$

$$p_i(0)=0,\quad i=1,2,3,4. \tag{3.8}$$

解 (3.6) 与 (3.7) 推出

$$p_0=\frac{1}{\gamma+\Lambda}\left\{y_0+\sum_{i=1}^{4}\int_0^{\infty}\mu_i(x)e^{-\gamma x-\int_0^x\mu_i(\xi)d\xi}\int_0^x y_i(\tau)e^{\gamma\tau+\int_0^\tau\mu_i(\xi)d\xi}d\tau dx\right\}, \tag{3.9}$$

$$p_i(x)=e^{-\gamma x-\int_0^x\mu_i(\xi)d\xi}\int_0^x y_i(\tau)e^{\gamma\tau+\int_0^\tau\mu_i(\xi)d\xi}d\tau,\quad i=1,2,3,4. \tag{3.10}$$

$\forall f \in L^1[0,\infty)$, 若记

$$E_i f(x) = e^{-\gamma x - \int_0^x \mu_i(\xi)d\xi} \int_0^x f(\tau) e^{\gamma\tau + \int_0^\tau \mu_i(\xi)d\xi} d\tau, \quad i = 1,2,3,4,$$

那么 (3.9) 与 (3.10) 式变为

$$\begin{aligned} &p_0 = \frac{1}{\gamma+\Lambda}(y_0 + \phi_1 E_1 y_1(x) + \phi_2 E_2 y_2(x) + \phi_3 E_3 y_3(x) + \phi_4 E_4 y_4(x)), \\ &p_i(x) = E_i y_i(x), \quad i = 1,2,3,4. \end{aligned}$$

即

$$(\gamma I - A_0)^{-1} y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma+\Lambda} & \frac{1}{\gamma+\Lambda}\phi_1 E_1 & \frac{1}{\gamma+\Lambda}\phi_2 E_2 & \frac{1}{\gamma+\Lambda}\phi_3 E_3 & \frac{1}{\gamma+\Lambda}\phi_4 E_4 \\ 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \\ y_4(x) \end{pmatrix}.$$

由上述表达式和豫解集的定义可得以下结论.

引理 3.2 设 $\mu_i(x): [0,\infty) \to [0,\infty) (i = 1,2,3,4)$ 是可测函数, 若

$$0 < \underline{\mu} = \inf_{\substack{x \in [0,\infty) \\ 1 \le i \le 4}} \mu_i(x) \le \sup_{\substack{x \in [0,\infty) \\ 1 \le i \le 4}} \mu_i(x) = \overline{\mu} < \infty,$$

则 $\left\{\gamma \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Re}\gamma + \underline{\mu} > 0\right\} \subset \rho(A_0)$.

证 对任意的 $f \in L^1[0,\infty)$ 用分部积分法估计出

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |E_i f(x)| dx &= \int_0^\infty \left| e^{-\gamma x - \int_0^x \mu_i(\xi)d\xi} \int_0^x f(\tau) e^{\gamma\tau + \int_0^\tau \mu_i(\xi)d\xi} d\tau \right| dx \\ &\le \int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}\gamma x - \int_0^x \mu_i(\xi)d\xi} \int_0^x e^{\mathrm{Re}\gamma\tau + \int_0^\tau \mu_i(\xi)d\xi} |f(\tau)| d\tau dx \\ &= \int_0^\infty \frac{-1}{\mathrm{Re}\gamma + \mu_i(x)} \left(\int_0^x e^{\mathrm{Re}\gamma\tau + \int_0^\tau \mu_i(\xi)d\xi} |f(\tau)| d\tau \right) de^{-\mathrm{Re}\gamma x - \int_0^x \mu_i(\xi)d\xi} \\ &\le \frac{-1}{\mathrm{Re}\gamma + \underline{\mu}} \left\{ e^{-\mathrm{Re}\gamma x - \int_0^x \mu_i(\xi)d\xi} \times \left(\int_0^x e^{\mathrm{Re}\gamma\tau + \int_0^\tau \mu_i(\xi)d\xi} |f(\tau)| d\tau \right) \Bigg|_{x=0}^{x=\infty} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}\gamma x - \int_0^x \mu_i(\xi)d\xi} e^{\mathrm{Re}\gamma x + \int_0^x \mu_i(\xi)d\xi} |f(x)| dx \right\} \\ &= \frac{1}{\mathrm{Re}\gamma + \underline{\mu}} \|f\|_{L^1[0,\infty)} \\ &\Rightarrow \\ \|E_i\| &\le \frac{1}{\mathrm{Re}\gamma + \underline{\mu}}, \quad i = 1,2,3,4. \end{aligned} \tag{3.11}$$

