Vol. 37 (2017)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

具零阶耗散的双成分 Camassa-Holm 方程的整体解和爆破现象

朱师师, 臧林恩
(云南师范大学数学学院, 云南 昆明 650500)

摘 要: 本文研究了具零阶耗散的双成分 Camassa-Holm 方程的 Cauchy 问题. 由 Kato 定理得到局部适定性的结果, 然后研究了解的整体存在性和爆破现象.

关键词: 双成分 Camassa-Holm 方程; 零阶耗散; 局部适定性; 爆破; 整体存在性
MR(2010) **主题分类号**: 35G25; 35L05　　**中图分类号**: O175.29
文献标识码: A　　**文章编号**: 0255-7797(2017)01-0152-17

1 引言

近年来, Camassa-Holm 方程 (CH 方程)

$$m_t + \omega u_x + 2mu_x + m_x u = 0,\ \ m = u - u_{xx}$$

(其中 ω 是任意常数) 得到广泛关注. 它是一类描述浅水区域中单向传播波的运动模型. CH 方程是一类完全可积系统, 它有一对相应的 Lax 对 [1], 具有双 Hamilton 结构 [2]. 该方程由于其一些显著特征而被广泛关注. 当 $\omega = 0$ 时, 该方程具有形如 $u(x,t) = ce^{-|x-ct|}$ 的孤立波解 (其中 c 为任意常数). 当 $c \neq 0$ 时, 这种孤立波解在有限速度内行进, 且在波峰处不光滑 (它的一阶导含有一个跳跃间断点), 即出现了尖点, 又称孤立尖解 [3]. Constantin 等研究了该方程尖孤立子的稳定性和相互碰撞问题, 证实了这种孤立子和 KdV 方程的孤立子一样, 具有碰撞后不改变其形状和速度等性质. CH 方程另一显著特征, 既能描述孤立子又能描述波的破裂现象 [1,4]. CH 方程的短波极限形式就是 Hunter-Saxton (HS) 方程

$$u_{xxt} + 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} = 0,$$

该方程描述的是线状液态晶体波的传播.

CH 方程和 HS 方程有许多可积的多成分推广 [5−9], 其中最著名的是

$$\begin{cases} m_t + 2u_x m + um_x + \sigma\rho\rho_x = 0, & t > 0, x \in R, \\ \rho_t + (u\rho)_x = 0, & t > 0, x \in R, \end{cases}$$

其中 $m = u - u_{xx}, \sigma = \pm 1$, CH 方程可由 $\rho \equiv 0$ 得到. 它是一个完全可积系统. 在 文 [8] 中, Constantin 和 Ivanov 从浅水波理论的角度导出该系统, 并研究了它的整体解和某些爆破解. 最近, 该系统的数学性质被许多文章进一步研究, 例如 文 [5, 6, 8] 等.

*收稿日期: 2015-01-04　　接收日期: 2014-10-27
基金项目:国家自然科学基金资助 (10961029).
作者简介: 朱师师 (1989–), 女, 江西南昌, 主要研究方向: 偏微分方程.

在实际情况下, 能量耗散是自然界不可避免的现象, 这在波的传播过程中也经常发生, 因此研究耗散项对水波方程的影响是很有必要的. 早在 1970 年, Ott 和 Sudan 就研究了能量耗散对 KdV 方程的解的影响. 在 1988 年, Ghidaglia 把弱耗散的 KdV 方程作为有限维动力系统的一个模型, 来研究该方程解的长时间性态.

带耗散项的双成分 CH 方程具有如下形式

$$\begin{cases} m_t + 2u_x m + u m_x + \sigma\rho\rho_x + L(u) = 0, & t > 0, x \in R, \\ \rho_t + (u\rho)_x = 0, & t > 0, x \in R, \end{cases}$$

其中 $m = u - u_{xx}, \sigma = \pm 1$, $L(u)$ 是耗散项. 根据不同的物理背景, L 可以是一个微分算子或是一个拟微分算子. 本文研究下面具零阶耗散的双成分 CH 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} m_t + 2u_x m + u m_x + \lambda u = -\sigma\rho\rho_x, & t > 0, x \in R, \\ \rho_t + (u\rho)_x = 0, & t > 0, x \in R, \\ m(0,x) = m_0(x), & x \in R, \\ \rho(0,x) = \rho_0(x), & x \in R, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $m = u - u_{xx}, \sigma = \pm 1$, λ 是一个大于 0 的固定常数.

在第二节, 将应用 Kato 理论证明方程 (1.1) 的局部适定性. 在第三节研究方程 (1.1) 的解的爆破现象. 最后, 在第四节研究了方程 (1.1) 的整体解.

下面给出本文常用的一些记号. 用 $\|\cdot\|_{H^s}$, $\|\cdot\|_{L^\infty}$, $\|\cdot\|_{L^p}$ 分别表示 $H^s(R)$, $L^\infty(R)$, $L^p(R)$ 空间的范数; $(\cdot,\cdot)_s$ 表示 $H^s(R)$ 空间的内积; $\|\cdot\|_X$ 表示 Banach 空间 X 上的范数.

2 局部适定性

本节用 Kato 定理证明出方程 (1.1) 的解的局部适定性定理. 先叙述 Kato 定理, 考虑抽象的拟线性发展方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + A(v)v = f(v),\ t \geq 0,\ v(0) = v_0. \tag{2.1}$$

设 X, Y 是两个 Hilbert 空间, Y 连续嵌入到 X, 且嵌入是稠密的, 从 Y 到 X 有一个微分同胚 $Q: Y \to X$, $\|\cdot\|_X$ 和 $\|\cdot\|_Y$ 表示 Banach 空间 X, Y 的范数, $L(Y,X)$ 表示从 Y 到 X 的全体有界线性算子空间 (当 $X = Y$ 时, 记为 $L(X)$). 假设

(i) $\forall y \in Y$, $A(y) \in L(Y,X)$, 且

$$\|(A(y) - A(z))w\|_X \leq \mu_1 \|y - z\|_X \|w\|_Y,\ \ y, z, w \in Y,$$

且 $\exists \beta \in R, A(y) \in G(X, 1, \beta)$ 在 Y 上一致有界.

(ii) $QA(y)Q^{-1} = A(y) + B(y)$, 其中 $B(y) \in L(X)$ 在 Y 上一致有界, 且

$$\|(B(y) - B(z))w\|_X \leq \mu_2 \|y - z\|_Y \|w\|_X,\ \ y, z \in Y, w \in X.$$

(iii) $f: Y \to Y$ 在 Y 上一致有界, 且

$$\|f(y) - f(z)\|_Y \leq \mu_3 \|y - z\|_Y,\ \ y, z \in Y,$$
$$\|f(y) - f(z)\|_X \leq \mu_4 \|y - z\|_X,\ \ y, z \in Y,$$

这里 μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 是仅依赖于 $\max\{\|y\|_Y, \|z\|_Y\}$ 的常数.

定理 2.1 [10] 在条件 (i)–(iii) 下, 对于 $v_0 \in Y$, 存在一个仅依赖于 $\|v_0\|_Y$ 的最大时间 $T > 0$, 使得方程 (1.1) 在 [0,T) 存在唯一解 v , 并满足 $v = v(\cdot, v_0) \in C([0,T);Y) \cap C^1([0,T);X)$, 且映射 $v_0 \to v(\cdot, v_0)$ 从 Y 到 $C([0,T);Y) \cap C^1([0,T);X)$ 是连续的.

下面将方程 (1.1) 变形, 以便应用 Kato 定理证明其解的局部适定性. 注意在流体动力学的推导过程中, 当 $|x| \to \infty$ 时, $u(t,x) \to 0, \rho(t,x) \to 1$, $\forall t \in R$. 令 $\bar\rho = \rho - 1$, 则当 $|x| \to \infty$ 时, $\bar\rho \to 0$. 取 $\sigma = 1$, 方程 (1.1) 化为

$$\begin{cases} u_t - u_{txx} + 3uu_x + \lambda u = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} - \bar\rho\bar\rho_x - \bar\rho_x, & t > 0, x \in R, \\ \bar\rho_t + u\bar\rho_x = -u_x\bar\rho - u_x, & t > 0, x \in R, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in R, \\ \bar\rho(0,x) = \bar\rho_0(x), & x \in R, \end{cases} \tag{2.2}$$

注意, 若令 $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, x \in R$, 则有 $(1-\partial_x^2)^{-1} f = p * f, \forall f \in L^2(R)$, 且 $p * m = u$, 其中定义 $*$ 为卷积符号. 应用这两个恒等式, 可将方程 (2.2) 化为

$$\begin{cases} u_t + uu_x = -\partial_x p * (u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}\bar\rho^2 + \bar\rho + \lambda u_x) - \lambda u, & t > 0, x \in R, \\ \bar\rho_t + u\bar\rho_x = -u_x\bar\rho - u_x, & t > 0, x \in R, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in R, \\ \bar\rho(0,x) = \bar\rho_0(x), & x \in R, \end{cases} \tag{2.3}$$

或

$$\begin{cases} u_t + uu_x = -\partial_x (1-\partial_x^2)^{-1} (u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}\bar\rho^2 + \bar\rho + \lambda u_x) - \lambda u, & t > 0, x \in R, \\ \bar\rho_t + u\bar\rho_x = -u_x\bar\rho - u_x, & t > 0, x \in R, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in R, \\ \bar\rho(0,x) = \bar\rho_0(x), & x \in R. \end{cases} \tag{2.4}$$

定理 2.2 设 $z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ \bar\rho_0 \end{pmatrix} \in H^s \times H^{s-1}, s \geq 2$, 则存在一个最大时间 $T = T(\|z_0\|_{H^s \times H^{s-1}}) > 0$, 使得方程 (2.3) 在区间 [0,T) 存在唯一解 $z = \begin{pmatrix} u \\ \bar\rho \end{pmatrix}$, 并满足

$$z = z(\cdot, z_0) \in C([0,T); H^s \times H^{s-1}) \cap C^1([0,T); H^{s-1} \times H^{s-2}),$$

且解连续依赖于初值 z_0, 即映射

$$z_0 \to z(\cdot, z_0) : H^s \times H^{s-1} \to C([0,T); H^s \times H^{s-1}) \cap C^1([0,T); H^{s-1} \times H^{s-2})$$

是连续的.

设 $z = \begin{pmatrix} u \\ \bar\rho \end{pmatrix} \in H^s \times H^{s-1}$, $A(z) = \begin{pmatrix} u\partial_x & 0 \\ 0 & u\partial_x \end{pmatrix}$ 和

$$f(z) = \begin{pmatrix} -\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}\bar\rho^2 + \bar\rho + \lambda u_x) - \lambda u \\ -u_x\bar\rho - u_x \end{pmatrix}.$$

又设 $Y = H^s \times H^{s-1}, X = H^{s-1} \times H^{s-2}, \Lambda = (1-\partial_x^2)^{\frac{1}{2}}$ 和 $Q = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}$. 显然, Q 是 $H^s \times H^{s-1}$ 到 $H^{s-1} \times H^{s-2}$ 上的一个同胚映射. 为证明定理 2.2, 仅需要证明 $A(z)$ 和 $f(z)$ 满足 Kato 定理中的条件 (i)–(iii).

下面将定理 2.2 的证明分成几个引理完成.

引理 2.1 [11] 设 X_1 和 X_2 是 Banach 空间, 且 $A_i \in G(X_i, 1, \beta),\ \ i=1,2$, 则算子

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in G(X_1 \times X_2, 1, \beta),$$

其中 $D(A) = D(A_1) \times D(A_2)$.

引理 2.2 [5,12] 设 $u \in H^s, s \geq 2$, 则算子 $A(u) = u\partial_x \in G(H^{s-1}, 1, \beta)$.

由引理 2.1–2.2 得到

引理 2.3 设 $z \in H^s \times H^{s-1}, s \geq 2$, 则算子 $A(z) = \begin{pmatrix} u\partial_x & 0 \\ 0 & u\partial_x \end{pmatrix} \in G(H^{s-1} \times H^{s-2}, 1, \beta)$.

引理 2.4 [7,8] 设 $A(z) = \begin{pmatrix} u\partial_x & 0 \\ 0 & u\partial_x \end{pmatrix}, z \in H^s \times H^{s-1}, s \geq 2$, 则 $A(z) \in L(H^s \times H^{s-1}, H^{s-1} \times H^{s-2})$, 且满足

$$\|(A(y)-A(z))w\|_{H^{s-1}\times H^{s-2}} \leq \mu_1 \|y-z\|_{H^{s-1}\times H^{s-2}} \|w\|_{H^s \times H^{s-1}},\ \ \forall y,z,w \in H^s \times H^{s-1}.$$

引理 2.5 [7,8] 设 $B(z) = QA(z)Q^{-1} - A(y), z \in H^s \times H^{s-1}, s \geq 2$, 则

$$\|(B(z)-B(y))w\|_{H^{s-1}\times H^{s-2}} \leq \mu_2 \|y-z\|_{H^s\times H^{s-1}} \|w\|_{H^{s-1} \times H^{s-2}},$$

$\forall y, z \in H^s \times H^{s-1}, w \in H^{s-1} \times H^{s-2}$.

引理 2.6 [10] 设 r, t 为满足 $-r < t \leq r$ 的实数, 则

$$\|fg\|_{H^t} \leq c\|f\|_{H^r}\|g\|_{H^t},\ \ r > \frac{1}{2},\ \ \|fg\|_{H^{t+r-\frac{1}{2}}} \leq c\|f\|_{H^r}\|g\|_{H^t},\ \ r < \frac{1}{2},$$

其中 c 只为依赖于 r, t 的正常数.

现证明在定理 2.2 中 f 满足条件 (iii).

引理 2.7 设 $z \in H^s \times H^{s-1}, s \geq 2$,

$$f(z) = \begin{pmatrix} -\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}\bar\rho^2 + \bar\rho + \lambda u_x) - \lambda u \\ -u_x\bar\rho - u_x \end{pmatrix},$$

则 f 在 $H^s \times H^{s-1}$ 上有界, 且满足

(a) $\|f(y)-f(z)\|_{H^s\times H^{s-1}} \leq \mu_3 \|y-z\|_{H^s\times H^{s-1}},\ \ y,z \in H^s \times H^{s-1}$,

(b) $\|f(y)-f(z)\|_{H^{s-1}\times H^{s-2}} \leq \mu_4 \|y-z\|_{H^{s-1}\times H^{s-2}},\ \ y,z \in H^s \times H^{s-1}$.

证 设 $y,z\in H^s\times H^{s-1}$, $s\geq 2$. 注意 H^{s-1} 是 Banach 代数, 则

$$\begin{aligned}
&\|f(y)-f(z)\|_{H^s\times H^{s-1}}\\
\leq&\|(y_1^2-u^2)+\frac{1}{2}(y_{1,x}^2-u_x^2)+\frac{1}{2}(y_2^2-\bar\rho^2)+(y_2-\bar\rho)+\lambda(y_{1,x}-u_x)\|_{H^{s-1}}\\
&+\|\lambda(y_1-u)\|_{H^s}+\|u_x\bar\rho-y_{1,x}y_2\|_{H^{s-1}}+\|y_{1,x}-u_x\|_{H^{s-1}}\\
\leq&\|y_1-u\|_{H^{s-1}}\|y_1+u\|_{H^{s-1}}+\frac{1}{2}\|y_1-u\|_{H^s}\|y_1+u\|_{H^s}\\
&+\frac{1}{2}\|y_2-\bar\rho\|_{H^{s-1}}\|y_2+\bar\rho\|_{H^{s-1}}+\|y_2-\bar\rho\|_{H^{s-1}}+2\lambda\|y_1-u\|_{H^s}\\
&+\|u_x\bar\rho-u_xy_2\|_{H^{s-1}}+\|u_xy_2-y_{1,x}y_2\|_{H^{s-1}}+\|y_1-u\|_{H^s}\\
\leq&(\|y\|_{H^s\times H^{s-1}}+\|z\|_{H^s\times H^{s-1}})\|y-z\|_{H^s\times H^{s-1}}\\
&+\frac{1}{2}(\|y\|_{H^s\times H^{s-1}}+\|z\|_{H^s\times H^{s-1}})\|y-z\|_{H^s\times H^{s-1}}\\
&+\frac{1}{2}(\|y\|_{H^s\times H^{s-1}}+\|z\|_{H^s\times H^{s-1}})\|y-z\|_{H^s\times H^{s-1}}+(2\lambda+1)\|y-z\|_{H^s\times H^{s-1}}\\
&+\|z\|_{H^s\times H^{s-1}}\|y-z\|_{H^s\times H^{s-1}}+\|y\|_{H^s\times H^{s-1}}\|y-z\|_{H^s\times H^{s-1}}+\|y-z\|_{H^s\times H^{s-1}}\\
=&(3\|y\|_{H^s\times H^{s-1}}+3\|z\|_{H^s\times H^{s-1}}+2\lambda+2)\|y-z\|_{H^s\times H^{s-1}}.
\end{aligned}$$

这就完成了对 (a) 式的证明. 其中, 在上述不等式中令 $y=0$, 就能够得到 f 在 $H^s\times H^{s-1}$ 上是有界的.