对任意的 $y \in X$, 由条件 $\mathrm{Re}\gamma + \underline{\mu} > 0$ 与 (3.11) 式推出

$$\begin{aligned}
&\|(\gamma I - A_0)^{-1} y\| \\
=&\left\| \left(\frac{1}{\gamma + \Lambda}(y_0 + \phi_1 E_1 y_1 + \phi_2 E_2 y_2 + \phi_3 E_3 y_3 + \phi_4 E_4 y_4), E_1 y_1, E_2 y_2, E_3 y_3, E_4 y_4 \right) \right\| \\
=&\left| \frac{1}{\gamma + \Lambda} \left(y_0 + \sum_{i=1}^{4} \phi_i E_i y_i \right) \right| + \sum_{i=1}^{4} \|E_i y_i\|_{L^1[0,\infty)} \\
\le& \frac{1}{|\gamma + \Lambda|}|y_0| + \frac{1}{|\gamma + \Lambda|} \sum_{i=1}^{4} \|\phi_i\| \|E_i\| \|y_i\|_{L^1[0,\infty)} + \sum_{i=1}^{4} \|E_i\| \|y_i\|_{L^1[0,\infty)} \\
\le& \frac{1}{|\gamma + \Lambda|}|y_0| + \frac{1}{|\gamma + \Lambda|} \sum_{i=1}^{4} \frac{\sup\limits_{x \in [0,\infty)} \mu_i(x)}{\mathrm{Re}\gamma + \underline{\mu}} \|y_i\|_{L^1[0,\infty)} + \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{\mathrm{Re}\gamma + \underline{\mu}} \|y_i\|_{L^1[0,\infty)} \\
\le& \sup \left\{ \frac{1}{|\gamma + \Lambda|},\ \frac{1}{|\gamma + \Lambda|} \frac{\overline{\mu}}{\mathrm{Re}\gamma + \underline{\mu}} + \frac{1}{\mathrm{Re}\gamma + \underline{\mu}} \right\} \|y\| < \infty.
\end{aligned}$$

此式说明引理的结论成立. 证毕.

引理 3.3　设 $\mu_i(x)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ 是可测函数, 且

$$0 < \underline{\mu} = \inf_{\substack{x \in [0,\infty) \\ 1 \le i \le 4}} \mu_i(x) \le \sup_{\substack{x \in [0,\infty) \\ 1 \le i \le 4}} \mu_i(x) = \overline{\mu} < \infty.$$

若 $\gamma \in \rho(A_0)$, 则

$$p \in \ker(\gamma I - A_m) \Longleftrightarrow$$

$$p_0 = \frac{1}{\gamma + \Lambda} \sum_{i=1}^{4} a_i \int_0^\infty \mu_i(x) e^{-\gamma x - \int_0^x \mu_i(\tau) d\tau} dx, \tag{3.12}$$

$$p_i(x) = a_i e^{-\gamma x - \int_0^x \mu_i(\tau) d\tau},\ |a_i| < \infty,\ i = 1, 2, 3, 4. \tag{3.13}$$

证　如果 $p \in \ker(\gamma I - A_m)$, 则 $(\gamma I - A_m)p = 0$, 这等价于

$$(\gamma + \Lambda) p_0 = \sum_{i=1}^{4} \int_0^\infty \mu_i(x) p_i(x) dx, \tag{3.14}$$

$$\frac{dp_i(x)}{dx} = -[\gamma + \mu_i(x)] p_i(x), i = 1, 2, 3, 4. \tag{3.15}$$

解 (3.15) 推出

$$p_i(x) = a_i e^{-\gamma x - \int_0^x \mu_i(\tau) d\tau},\ i = 1, 2, 3, 4. \tag{3.16}$$