接下来证明 (b) 式,

$$\begin{aligned}
&\|f(y)-f(z)\|_{H^{s-1}\times H^{s-2}}\\
\leq&\|(y_1-u)(y_1+u)\|_{H^{s-2}}+\frac{1}{2}\|(y_{1,x}-u_x)(y_{1,x}+u_x)\|_{H^{s-2}}+\frac{1}{2}\|(y_2-\bar\rho)(y_2+\bar\rho)\|_{H^{s-2}}\\
&+\|y_2-\bar\rho\|_{H^{s-2}}+\lambda\|(y_{1,x}-u_x)\|_{H^{s-2}}+\lambda\|y_1-u\|_{H^{s-1}}+\|u_x(\bar\rho-y_2)\|_{H^{s-2}}\\
&+\|(u_x-y_{1,x})y_2\|_{H^{s-2}}+\|y_{1,x}-u_x\|_{H^{s-2}}\\
\leq&c\|y_1-u\|_{H^{s-1}}\|y_1+u\|_{H^{s-2}}+\frac{c}{2}\|y_{1,x}-u_x\|_{H^{s-2}}\|y_{1,x}+u_x\|_{H^{s-1}}\\
&+\frac{c}{2}\|y_2-\bar\rho\|_{H^{s-2}}\|y_2+\bar\rho\|_{H^{s-1}}+\|y_2-\bar\rho\|_{H^{s-2}}+2\lambda\|y_1-u\|_{H^{s-1}}\\
&+c\|u_x\|_{H^{s-1}}\|y_2-\bar\rho\|_{H^{s-2}}+c\|y_2\|_{H^{s-1}}\|y_{1,x}-u_x\|_{H^{s-2}}+\|y_1-u\|_{H^{s-1}}\\
\leq&c(\|y\|_{H^s\times H^{s-1}}+\|z\|_{H^s\times H^{s-1}})\|y-z\|_{H^{s-1}\times H^{s-2}}\\
&+\frac{c}{2}(\|y\|_{H^s\times H^{s-1}}+\|z\|_{H^s\times H^{s-1}})\|y-z\|_{H^{s-1}\times H^{s-2}}\\
&+\frac{c}{2}(\|y\|_{H^s\times H^{s-1}}+\|z\|_{H^s\times H^{s-1}})\|y-z\|_{H^{s-1}\times H^{s-2}}+(2\lambda+1)\|y-z\|_{H^{s-1}\times H^{s-2}}\\
&+c\|z\|_{H^s\times H^{s-1}}\|y-z\|_{H^{s-1}\times H^{s-2}}+c\|y\|_{H^s\times H^{s-1}}\|y-z\|_{H^{s-1}\times H^{s-2}}+\|y-z\|_{H^{s-1}\times H^{s-2}}\\
=&(3c\|y\|_{H^s\times H^{s-1}}+3c\|z\|_{H^s\times H^{s-1}}+2\lambda+2)\|y-z\|_{H^{s-1}\times H^{s-2}}.
\end{aligned}$$

上述估计过程中需用到引理 2.6 ($r=s-1,t=s-2$ 的情形). 于是 (b) 式得证.

综合引理 2.1–2.5 和引理 2.7, 应用定理 2.1, 定理 2.2 得证.

3 爆破

这节中将证明方程 (2.2) 解爆破的充要条件, 并给出导致解发生爆破的两个充分条件.

引理 3.1 [13] 若 $r>0$, 则 $H^r\cap L^\infty$ 是 Banach 代数, 且

$$\|fg\|_{H^r}\leq c(\|f\|_{L^\infty}\|g\|_{H^r}+\|f\|_{H^r}\|g\|_{L^\infty}),$$

其中 c 只为依赖于 r 的常数.

引理 3.2 [13] 若 $r>0$, 则

$$\|[\Lambda^r,f]g\|_{L^2}\leq c(\|\partial_x f\|_{L^\infty}\|\Lambda^{r-1}g\|_{L^2}+\|\Lambda^r f\|_{L^2}\|g\|_{L^\infty}),$$

其中 c 只为依赖于 r 的常数.

引理 3.3 设 $z_0=\begin{pmatrix}u_0\\ \bar\rho_0\end{pmatrix}\in H^s\times H^{s-1}, s\geq 2$, 且 $T>0$ 是方程 (2.2) 相应解 $z=(u,\bar\rho)$ 的最大存在时间, 则 $\forall t\in[0,T)$, 有

$$E(t)=\int_R(u^2+u_x^2+\bar\rho^2)dx\leq\int_R(u_0^2+u_{0,x}^2+\bar\rho_0^2)dx,\ \ \forall t\in[0,T), \tag{3.1}$$

且

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty}^2\leq\frac{1}{2}(\|u_0\|_{H^1}^2+\|\bar\rho_0\|_{L^2}^2). \tag{3.2}$$

证 运用定理 2.2 及稠密性定理, 只需证明上述定理对某个 $s\geq 2$ 成立即可. 这里假设 $s=3$ 来证明上述定理, 在方程 (2.3) 中, 对第一个方程关于 x 求偏导, 再运用恒等式 $\partial_x^2p*f=p*f-f$, 得到

$$u_{tx}+uu_{xx}+\frac{1}{2}u_x^2=u^2+\frac{1}{2}\bar\rho^2+\bar\rho-p*(u^2+\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}\bar\rho^2+\bar\rho+\lambda u_x), \tag{3.3}$$

其中 $f=u^2+\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}\bar\rho^2+\bar\rho+\lambda u_x$, 根据方程 (2.3) 及 (3.3) 式, 再分部积分得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)&=2\int_R(uu_t+u_xu_{xt}+\bar\rho\bar\rho_t)dx\\&=2\int_R(-\lambda u^2-u\partial_xp*f-uu_xu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^3-\frac{1}{2}u_x\bar\rho^2-u_xp*f-u\bar\rho\bar\rho_x)dx\\&=-2\lambda\int_R u^2dx\leq 0,\end{aligned}$$

所以 (3.1) 式得证.

根据上述不等式, 得到

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty}^2\leq\frac{1}{2}\|u\|_{H^1}^2\leq\frac{1}{2}(\|u\|_{H^1}^2+\|\bar\rho\|_{L^2}^2)\leq\frac{1}{2}(\|u_0\|_{H^1}^2+\|\bar\rho_0\|_{L^2}^2),$$

这就完成了对引理 3.3 的证明.

由引理 3.1–3.3 可得到下述重要结论.

定理 3.1 设 $z_0=\begin{pmatrix} u_0 \\ \bar\rho_0 \end{pmatrix}\in H^s\times H^{s-1}, s\geq 2$, 且 T 是方程 (2.3) 关于初始值 z_0 的解 $z=(u,\bar\rho)$ 的最大存在时间, 若存在 $M>0$, 使得

$$\|u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty}+\|\bar\rho(t,\cdot)\|_{L^\infty}+\|\bar\rho_x(t,\cdot)\|_{L^\infty}\leq M,\ \ \forall t\in[0,T),$$

则解 $z(t,\cdot)$ 关于范数 $\|\cdot\|_{H^s\times H^{s-1}}$ 在 [0,T) 内不会爆破.

证 根据定理 2.2, 设 $z=\begin{pmatrix} u \\ \bar\rho \end{pmatrix}$ 是方程 (2.3) 关于初始值 $z_0\in H^s\times H^{s-1}, s\geq 2$, 的解, 且 T 是相应解 z 的最大存在时间. 证明过程中, $c>0$ 是仅依赖于 s 的正常数. 对方程 (2.4) 中第一个方程运用算子 Λ^s, 且两边同时乘以 $\Lambda^s u$, 再关于 R 积分, 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{H^s}^2=-2(uu_x,u)_s-2(u,f(u,\bar\rho))_s-2(u,\lambda u)_s, \tag{3.4}$$

其中 $f(u,\bar\rho)=\partial_x(1-\partial_x^2)^{-1}(u^2+\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}\bar\rho^2+\bar\rho+\lambda u_x)$. 现首先估计 (3.4) 式右边的第一个式子 (参见文 [14] 定理 3.1) 得到

$$|(uu_x,u)_s|\leq c\|u_x\|_{L^\infty}\|u\|_{H^s}^2.$$

其次, 估计 (3.4) 式右边的第二个式子

$$\begin{aligned}|(u,f(u,\bar\rho))_s|\leq&\|u\|_{H^s}\|f(u,\bar\rho)\|_{H^s}\\ \leq&(\|u^2\|_{H^{s-1}}+\frac{1}{2}\|u_x^2\|_{H^{s-1}}+\frac{1}{2}\|\bar\rho^2\|_{H^{s-1}}+\|\bar\rho\|_{H^{s-1}}+\lambda\|u_x\|_{H^{s-1}})\|u\|_{H^s}\\ \leq&(c\|u\|_{L^\infty}\|u\|_{H^{s-1}}+c\|u_x\|_{L^\infty}\|u_x\|_{H^{s-1}}+c\|\bar\rho\|_{L^\infty}\|\bar\rho\|_{H^{s-1}}+\lambda\|u\|_{H^s})\|u\|_{H^s}\\ &+\|\bar\rho\|_{H^{s-1}}\|u\|_{H^s}\\ \leq&c(\|u_x\|_{L^\infty}+\|\bar\rho\|_{L^\infty}+\sqrt{\|u_0\|_{H^1}^2+\|\bar\rho_0\|_{L^2}^2}+\lambda+\frac{1}{2})(\|u\|_{H^s}^2+\|\bar\rho\|_{H^{s-1}}^2).\end{aligned}$$

上述估计过程需用到引理 3.1 ($r=s-1$ 的情形) 和 (3.2) 式. 最后, 估计 (3.4) 式右边的第三个式子

$$|(u,\lambda u)_s|=\lambda|(u,u)_s|\leq\lambda\|u\|_{H^s}^2.$$

结合上述三个不等式及 (3.4) 式, 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{H^s}^2\leq c(\|u_x\|_{L^\infty}+\|\bar\rho\|_{L^\infty}+\sqrt{\|u_0\|_{H^1}^2+\|\rho_0\|_{L^2}^2}+\lambda+\frac{1}{2})(\|u\|_{H^s}^2+\|\bar\rho\|_{H^{s-1}}^2). \tag{3.5}$$

为得到关于第二个元素 $\bar\rho$ 的类似的估计, 对方程 (2.4) 中第二个方程作用以算子 Λ^s, 且两边同时乘以 $\Lambda^s\bar\rho$, 再关于 x 在 R 上积分, 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\bar\rho\|_{H^{s-1}}^2=-2(u_x\bar\rho,\bar\rho)_{s-1}-2(\bar\rho,u\bar\rho_x)_{s-1}-2(\bar\rho,u_x)_{s-1}. \tag{3.6}$$

现首先估计 (3.6) 式右边的第一个式子和第二个式子 (参见文 [14] 定理 3.1) 得到

$$\begin{aligned}|(u\bar\rho_x,u)_{s-1}|&\leq c(\|u_x\|_{L^\infty}+\|\bar\rho_x\|_{L^\infty})(\|u\|_{H^s}^2+\|\bar\rho\|_{H^{s-1}}^2),\\ |(u_x\bar\rho,\bar\rho)_{s-1}|&\leq c(\|u_x\|_{L^\infty}+\|\bar\rho\|_{L^\infty})(\|u\|_{H^s}^2+\|\bar\rho\|_{H^{s-1}}^2).\end{aligned}$$

再估计 (3.6) 式右边的第三个式子, 得到

$$|(u_x,\bar{\rho})_{s-1}|\le\|u_x\|_{H^{s-1}}\|\bar{\rho}\|_{H^{s-1}}\le\frac{1}{2}(\|u\|_{H^s}^2+\|\bar{\rho}\|_{H^{s-1}}^2).$$

结合上述三个不等式及 (3.6) 式, 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\bar{\rho}\|_{H^{s-1}}^2\le c(\|u_x\|_{L^\infty}+\|\bar{\rho}_x\|_{L^\infty}+\|\bar{\rho}\|_{L^\infty}+\frac{1}{2})(\|u\|_{H^s}^2+\|\bar{\rho}\|_{H^{s-1}}^2).\tag{3.7}$$

根据 (3.5)–(3.7) 式, 得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|_{H^s}^2+\|\bar{\rho}\|_{H^{s-1}}^2)\\ \le& c(\|u_x\|_{L^\infty}+\|\bar{\rho}\|_{L^\infty}+\|\bar{\rho}_x\|_{L^\infty}+\sqrt{\|u_0\|_{H^1}^2+\|\bar{\rho}_0\|_{L^2}^2}+\lambda+\frac{1}{2})(\|u\|_{H^s}^2+\|\bar{\rho}\|_{H^{s-1}}^2).\end{aligned}$$

运用 Gronwall 不等式和定理已给出的假设条件, 得到

$$\|u\|_{H^s}^2+\|\bar{\rho}\|_{H^{s-1}}^2\le\exp(cM_1t)(\|u_0\|_{H^s}^2+\|\bar{\rho}_0\|_{H^{s-1}}^2),$$

其中 $M_1=M+\sqrt{\|u_0\|_{H^1}^2+\|\bar{\rho}_0\|_{L^2}^2}+\lambda+\frac{1}{2}$. 这就完成了定理 3.1 的证明.

为研究方程 (2.2) 的解的精确的爆破机制, 引入如下初值问题

$$\begin{cases}q_t=u(t,q), & x\in[0,T),\\ q(0,x)=x, & x\in R,\end{cases}\tag{3.8}$$

其中 u 表示方程 (2.3) 的解的第一个元素, 且是局部 Lipschitz 连续函数. 应用常微分方程的一些结论, 能够得到关于 q 的两个结论, 这两结论在研究爆破现象中非常重要.

引理 3.4 [15,16] 设 $u\in C([0,T);H^s)\cap C^1([0,T);H^{s-1}), s\ge 2$, 则方程有唯一解 $q\in C^1([0,T)\times R;R)$, 且 $q(t,\cdot)$ 是 R 上的一个递增微分同胚映, 满足

$$q_x(t,x)=\exp(\int_0^t u_x(s,q(s,x))ds)>0,\ \ \forall(t,x)\in[0,T)\times R.$$

引理 3.5 设 $z_0=\begin{pmatrix}u_0\\ \bar{\rho}_0\end{pmatrix}\in H^s\times H^{s-1}, s\ge 2$, 且 $T>0$ 是方程 (2.3) 相应解 $z=(u,\bar{\rho})$ 的最大存在时间, 则

$$(\bar{\rho}(t,q(t,x))+1)q_x(t,x)=(\bar{\rho}_0(x)+1),\ \ \forall(t,x)\in[0,T)\times R.\tag{3.9}$$

此外, 若存在 $M>0$, 使得 $\forall(t,x)\in[0,T)\times R$, 有 $u_x(t,x)\ge -M$, 则

$$\|\bar{\rho}(t,\cdot)\|_{L^\infty}=\|\bar{\rho}(t,q(t,\cdot))\|_{L^\infty}\le e^{MT}(\|\bar{\rho}_0(x)\|_{L^\infty}+2),\ \ \forall t\in[0,T).$$

证 (参见文 [6] 引理 2.5) 得到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{\rho}(t,q(t,x))+1)q_x(t,x)=0$. 根据引理 3.4 和 (3.9) 式及引理给出的假设条件, 得到

$$\begin{aligned}\|\bar{\rho}(t,\cdot)\|_{L^\infty}=&\|\bar{\rho}(t,q(t,x))\|_{L^\infty}=\|(\bar{\rho}_0(x)+1)\exp(-\int_0^t u_x(s,q(s,x))ds)-1\|_{L^\infty}\\ \le& e^{MT}(\|\bar{\rho}_0(x)\|_{L^\infty}+2).\end{aligned}$$

这就完成了引理 3.5 的证明.

根据定理 3.1 和引理 3.5, 可以得到以下推论.

推论 3.1 设 $z_0=\begin{pmatrix} u_0 \\ \bar{\rho}_0 \end{pmatrix}\in H^s\times H^{s-1}, s\geq 2$, 且 T 是方程 (2.3) 关于初始值 z_0 的解 $z=(u,\bar{\rho})$ 的最大存在时间, 若存在 $M>0$, 使得

$$\|u_x(t,\cdot)\|_{L^\infty}+\|\bar{\rho}_x(t,\cdot)\|_{L^\infty}\leq M,\ \ \forall t\in[0,T),$$

则解 $z(t,\cdot)$ 关于范数 $\|\cdot\|_{H^s\times H^{s-1}}$ 在 [0,T) 内不会爆破.

接下来将要证明方程 (2.3) 解的精确的爆破机制.