将 (3.16) 式代入 (3.14) 式算出

$$p_0 = \frac{1}{\gamma + \Lambda} \sum_{i=1}^{4} a_i \int_0^\infty \mu_i(x) e^{-\gamma x - \int_0^x \mu_i(\tau) d\tau} dx. \tag{3.17}$$

由于 $p \in \ker(\gamma I - A_m)$, $p \in D(A_m)$, 所以用嵌入定理 [11] 得到

$$\begin{aligned}|a_i| &\le \sum_{i=1}^{4}|a_i| = \sum_{i=1}^{4}|p_i(0)| \le \sum_{i=1}^{4}\|p_i\|_{L^\infty[0,\infty)} \\ &\le \sum_{i=1}^{4}\|p_i\|_{L^1[0,\infty)} + \sum_{i=1}^{4}\left\|\frac{dp_i}{dx}\right\|_{L^1[0,\infty)} < \infty,\ i=1,2,3,4.\end{aligned} \tag{3.18}$$

(3.16)–(3.18) 式说明 (3.12) 与 (3.13) 式成立.

反之, 如果 (3.12), (3.13) 式成立, 则有

$$\begin{aligned}\|p_i\|_{L^1[0,\infty)} &\le |a_i|\int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}\gamma x-\int_0^x \mu_i(\tau)d\tau}dx \\ &\le |a_i|\int_0^\infty e^{-(\mathrm{Re}\gamma+\underline{\mu})x}dx = \frac{|a_i|}{\mathrm{Re}\gamma+\underline{\mu}},\ i=1,2,3,4 \\ &\Longrightarrow \\ |p_0| + \sum_{i=1}^{4}\|p_i\|_{L^1[0,\infty)} &\le \frac{1}{|\gamma+\Lambda|}\sum_{i=1}^{4}|a_i|\int_0^\infty \mu_i(x)e^{-\mathrm{Re}\gamma x-\int_0^x \mu_i(\tau)d\tau}dx + \sum_{i=1}^{4}\|p_i\|_{L^1[0,\infty)} \\ &\le \frac{1}{|\gamma+\Lambda|}\sum_{i=1}^{4}|a_i|\int_0^\infty \mu_i(x)e^{-\int_0^x \mu_i(\tau)d\tau}dx + \sum_{i=1}^{4}\frac{|a_i|}{\mathrm{Re}\gamma+\underline{\mu}} \\ &= \left(\frac{1}{|\gamma+\Lambda|}+\frac{1}{\mathrm{Re}\gamma+\underline{\mu}}\right)\sum_{i=1}^{4}|a_i| < \infty.\end{aligned} \tag{3.19}$$

由 (3.13) 式知道

$$\frac{dp_i(x)}{dx} = -a_i[\gamma+\mu_i(x)]e^{-\gamma x-\int_0^x \mu_i(\tau)d\tau},\ i=1,2,3,4,$$

从而有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}\left\|\frac{dp_i}{dx}\right\|_{L^1[0,\infty)} &\le \sum_{i=1}^{4}|a_i|\int_0^\infty |\gamma+\mu_i(x)|e^{-\mathrm{Re}\gamma x-\int_0^x \mu_i(\tau)d\tau}dx \\ &\le [\mathrm{Re}\gamma+\overline{\mu}+|\mathrm{Im}\gamma|]\sum_{i=1}^{4}|a_i|\int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}\gamma x-\int_0^x \mu_i(\tau)d\tau}dx < \infty.\end{aligned} \tag{3.20}$$

(3.19) 与 (3.20) 式表示 $p \in \ker(\gamma I - A_m)$. 证毕.