定理 3.2 设 $z_0=\begin{pmatrix} u_0 \\ \bar{\rho}_0 \end{pmatrix}\in H^s\times H^{s-1}, s>\frac{5}{2}$, 且 T 是方程 (2.3) 关于初始值 z_0 的解 $z=(u,\bar{\rho})$ 的最大存在时间, 则方程的解在有限时间内爆破当且仅当

$$\liminf_{t\to T}\inf_{x\in R}u_x(t,x)=-\infty \text{ 或 } \limsup_{t\to T}\|\bar{\rho}_x(t,\cdot)\|_{L^\infty}=+\infty.$$

证 根据定理 2.2, 设 $z=\begin{pmatrix} u \\ \bar{\rho} \end{pmatrix}$ 是方程 (2.3) 关于初始值 $z_0\in H^s\times H^{s-1}(s\geq 2)$ 的解, 且 T 是相应解 z 的最大存在时间. 用 $m=u-u_{xx}$ 同时乘以方程 (2.2) 的第一个方程的两边, 然后再分部积分, 得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R m^2dx=&2\int_R mm_tdx=2\int_R(-2m^2u_x-mm_xu-\lambda mu-m\bar{\rho}\bar{\rho}_x-m\bar{\rho}_x)dx\\ =&-3\int_R m^2u_xdx+\int_R u_x\bar{\rho}^2dx-\int_R u_{xxx}\bar{\rho}^2dx-2\lambda\int_R mudx\\ &-2\int_R m\bar{\rho}_xdx.\end{aligned}\tag{3.10}$$

对方程 (2.2) 的第一个方程关于 x 求偏导, 然后方程两边同时乘以 $m_x=u_x-u_{xxx}$, 最后再积分, 得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R m_x^2dx=&2\int_R m_xm_{xt}dx\\ =&-6\int_R u_xm_x^2dx-4\int_R u_{xx}mm_xdx-2\int_R um_xm_{xx}dx-2\lambda\int_R u_xm_xdx\\ &-2\int_R m_x\bar{\rho}_x^2dx-2\int_R m_x\bar{\rho}\bar{\rho}_{xx}dx-2\int_R m_x\bar{\rho}_{xx}dx\\ =&-5\int_R u_xm_x^2dx-4\int_R(u-m)mm_xdx-2\lambda\int_R u_xm_xdx\\ &-\int_R u_{xxx}(\bar{\rho}^2-2\bar{\rho}\bar{\rho}_{xx}-2\bar{\rho}_x^2)dx-2\int_R m_x\bar{\rho}_{xx}dx\\ =&-5\int_R u_xm_x^2dx+2\int_R u_xm^2dx-2\lambda\int_R u_xm_xdx\\ &-\int_R u_{xxx}(\bar{\rho}^2-2\bar{\rho}\bar{\rho}_{xx}-2\bar{\rho}_x^2)dx-2\int_R m_x\bar{\rho}_{xx}dx,\end{aligned}\tag{3.11}$$

这里用到了关系式 $m=u-u_{xx}$ 和 $\int_R m^2 m_x dx=0$. 结合 (3.10)–(3.11) 式, 得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R (m^2+m_x^2)dx=&-\int_R m^2 u_x dx+\int_R u_x\bar\rho^2 dx-5\int_R u_x m_x^2 dx-2\int_R m\bar\rho_x dx \\ &-2\lambda\int_R (um+u_x m_x)dx-2\int_R u_{xxx}(\rho^2-\bar\rho\bar\rho_{xx}-\bar\rho_x^2)dx-2\int_R m_x\bar\rho_{xx}dx.\end{aligned} \tag{3.12}$$

为了得到关于第二个元素 $\bar\rho$ 的类似估计, 用 $\bar\rho$ 同时乘以方程 (2.2) 的第二个方程的两边, 然后再分部积分, 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R \bar\rho^2 dx=2\int_R \bar\rho\bar\rho_t dx=2\int_R \bar\rho(-u_x\bar\rho-u\bar\rho_x-u_x)dx=-\int_R u_x\bar\rho^2 dx-\int_R u_x\bar\rho dx. \tag{3.13}$$

对方程 (2.2) 的第二个方程关于 x 求偏导, 然后用 $\bar\rho_x$ 同时乘以方程 (2.2) 的第二个方程的两边, 再积分, 得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R \bar\rho_x^2 dx=&2\int_R \bar\rho_x\bar\rho_{xt}dx \\ =&2\int_R \bar\rho_x(-u\bar\rho_{xx}-2u_x\bar\rho_x-u_{xx}\bar\rho-u_{xx}\bar\rho_x) \\ =&-3\int_R u_x\bar\rho_x^2 dx+\int_R u_{xxx}\bar\rho^2 dx-2\int_R u_{xx}\bar\rho_x dx.\end{aligned} \tag{3.14}$$

再对方程 (2.2) 的第二个方程关于 x 求两次偏导, 然后用 $\bar\rho_{xx}$ 同时乘以方程 (2.2) 的第二个方程的两边, 再积分, 得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R \bar\rho_{xx}^2 dx=&2\int_R \bar\rho_{xx}\bar\rho_{xxt}dx \\ =&2\int_R \bar\rho_{xx}(-3u_{xx}\bar\rho_x-3u_x\bar\rho_{xx}-u\bar\rho_{xxx}-u_{xxx}\bar\rho-u_{xxx})dx \\ =&-5\int_R u_x\bar\rho_{xx}^2 dx-\int_R u_{xxx}(2\bar\rho\bar\rho_{xx}-3\bar\rho_x^2)dx-2\int_R u_{xxx}\bar\rho_{xx}dx.\end{aligned} \tag{3.15}$$

结合 (3.12)–(3.15) 式, 得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R (m^2+m_x^2+\bar\rho^2+\bar\rho_x^2+\bar\rho_{xx}^2)dx \\ =&-\int_R m^2 u_x dx-5\int_R u_x m_x^2 dx-3\int_R u_x\bar\rho_x^2 dx-5\int_R u_x\bar\rho_{xx}^2 dx \\ &-2\lambda\int_R (um+u_x m_x)dx+\int_R u_{xxx}(-\bar\rho^2+5\bar\rho_x^2)dx-2\int_R u_x\bar\rho_{xx}dx.\end{aligned} \tag{3.16}$$

假设存在 $M_1>0, M_2>0$, 使得 $u_x(t,x)\ge -M_1$, $\forall(t,x)\in[0,T)\times R$, 和 $\|\bar\rho_x(t,\cdot)\|_{L^\infty}\le$

$M_2,\forall t\in[0,T)$. 由引理 3.5 知 $\|\bar\rho(t,\cdot)\|_{L^\infty}$ 有界, 根据 (3.16) 式得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R(m^2+m_x^2+\bar\rho^2+\bar\rho_x^2+\bar\rho_{xx}^2)dx\\
\le&M_1\int_R m^2dx+5M_1\int_R m_x^2dx+3M_1\int_R\bar\rho_x^2dx+5M_1\int_R\bar\rho_{xx}^2dx\\
&+\frac12\|\bar\rho\|_{L^\infty}\int_R(u_{xxx}^2+\bar\rho^2)dx+\frac52\|\bar\rho_x\|_{L^\infty}\int_R(u_{xxx}^2+\bar\rho_x^2)dx+\frac12\int_R(u_x^2+\bar\rho_{xx}^2)dx\\
\le&M_1\int_R m^2dx+5M_1\int_R m_x^2dx+3M_1\int_R\bar\rho_x^2dx+5M_1\int_R\bar\rho_{xx}^2dx\\
&+\frac12\|\bar\rho\|_{L^\infty}\int_R(m_x^2+\bar\rho^2)dx+\frac52\|\bar\rho_x\|_{L^\infty}\int_R(m_x^2+\bar\rho_x^2)dx+\frac12\int_R(m_x^2+\bar\rho_{xx}^2)dx\\
\le&(5M_1+\frac12\|\bar\rho\|_{L^\infty}+\frac52\|\bar\rho_x\|_{L^\infty})\int_R(m^2+m_x^2+\bar\rho^2+\bar\rho_x^2+\bar\rho_{xx}^2)dx,
\end{aligned}\tag{3.17}$$

这里用到了关系式 $\int_R m_x^2dx\ge\int_R u_{xxx}^2dx$ 和 $\int_R m_x^2dx\ge\int_R u_x^2dx$.

运用 Gronwall 不等式, 得到 $\forall t\in[0,T)$ 有

$$\|u(t,\cdot)\|_{H^3}^2+\|\bar\rho(t,\cdot)\|_{H^2}^2\le\|m(t,\cdot)\|_{H^1}^2+\|\bar\rho(t,\cdot)\|_{H^2}^2\le\|m(0,\cdot)\|_{H^1}^2+\|\bar\rho(0,\cdot)\|_{H^2}^2.$$

由上述不等式, Sobolev 嵌入定理和推论 3.1 知解 z 在有限时间内不会爆破.

另一方面, 由 Sobolev 嵌入定理知, 若

$$\liminf_{t\to T}\inf_{x\in R}u_x(t,x)=-\infty \text{ 或 } \limsup_{t\to T}\|\bar\rho_x(t,\cdot)\|_{L^\infty}=+\infty,$$

则解 z 就会在有限的时间内爆破. 这就完成了对定理 3.2 的证明.

关于初始值 $z_0\in H^2\times H^1$, 有下述精确的爆破机制.

定理 3.3 设 $z_0=\begin{pmatrix}u_0\\ \bar\rho_0\end{pmatrix}\in H^2\times H^1$, 且 T 是方程 (2.3) 关于初始值 z_0 的解 $z=(u,\bar\rho)$ 的最大存在时间, 则方程 (2.3) 的 $H^2\times H^1-$ 解在有限时间内爆破当且仅当

$$\liminf_{t\to T}\inf_{x\in R}u_x(t,x)=-\infty.$$

证 根据定理 2.2, 设 $z=\begin{pmatrix}u\\ \bar\rho\end{pmatrix}$ 是方程 (2.3) 关于初始值 $z_0\in H^2\times H^1$ 的解, 且 T 是相应解 z 的最大存在时间, 结合 (3.10), (3.13) 和 (3.14) 式, 得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R(m^2+\bar\rho^2+\bar\rho_x^2)dx\\
=&-3\int_R m^2u_xdx+\int_R u_x\bar\rho^2dx-\int_R u_{xxx}\bar\rho^2dx-2\lambda\int_R umdx-\int_R u_x\bar\rho^2dx\\
&-3\int_R u_x\bar\rho_x^2dx+\int_R u_{xxx}\bar\rho^2dx\\
\le&-3\int_R m^2u_xdx-3\int_R u_x\bar\rho_x^2dx.
\end{aligned}\tag{3.18}$$

假设存在 $M_1 > 0$, 使得 $\forall(t,x) \in [0,T) \times R, u_x(t,x) \geq -M_1$. 根据 (3.18) 式得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R (m^2+\bar{\rho}^2+\bar{\rho}_x^2)dx \leq 3M_1\int_R m^2dx + 3M_1\int_R \bar{\rho}_x^2 dx \leq 3M_1\int_R (m^2+\bar{\rho}^2+\bar{\rho}_x^2)dx. \quad (3.19)$$

运用 Gronwall 不等式, 得到 $\forall t \in [0,T)$ 有

$$\|u(t,\cdot)\|_{H^2}^2 + \|\bar{\rho}(t,\cdot)\|_{H^1}^2 \leq \|m(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|\bar{\rho}(t,\cdot)\|_{H^1}^2 \leq \|m(0,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|\bar{\rho}(0,\cdot)\|_{H^1}^2.$$

由上述不等式知, 解 z 在有限时间内不会爆破.

另一方面, 由 Sobolev 嵌入定理知, 若 $\liminf\limits_{t\to T}\inf\limits_{x\in R} u_x(t,x) = -\infty$, 则解 z 在有限时间爆破.

注 3.1 由定理 3.2 得到

$$T(\|z_0\|_{H^s\times H^{s-1}}) = T(\|z_0\|_{H^{s'}\times H^{s'-1}}), \ \ \forall s, s' > \frac{5}{2},$$

由定理 3.3 得到

$$T(\|z_0\|_{H^s\times H^{s-1}}) \leq T(\|z_0\|_{H^2\times H^1}), \ \ \forall s \geq 2.$$

接下来, 将讨论导致方程 (2.2) 解爆破的两个充分条件.

定理 3.4 设 $z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ \bar{\rho}_0 \end{pmatrix} \in H^s \times H^{s-1}, s \geq 2$, 且 T 是方程 (2.3) 关于初始值 z_0 的解 $z = (u, \bar{\rho})$ 的最大存在时间, 若存在 $x_0 \in R$, 使得 $\bar{\rho}_0(x_0) = -1$, 且

$$u_0'(x_0) < -(\|u_0\|_{H^1}^2 + \|\bar{\rho}_0\|_{L^2}^2 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}},$$

则方程 (2.3) 的解在有限时间内爆破.

证 设 $z = \begin{pmatrix} u \\ \bar{\rho} \end{pmatrix}$ 是方程 (2.3) 关于初始值 $z_0 \in H^2 \times H^1$ 的解, 且 T 是相应解 z 的最大存在时间. 令 $m(t) = u_x(t, q(t,x_0))$ 和 $\gamma(t) = \bar{\rho}(t, q(t,x_0)) + 1$. 由方程 (2.3) 和 (3.8) 式得到

$$\frac{\partial m}{\partial t} = (u_{tx} + uu_{xx})(t, q(t,x_0)) \ \ \text{和} \ \ \frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\gamma m.$$

再由 (3.3) 式和关系式 $p * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, 得到

$$m_t = -\frac{1}{2}m^2 + u^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 - p * (u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}(\bar{\rho}+1)^2 + \lambda u_x)(t,q). \quad (3.20)$$

由于 $\gamma(0) = \bar{\rho}(x_0) + 1 = 0$, 根据引理 3.5 知 $\gamma(t) = 0, \ \forall t \in [0,T)$. 于是得到

$$\begin{aligned} m_t =& -\frac{1}{2}m^2 + u^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 - p * (u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}(\bar{\rho}+1)^2 + \lambda u_x)(t, q(t,x_0)) \\ \leq& -\frac{1}{2}m^2 + u^2 + \frac{\lambda^2}{2}, \end{aligned}$$

这里需用到关系式 $p * (u^2 + \frac{1}{2}(u_x+\lambda)^2 + \frac{1}{2}(\bar{\rho}+1)^2) \geq 0$ 和 $p * \frac{\lambda^2}{2} = \frac{\lambda^2}{2}$. 根据上述不等式和引理 3.1 得到

$$m'(t) \leq -\frac{1}{2}m^2 + K^2,$$

其中 $K=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\|u_0\|_{H^1}^2+\|\rho_0\|_{L^2}^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}$. 若 $m(0)<-\sqrt{2}K$, 那么有 $m(t)<-\sqrt{2}K$, $\forall t\in[0,T)$. 则根据上述不等式得到

$$\frac{m(0)+\sqrt{2}K}{m(0)-\sqrt{2}K}e^{\sqrt{2}Kt}-1\le\frac{2\sqrt{2}K}{m(t)-\sqrt{2}K}\le 0.$$

由于 $0<\dfrac{m(0)+\sqrt{2}K}{m(0)-\sqrt{2}K}<1$, 则存在 $0<T<\dfrac{1}{\sqrt{2}K}\ln(\dfrac{m(0)+\sqrt{2}K}{m(0)-\sqrt{2}K})$, 使得 $\lim\limits_{t\to T}m(t)=-\infty$. 由定理 3.2 知解在有限时间内爆破. 这就完成了对定理 3.4 的证明.

定理 3.5 设 $z_0=\begin{pmatrix}u_0\\ \bar\rho_0\end{pmatrix}\in H^s\times H^{s-1}, s\ge\frac{5}{2}$, T 是方程 (2.3) 关于初始值 z_0 的解 $z=(u,\bar\rho)$ 的最大存在时间, $E_0=\|u_0\|_{H^1}^2+\|\bar\rho_0\|_{L^2}^2\neq 0$, 且存在 $M>0$, 使得 $\|\bar\rho(t,\cdot)\|_{L^\infty}\le M$, $\forall t\in[0,T)$. 再假设存在 $x_0\in R$, 使得

$$\int_R u_{0,x}^3<-\sqrt{3E_0}[E_0^2+(\lambda^2+(M+1)^2)E_0]^{\frac{1}{2}},$$

则方程的解在有限时间内爆破.