由于 L 是满射, 所以

$$L|_{\ker(\gamma I - A_m)} : \ker(\gamma I - A_m) \to \partial X$$

可逆. 如果 $\gamma \in \rho(A_0)$, 那么定义 Dirichlet 算子为

$$D_\gamma := \left(L|_{\ker(\gamma I - A_m)}\right)^{-1} : \partial X \to \ker(\gamma I - A_m).$$

由引理 3.3 知道 D_γ 的具体表达式为

$$D_\gamma\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4\\\delta_1&0&0&0\\0&\delta_2&0&0\\0&0&\delta_3&0\\0&0&0&\delta_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_i=\frac{1}{\gamma+\Lambda}\int_0^\infty\mu_i(x)\delta_i dx,\ \delta_i=e^{-\gamma x-\int_0^x\mu_i(\tau)d\tau},\ i=1,2,3,4.$

由 D_γ 的表达式和 Φ 的定义推出 ΦD_γ 的表达式

$$\Phi D_\gamma\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{11}&\varepsilon_{12}&\varepsilon_{13}&\varepsilon_{14}\\\varepsilon_{21}&\varepsilon_{22}&\varepsilon_{23}&\varepsilon_{24}\\\varepsilon_{31}&\varepsilon_{32}&\varepsilon_{33}&\varepsilon_{34}\\\varepsilon_{41}&\varepsilon_{42}&\varepsilon_{43}&\varepsilon_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix},\tag{3.21}$$

这里 $\varepsilon_{ij}=\frac{\lambda_i}{\gamma+\Lambda}\int_0^\infty\mu_j(x)e^{-\gamma x-\int_0^x\mu_j(\tau)d\tau}dx,\ i,j=1,2,3,4.$

在文献 [10] 中作者得到以下结果.

引理 3.4 设 $\gamma\in\rho(A_0)$ 且存在 $\gamma_0\in\mathbb{C}$ 使得 $1\notin\sigma(\Phi D_{\gamma_0})$, 则

$$\gamma\in\sigma(A)\Longleftrightarrow 1\in\sigma(\Phi D_\gamma).$$

结合引理 3.4 与文献 [12] 得到如下结论:

引理 3.5 设 $\mu_i(x)$ $(i=1,2,3,4)$ 是可测函数, 若

$$0<\underline{\mu}=\inf_{\substack{x\in[0,\infty)\\1\le i\le 4}}\mu_i(x)\le\sup_{\substack{x\in[0,\infty)\\1\le i\le 4}}\mu_i(x)=\overline{\mu}<\infty,$$

那么在虚轴上除了 0 外其他所有点都属于 A 的豫解集.

证 设 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$, $|a_k|<\infty$ $(k=1,2,3,4)$, 并且 $\gamma=ih,\ h\in R\backslash\{0\}$. 由 Riemann-Lebesgue 引理

$$\lim_{h\to\infty}\int_0^\infty f(x)\cos(hx)dx=0,\ \lim_{h\to\infty}\int_0^\infty f(x)\sin(hx)dx=0,\ f\in L^1[0,\infty),\ f(x)\ge0,$$

知道存在非负常数 $\mathcal{K}>0$ 使得对一切 $|h|>\mathcal{K}$ 有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\infty f(x)e^{ihx}dx\right|^2&=\left(\int_0^\infty f(x)\sin(hx)dx\right)^2+\left(\int_0^\infty f(x)\cos(hx)dx\right)^2\\&<\left(\int_0^\infty f(x)dx\right)^2\\&\Longrightarrow\end{aligned}$$

$$\left|\int_0^\infty f(x)e^{-ihx}dx\right|<\int_0^\infty f(x)dx.\tag{3.22}$$

从而对 $|h| > \mathcal{K}$, 由 (3.22) 式和 $\int_0^\infty b(x)e^{-\int_0^x b(\tau)d\tau}dx = 1$ 推出

$$\begin{aligned}
\|\Phi D_\gamma \overrightarrow{a}\| &\leq \frac{\Lambda}{|\gamma+\Lambda|}\sum_{i=1}^4 \left|\int_0^\infty \mu_i(x)e^{-\gamma x-\int_0^x \mu_i(\tau)d\tau}dx\right| |a_i| \\
&= \frac{\Lambda}{\sqrt{h^2+\Lambda^2}}\sum_{i=1}^4 \left|\int_0^\infty \mu_i(x)e^{-ihx-\int_0^x \mu_i(\tau)d\tau}dx\right| |a_i| \\
&< \sum_{i=1}^4 |a_i| \int_0^\infty \mu_i(x)e^{-\int_0^x \mu_i(\tau)d\tau}dx = \sum_{i=1}^4 |a_i| = \|\overrightarrow{a}\| \\
&\Longrightarrow \\
\|\Phi D_\gamma\| &< 1. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