证 由 (3.3) 式, 可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R u_x^3dx=&3\int_R u_x^2u_{xt}dx\\ =&3\int_R(-uu_x^2u_{xx}+u^2u_x^2-\frac{1}{2}u_x^4+\frac{1}{2}u_x^2\bar\rho^2+u_x^2\bar\rho\\ &-u_x^2p*(u^2+\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}(\bar\rho+1)^2-\frac{1}{2}+\lambda u_x))dx\\ =&3\int_R(-uu_x^2u_{xx}+u^2u_x^2-\frac{1}{2}u_x^4+\frac{1}{2}u_x^2\bar\rho^2+u_x^2\bar\rho\\ &-u_x^2p*(u^2+\frac{1}{2}(u_x+\lambda)^2+\frac{1}{2}(\bar\rho+1)^2-\frac{1}{2}-\frac{\lambda^2}{2}))dx\\ \le&3\int_R(-uu_x^2u_{xx}+u^2u_x^2-\frac{1}{2}u_x^4+\frac{1}{2}u_x^2\bar\rho^2+u_x^2\bar\rho+u_x^2p*\frac{\lambda^2+1}{2})dx\\ \le&-\frac{1}{2}\int_R u_x^4dx+3\int_R u^2u_x^2dx+\frac{3}{2}\int_R u_x^2\bar\rho^2dx+3\int_R u_x^2\bar\rho dx+\frac{3(\lambda^2+1)}{2}\int_R u_x^2dx.\end{aligned}$$

由引理 3.3 知

$$\begin{aligned}&\int_R u^2u_x^2dx\le\|u\|_{L^\infty}^2\int_R u_x^2dx\le\frac{1}{2}(\|u_0\|_{H^1}^2+\|\bar\rho_0\|_{L^2}^2)^2=\frac{1}{2}E_0^2,\\ &\int_R u_x^2\bar\rho^2dx\le\|\bar\rho\|_{L^\infty}^2\int_R u_x^2dx\le M^2(\|u_0\|_{H^1}^2+\|\bar\rho_0\|_{L^2}^2)^2=M^2E_0,\\ &\int_R u_x^2dx\le(\|u_0\|_{H^1}^2+\|\bar\rho_0\|_{L^2}^2)=E_0,\\ &\int_R u_x^2\bar\rho dx\le\|\bar\rho\|_{L^\infty}\int_R u_x^2dx\le M(\|u_0\|_{H^1}^2+\|\rho_0\|_{L^2}^2)=ME_0,\end{aligned}$$

其中用到关系式 $p*\dfrac{\lambda^2+1}{2}=\dfrac{\lambda^2+1}{2}$. 因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_R u_x^3dx\leq -\frac{1}{2}\int_R u_x^4dx+\frac{3}{2}[E_0^2+(\lambda^2+(M+1)^2)E_0].$$

根据 Hölder 不等式, 得到

$$|\int_R u_x^3dx|\leq (\int_R u_x^4dx)^{\frac{1}{2}}(\int_R u_x^3dx)^{\frac{1}{2}}\leq (\int_R u_x^4dx)^{\frac{1}{2}}\sqrt{E_0}.$$

设 $m(t)=\displaystyle\int_R u_x^3dx$ 和 $K=\dfrac{\sqrt{6}}{2}[E_0^2+(\lambda^2+(M+1)^2)E_0]^{\frac{1}{2}}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m(t)\leq -\frac{1}{2E_0}m^2(t)+\frac{3}{2}[E_0^2+(\lambda^2+(M+1)^2)E_0]=-\frac{1}{2E_0}m(t)^2+K^2.$$

若 $m(0)<-\sqrt{2E_0}K$, 则有 $m(t)<-\sqrt{2E_0}K,\ \forall t\in[0,T)$. 则根据上述不等式得到

$$\frac{m(0)+\sqrt{2E_0}K}{m(0)-\sqrt{2E_0}K}e^{\sqrt{2/E_0}Kt}-1\leq\frac{2\sqrt{2E_0}K}{m(t)-\sqrt{2E_0}K}\leq 0.$$

由于 $0<\dfrac{m(0)+\sqrt{2E_0}K}{m(0)-\sqrt{2E_0}K}<1$, 则存在 $0<T<\dfrac{1}{\sqrt{2/E_0}K}\ln(\dfrac{m(0)+\sqrt{2E_0}K}{m(0)-\sqrt{2E_0}K})$, 使得 $\lim\limits_{t\to T}m(t)=-\infty$. 由定理 3.2 知, 解在有限时间内爆破. 这就完成了对定理 3.5 的证明.

4 整体解

在这节中, 将证明强解的整体存在性. 首先先给出一个重要引理.

引理 4.1 设 $z_0=\begin{pmatrix}u_0\\ \bar{\rho}_0\end{pmatrix}\in H^s\times H^{s-1}, s\geq 2$, 且 T 是方程 (2.3) 关于初始值 z_0 的解 $z=(u,\bar{\rho})$ 的最大存在时间, 若 $\bar{\rho}_0(x)\neq -1,\forall x\in R$, 则存在 $\beta>0$, 使得

$$\lim_{t\to T}\inf_{x\in R}u_x(t,x)\geq -\frac{1}{2\beta}(3+\|z_0\|^2_{H^s\times H^{s-1}})e^{(\frac{3}{2}+\lambda)(\|u_0\|^2_{H^1}+\|\bar{\rho}_0\|^2_{L^2}+1)T}.$$

证 由引理 3.4 知 $q(t,\cdot)$ 是 R 上的一个递增微分同胚映射, 满足

$$q_x(t,x)=\exp(\int_0^t u_x(s,q(s,x))ds)>0,\forall (t,x)\in[0,T)\times R,$$

则有

$$\inf_{x\in R}u_x(t,q(t,x))=\inf_{x\in R}u_x(t,x),\forall (t,x)\in[0,T). \tag{4.1}$$

设 $M(t,x)=u_x(t,q(t,x))$ 和 $\gamma(t,x)=\bar{\rho}(t,q(t,x))+1$. 由方程 (2.3) 和 (3.8) 式得

$$\frac{\partial M}{\partial t}=(u_{tx}+uu_{xx})(t,q(t,x))\ \text{ 和 }\ \frac{\partial\gamma}{\partial t}=-\gamma M. \tag{4.2}$$

再由方程 (3.3) 和关系式 $p*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, 得到

$$M_t=-\frac{1}{2}M^2+u^2+\frac{1}{2}\gamma^2-p*(u^2+\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}\bar{\rho}^2+\bar{\rho}+\frac{1}{2}+\lambda u_x)(t,q). \tag{4.3}$$

注意

$$|p*\bar{\rho}|\le\frac{1}{2}(\|p\|_{L^2}^2+\|\bar{\rho}\|_{L^2}^2)\le\frac{1}{2}(1+\|u_0\|_{H^1}^2+\|\bar{\rho}_0\|_{L^2}^2), \tag{4.4}$$

$$|p*u_x|\le\frac{1}{2}(\|p\|_{L^2}^2+\|u_x\|_{L^2}^2)\le\frac{1}{2}(1+\|u_0\|_{H^1}^2+\|\bar{\rho}_0\|_{L^2}^2). \tag{4.5}$$

由引理 3.3 和 (4.4)–(4.5) 式, 得到

$$\begin{aligned}&|p*(u^2+\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}\bar{\rho}^2+\bar{\rho}+\frac{1}{2}+\lambda u_x)|\\ \le&\|p\|_{L^\infty}\|u^2+\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}\bar{\rho}^2\|_{L^1}+\lambda|p*u_x|+|p*\bar{\rho}|+\frac{1}{2}\\ \le&\frac{1}{2}(\|u\|_{H^1}^2+\|\bar{\rho}\|_{L^2}^2)+\frac{\lambda}{2}(1+\|u_0\|_{H^1}^2+\|\bar{\rho}_0\|_{L^2}^2)+\frac{1}{2}(2+\|u_0\|_{H^1}^2+\|\bar{\rho}_0\|_{L^2}^2)\\ \le&(\frac{\lambda}{2}+1)(\|u_0\|_{H^1}^2+\|\bar{\rho}_0\|_{L^2}^2+1).\end{aligned}$$

若设 $f(t,x)=u^2(t,q)-p*(u^2+\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}\bar{\rho}^2+\bar{\rho}+\frac{1}{2}+\lambda u_x)(t,q)$, 则

$$\begin{aligned}|f(t,x)|\le&\|u\|_{L^\infty}^2+|p*(u^2+\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}\bar{\rho}^2+\bar{\rho}+\frac{1}{2}+\lambda u_x)|\\ \le&(\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{2})(\|u_0\|_{H^1}^2+\|\rho_0\|_{L^2}^2)+\frac{\lambda}{2}+1,\forall(t,x)\in[0,T)\times R,\end{aligned} \tag{4.6}$$

且

$$M_t=-\frac{1}{2}M^2+\frac{1}{2}\gamma^2+f(t,x),\forall(t,x)\in[0,T)\times R. \tag{4.7}$$

由引理 3.4–3.5 知 $\forall x\in R$, 有 $\gamma(t,x)$ 与 $\gamma(0,x)=\rho(0,x)$ 同号. 根据 Sobolev 嵌入定理, 有 $\bar{\rho}_0(x)\in H^{s-1}, s\ge 2$, 则 $\bar{\rho}_0(x)\in C^1(R)\hookrightarrow \mathrm{Lip(R)}$, 且存在 R_0 使得当 $|x|\ge R_0$ 时, 有 $|\bar{\rho}_0(x)|\le\frac{1}{2}$. 因为 $\bar{\rho}_0(x)\in C(R)$ 且 $\bar{\rho}_0(x)\ne -1,\forall x\in R$, 则有

$$\inf_{|x|\le R_0}|\gamma(0,x)|=\inf_{|x|\le R_0}|\bar{\rho}_0(x)+1|>0.$$

设 $\beta=\min\{\frac{1}{2},\inf_{|x|\le R_0}|\gamma(0,x)|\}$. 则 $\gamma(0,x)\ge\beta>0,\forall x\in R$. 因此 $\gamma(t,x)\gamma(0,x)>0,\forall x\in R$.