(3.23) 式表明当 $|h| > \mathcal{K}$ 时谱半径 $r(\Phi D_\gamma) < \|\Phi D_\gamma\| < 1$, 这说明 $1 \notin \sigma(\Phi D_\gamma)$. 此结果结合引理 3.4 知道当 $|h| > \mathcal{K}$ 时有 $\gamma \notin \sigma(A)$, 即

$$\{ih \mid |h| > \mathcal{K}\} \subset \rho(A), \qquad \{ih \mid |h| \leq \mathcal{K}\} \subset \sigma(A) \cap i\mathbb{R}. \qquad (3.24)$$

另外由定理 2.1 与文献 [12] 中的推论 2.3 知道 $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ 是虚加法循环. 即

$$ih \in \sigma(A) \cap i\mathbb{R} \Rightarrow ihk \in \sigma(A) \cap i\mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}. \qquad (3.25)$$

从而由 (3.24), (3.25) 式与引理 3.1 推出 $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$. 证毕.

由文献 [13] 知道 X 的共轭空间为

$$X^* = \left\{ q^* \in \mathbb{R} \times (L^\infty[0,\infty))^4 \,\middle|\, |||q^*||| = \sup\left\{ |q_0^*|, \sup_{1\leq i\leq 4} \|q_i^*\|_{L^\infty[0,\infty)} \right\} \right\}.$$

容易证明 X^* 是一个 Banach 空间 [7]. 根据文献 [8] 知道 A 的共轭算子 A^* 为

$$A^*q^* = (\mathcal{L} + \mathcal{N})q^*, \quad q^* \in D(\mathcal{L}),$$

其中

$$\mathcal{L}q^* = \begin{pmatrix} -\Lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx}-\mu_1(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dx}-\mu_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dx}-\mu_3(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{dx}-\mu_4(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0^* \\ q_1^*(x) \\ q_2^*(x) \\ q_3^*(x) \\ q_4^*(x) \end{pmatrix},$$

$$D(\mathcal{L}) = \left\{ q^* \in X^* \,\middle|\, \frac{dq_i^*(x)}{dx} \text{ 存在且 } q_i^*(\infty) = \alpha,\ i = 1,2,3,4 \right\},$$

$$\mathcal{N}q^* = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \mu_1(x) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_2(x) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_3(x) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_4(x) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0^* \\ q_1^*(0) \\ q_2^*(0) \\ q_3^*(0) \\ q_4^*(0) \end{pmatrix}.$$

下面证明 0 是 A^* 的几何重数为 1 的特征值.

引理 3.6 0 是 A^* 的几何重数为 1 的特征值.

证 考虑方程 $A^*q^*=0$, 即

$$-\Lambda q_0^*+\sum_{i=1}^{4}\lambda_i q_i^*(0)=0, \tag{3.26}$$

$$\frac{dq_i^*(x)}{dx}-\mu_i(x)q_i^*(x)+\mu_i(x)q_0^*=0,\ i=1,2,3,4, \tag{3.27}$$

$$q_i^*(\infty)=\alpha,\ i=1,2,3,4. \tag{3.28}$$

解 (3.27) 有

$$q_i^*(x)=c_i e^{\int_0^x \mu_i(\tau)d\tau}-e^{\int_0^x \mu_i(\tau)d\tau}\int_0^x \mu_i(\tau)q_0^* e^{-\int_0^\tau \mu_i(\xi)d\xi}d\tau,\ i=1,2,3,4. \tag{3.29}$$

(3.29) 式两边同时乘 $e^{-\int_0^x \mu_i(\tau)d\tau}$, 并用 (3.28) 式推出

$$0=c_i-q_0^*\int_0^\infty \mu_i(\tau)e^{-\int_0^\tau \mu_i(\xi)d\xi}d\tau \Rightarrow c_i=q_0^*. \tag{3.30}$$

(3.30) 式代入 (3.29) 式可得

$$q_i^*(x)=q_0^* e^{\int_0^x \mu_i(\tau)d\tau}\left[1+\int_0^x e^{-\int_0^\tau \mu_i(\xi)d\xi}d\left(-\int_0^\tau \mu_i(\xi)d\xi\right)\right]=q_0^*,\ i=1,2,3,4. \tag{3.31}$$

(3.31) 式表明

$$|||q*|||=\sup\left\{|q_0^*|,\sup_{1\le i\le 4}\|q_i^*\|_{L^\infty[0,\infty)}\right\}=|q_0^*|<\infty\Rightarrow q^*\in X^*.$$

即 0 是 A^* 的特征值. 由 (3.31) 式看出对应于 0 的特征向量空间是 1 维的. 换句话说, 0 的几何重数为 1. 证毕.