接下来考虑下述 Lyapunov 函数

$$w(t,x)=\gamma(0,x)\gamma(t,x)+\frac{\gamma(0,x)}{\gamma(t,x)}(1+M^2(t,x)),(t,x)\in[0,T)\times R. \tag{4.8}$$

根据 Sobolev 嵌入定理知

$$\begin{aligned}0<w(t,x)=&\gamma^2(0,x)+1+M^2(0,x)\\ \le&\bar{\rho}_0(x)^2+\|u_{0,x}^2(x)+3\le\|z_0\|_{H^s\times H^{s-1}}^2+3.\end{aligned} \tag{4.9}$$

将 (4.8) 式关于 t 求偏导, 再结合 (4.2) 式和 (4.6)–(4.7) 式, 有

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t}(t,x)=&2\frac{\gamma(0,x)}{\gamma(t,x)}M(t,x)(f(t,x)+\frac{1}{2})\\ \leq&[(\lambda+\frac{3}{2})(\|u_0\|_{H^1}^2+\|\bar{\rho}_0\|_{L^2}^2+1)]\frac{\gamma(0,x)}{\gamma(t,x)}(1+M^2(t,x))\\ \leq&(\lambda+\frac{3}{2})(\|u_0\|_{H^1}^2+\|\bar{\rho}_0\|_{L^2}^2+1)w(t,x).\end{aligned}$$

根据 Gronwall 不等式和上述不等式及 (4.9) 式, $\forall(t,x)\in[0,T)\times R$ 有

$$\begin{aligned}w(t,x)\leq&w(0,x)e^{(\lambda+\frac{3}{2})(\|u_0\|_{H^1}^2+\|\bar{\rho}_0\|_{L^2}^2+1)t}\\ \leq&(\|z_0\|_{H^s\times H^{s-1}}^2+3)e^{(\lambda+\frac{3}{2})(\|u_0\|_{H^1}^2+\|\bar{\rho}_0\|_{L^2}^2+1)T}.\end{aligned}\tag{4.10}$$

另一方面,

$$w(t,x)\geq 2\sqrt{\gamma^2(0,x)(1+M^2(t,x))}\geq 2\beta|M(t,x)|.$$

因此得到

$$\begin{aligned}M(t,x)\geq&-\frac{1}{2\beta}w(t,x)\\ \geq&-\frac{1}{2\beta}(\|z_0\|_{H^s\times H^{s-1}}^2+3)e^{(\lambda+\frac{3}{2})(\|u_0\|_{H^1}^2+\|\bar{\rho}_0\|_{L^2}^2+1)T},\forall(t,x)\in[0,T)\times R.\end{aligned}$$

根据 (4.1) 式和上述不等式, 得到

$$\liminf_{t\to T}\inf_{x\in R}u_x(t,x)=\inf_{x\in R}u_x(t,q(t,x))\geq-\frac{1}{2\beta}e^{(\lambda+\frac{3}{2})(\|u_0\|_{H^1}^2+\|\bar{\rho}_0\|_{L^2}^2+1)T}.$$

这就完成了对引理 4.1 的证明.

由定理 3.2–3.3 和引理 4.1, 可以直接得到以下两个定理.

定理 4.1 设 $z_0=\begin{pmatrix}u_0\\ \bar{\rho}_0\end{pmatrix}\in H^2\times H^1$, 若 $\bar{\rho}_0(x)\neq-1,\forall x\in R$, 则方程 (2.3) 的强解 $z=(u,\bar{\rho})$ 整体存在.

定理 4.2 设 $z_0=\begin{pmatrix}u_0\\ \bar{\rho}_0\end{pmatrix}\in H^s\times H^{s-1},s>\frac{5}{2}$, 若 $\bar{\rho}_0(x)\neq-1,\forall x\in R$, 且 T 是方程关于初始值 z_0 的解 $z=(u,\bar{\rho})$ 的最大存在时间, 则方程 (2.3) 的解在有限时间内爆破当且仅当

$$\limsup_{t\to T}\|\bar{\rho}_x(t,\cdot)\|_{L^\infty}=+\infty.$$

参 考 文 献

[1] Camassa R, Holm D D, Hyman J M. A new integrable shallow water equation[J]. Adv. Appl. Mech., 1994, 31: 1–33.

[2] Fuchssteiner B, Fokas A S. Symplectic structures, their Bäcklund transformations and hereditary symmetries[J]. Physica D: Nonl. Phenomena, 1981, 4(1): 47–66.

[3] Constantin A. On the scattering problem for the Camassa-Holm equation. Proceedings of the Royal Society of London[J]. Series A: Math., Phys. Engin. Sci., 2001, 457: 953–970.

[4] Constantin A, Escher J. Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations[J]. Acta Math., 1998, 181: 229–243.

[5] Yin Z. Well-posedness,global existence and blow-up phenomena for an integrable shallow water equation[J]. Discrete Contin. Dyn. Syst., 2004, 10: 393–411.

[6] C G, Yin Z. Global existence and blow-up phenomena for an integrable two-component Camassa-Holm shallow water system[J]. J. Diff. Equ., 2010, 248: 2003–2014.

[7] Escher J, Lechtenfeld O, Yin Z. Well-posedness and blow-up phenomena for the 2-component Camassa-Holm equation[J]. Discrete Contin. Dyn. Syst. A, 2007, 19: 493–513.

[8] Constantin A, Ivanov R. On an integrable two-component Camassa-Holm shallow water system[J]. Phy. Lett. A, 2008, 372: 7129–7132.

[9] Guan C, Yin Z. Global weak solutions for a two-component Camassa-Holm shallow water system[J]. J. Funct. Anal., 2011, 260: 1132–1154.

[10] Kato T. Quasi-linear equations of evolution,with applications to partial differential equations[J]. Lecture Notes Math., 1975, 448: 25–70.

[11] Curtain R, Zwart H. An introduction to infinite-dimensional linear systems theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1995.

[12] Yin Z. On the Cauchy problem for an integrable equation with peakon solutions[J]. Illinois J. Math., 2003, 47: 649–666.

[13] Kato T, Ponce G. Commutator estimates and Navier-stokes equatins[J]. Comm. Oure Appl. Math., 1988, 41: 203–208.

[14] Liu J, Yin Z. On the Cauchy proplem of a periodic 2-component μ-Hunter-Saxton system[J]. Nonl. Anal., 2012, 75: 131–142.

[15] Beals R, Scattinger D, Szmigielski J. Acoustic scatting and extened Korteweg-de Vries hierarchy[J]. Adv. Math., 1998, 140: 190–206.

[16] 徐能, 李子宝. 一类耗散型 Camassa-Holm 方程的解的爆破 [J]. 数学杂志, 2013, 33(5): 871–880.

GLOBAL EXISTENCE AND BLOW-UP PHENOMENA FOR THE TWO-COMPONENT CAMASSA-HOLM EQUATION WITH ZERO ORDER DISSIPATION

ZHU Shi-shi, ZANG Lin-en

(*School of Mathematics,Yunnan Normal University, Kunming 650500,China*)

Abstract: In this paper, we study the two-component Camassa-Holm equation with the zero order dissipation. By using the Kato's theorem, the local well-posedness is obtain. Then we study the global existence and blow-up phenomena of the solutions for the Cauchy problem.

Keywords: two-component Camassa-Holm equation; zero order dissipation; local well-posedness; blow-up; global existence

2010 MR Subject Classification: 35G25; 35L05