4 系统 (2.5) 时间依赖解的渐近行为

结合定理 2.1, 引理 3.1, 引理 3.5, 引理 3.6 与文献 [14] 中的定理 14 推出本文的主要结论.

定理 4.1 设 $\mu_i(x)$ $(i=1,2,3,4)$ 是可测函数, 且满足

$$0<\underline{\mu}=\inf_{\substack{x\in[0,\infty)\\ 1\le i\le 4}}\mu_i(x)\le \sup_{\substack{x\in[0,\infty)\\ 1\le i\le 4}}\mu_i(x)=\overline{\mu}<\infty,$$

则系统 (2.5) 的时间依赖解强收敛于该系统的稳态解, 即

$$\lim_{t\to\infty}\|p(\cdot,t)-\beta p(\cdot)\|=0,$$

其中 $p(x)$ 是引理 3.1 中的特征向量.

参 考 文 献

[1] 周长礼, 高成修, 周伟刚, 翟建寿. 基于价格竞争的最优定价策略与供应链的协调方法 [J]. 数学杂志, 2010, 30(4): 682–688.

[2] 陈荣军, 羿旭明, 唐国春. 自由作业环境下的供应链排序 [J]. 数学杂志, 2009, 29(1): 81–86.

[3] Thomas M U. Supply chain reliability for contingency operations[C]. Rel. Maitain. Symp., 2002: 61–67.

[4] Shon S Y, Choi S. Fuzzy QFD for supply chain management with reliability consideration[J]. Reliab. Eng. Syst. Saf., 2001, 72(3): 327–334.

[5] 王建, 张文杰. 供应链系统可靠性分析 [J]. 中国安全科学学报, 2003, 13(11): 73–75.

[6] 辛玉红, 郑爱华, 胡薇薇. 一个供应链系统的可靠性模型的适定性分析 [J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(1): 46–52.

[7] Gaver D P. Time to failure and availability of parallel redundant stystems with repair[J]. IEEE Trans. Rel., 1963, 12: 30–38.

[8] 邢喜民, 王秀玲. 一个供应链系统的可靠性模型的解的渐近性质 [J]. 江南大学学报 (自然科学版), 2012, 11(1): 108–112.

[9] 阿力木 · 米吉提, 蔡玲霞. 第二种服务可选的 $M/M/1$ 排队模型状态空间及对偶空间的完备性 [J]. 新疆师范大学学报 (自然科学版), 2012, 31(2): 72–76.

[10] Haji A, Radl A. A semigroup approach to queueing systems[J]. Semigroup Forum, 2007, 75(3): 609–623.

[11] Adams R A. Sobolev spaces[M]. New York: Academic Press, 1975.

[12] Nagel R. One-parameter semigroups of positive operators[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1987.

[13] 定光桂. 巴拿赫空间引论 (第二版)[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[14] Gupur Geni, Li Xuezhi, Zhu Guangtian. Functional analysis method in queueing theory[M]. Hertfordshire: Res. Inform. Ltd., 2001.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE TIME-DEPENDENT SOLUTION OF THE RELIABILITY MODEL FOR THE SUPPLY CHAIN

ALIM Mijit

(*School of Distance Education, Xinjiang Radio & TV University, Urumqi 830049, China*)

Abstract: We study the time-dependent solution of the reliability model for the supply chain system. By using C_0-semigroup theory we study the spectral properties of the underlying operator corresponding to the system model and obtain the asymptotic behavior of the time-dependent solution of the system, which extends the results in [8].

Keywords: supply chain system; eigenvalue; resolvent set; geometric multiplicity

2010 MR Subject Classification: 47A10; 47N20