Vol. 37 (2017)
No. 1

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一般状态空间马氏链随机泛函的指数矩

屈 聪 [1], 张水利 [1,2]
(1. 平顶山学院数学与信息科学学院, 河南 平顶山 467000))
(2. 湖北大学数学与统计学院, 湖北 武汉 430062))

摘 要: 本文研究了一般状态空间马氏链随机泛函的指数矩. 利用最小非负解理论, 得到了随机泛函的指数矩是相应方程的最小非负解, 推广了可数状态空间马氏链的结果, 作为应用, 证明了随机泛函的指数矩与漂移条件等价.

关键词: 马氏链; 随机泛函; 最小非负解
MR(2010) 主题分类号: 60J05 **中图分类号**: O211.62
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2017)01-0145-07

1 引言及主要结果

马氏过程泛函的矩已有许多学者进行了研究, 如王梓坤在文献 [1] 中研究了连续时间可数状态空间马氏链 (即 Q 过程) 的随机积分型泛函的矩; 李俊平等在文献 [2] 中研究了 Markov 骨架过程随机积分型泛函的分布与矩; 来向荣在文献 [3] 中研究了非齐次生灭过程的积分型泛函; 陈柳鑫等在文献 [4] 中研究了非齐次 (H,Q) 过程随机积分型泛函的分布与矩. 而本文利用文献 [5] 中最小非负解的一般理论, 研究了一般状态空间马氏链的随机泛函的指数矩, 作为应用, 得到了一般状态空间马氏链的矩条件与漂移条件等价.

设 E 是局部紧可分度量空间, $\mathcal{E}$ 是 E 上的 Borel σ 代数, $P: E\times\mathcal{E}\to[0,1]$ 是转移概率核, $\Phi=\{\Phi_n, n\ge 0\}$ 以 P 为转移核的马氏链. 对任意的 $A\in\mathcal{E}$, E 上的非负实值可测函数 V, 以及 $x\in E$, 记

$$\sigma_A:=\inf\{n\ge 0:\Phi_n\in A\},\ \ \tau_A:=\inf\{n\ge 1:\Phi_n\in A\},\ \ \eta_A:=\sum_{n=1}^{\infty}I_{\{\Phi_n\in A\}},$$
$$PV(x):=\int_E P(x,dy)V(y),\ \ \Delta V(x):=PV(x)-V(x).$$

定义 1.1 [6] 称马氏链 $\Phi=\{\Phi_n,n\ge 0\}$ 是 φ 不可约的, 若存在 σ 有限测度 φ, 当 $\varphi(A)>0$, 有 $P_x(\tau_A<\infty)>0,\ \ \forall x\in E$.

注 1.2 由文献 [6] 中的命题 4.2.2 可知若马氏链 $\Phi=\{\Phi_n,n\ge 0\}$ 是 φ 不可约的, 则一定存在最大不可约概率测度 ψ (即对任意其它不可约测度 ν, 都有 ν 关于 ψ 绝对连续). 令 $\mathcal{E}^+=\{A\in\mathcal{E}:\psi(A)>0\}$.

*收稿日期: 2014-01-21 接收日期:2014-10-16
基金项目:河南省教育厅科学技术研究重点项目资助 (14B110038).
作者简介: 屈聪 (1981–), 女, 河南南阳, 讲师, 研究方向: 概率论与数理统计.
通讯作者: 张水利.

定义 1.3 [6] 称集合 A 是 Harris 常返的, 若 $Q(x,A)=P_x(\eta_A=\infty)=1,\ x\in A$. 称马氏链 $\Phi=\{\Phi_n,n\geq 0\}$ 是 Harris 常返的, 若马氏链是 ψ 不可约的, 且 $\mathcal{E}^+$ 中的每一个集合都是 Harris 常返的.

如果没有特别说明, 总是假设马氏链 $\Phi=\{\Phi_n,n\geq 0\}$ 是 Harris 常返的. 本文的主要结果是

定理 1.4 设 $\Phi=\{\Phi_n,n\geq 0\}$ 是 $(E,\mathcal{E})$ 上的马氏链, 常数 $r>1$, $C\in\mathcal{E}^+$, 函数 $f:E\to[0,\infty)$, 则随机泛函的指数矩 $\{G_C(x,f,r):=E_x[\sum\limits_{k=0}^{\tau_C-1}f(\Phi_k)r^k],\ x\in E\}$ 是方程

$$V(x)=r\int_{C^c}P(x,dy)V(y)+f(x),\ \ x\in E \tag{1.1}$$

的最小非负解.

推论 1.5 随机泛函的指数矩 $\{G_C(x,f,r)=E_x[\sum\limits_{k=0}^{\tau_C-1}f(\Phi_k)r^k],\ x\in C^c\}$ 是方程

$$V(x)=r\int_{C^c}P(x,dy)V(y)+f(x),\ \ x\in C^c$$

的最小非负解.

应用定理 1.4, 我们得到了下面的矩条件与漂移条件等价.

定理 1.6 设 $\Phi=\{\Phi_n,n\geq 0\}$ 是 $(E,\mathcal{E})$ 上的马氏链, $r>1$, $C\in\mathcal{E}^+$, 函数 $f:E\to[0,\infty)$, 在集合 C 上有界, 则下列两个条件等价

(1) 方程

$$\begin{cases}\Delta V(x)\leq -(1-\frac{1}{r})V(x)-\frac{f(x)}{r}, & x\in C^c,\\ \sup\limits_{x\in C}\int_{C^c}P(x,dy)V(y)<\infty\end{cases} \tag{1.2}$$

有几乎处处 (关于 ψ) 有限非负解.

(2) $\sup\limits_{x\in C}E_x[\sum\limits_{k=0}^{\tau_C-1}f(\Phi_k)r^k]<\infty$.

注 1.7 对于连续时间可数状态空间马氏链 $\{X_t,t\geq 0\}$, B 是一个非空有限子集, 则集合 B 的首次返回时的指数矩在集合 B 上有界等价于从集合 B 中任一个状态出发, 首次返回此状态的指数矩是有限的, 即 $\sup\limits_{x\in B}E_x[e^{\lambda\zeta_B}]<\infty\Leftrightarrow E_j[e^{\lambda'\zeta_j}]<\infty,\ \ j\in B$, 其中 $\zeta_B=\inf\{t\geq J_1:X_t\in B\}$, $J_1=\inf\{t\geq 0,X_t\neq X_0\}$ 表示马氏链 $\{X_t,t\geq 0\}$ 第一次跳跃时刻. 利用此性质, 证明了可数状态空间马氏链的漂移条件与矩条件等价 (见文 [7], §6.6, 引理 6.4). 而一般状态空间马氏链没有类似的性质, 本文利用随机泛函的指数矩是相应方程的最小非负解, 证明了一般状态空间马氏链的矩条件与漂移条件等价.

2 定义及引理

定义 2.1 [6] 称集合 $A\in\mathcal{E}$ 是满集, 若 $\psi(A^c)=0$. 称集合 $A\in\mathcal{E}$ 是吸收集, 若 $P(x,A)=1,\quad\forall x\in A$.

引理 2.2 [6] 设马氏链是 ψ 不可约的, 则每个非空的吸收集都是满集.

引理 2.3 [6] 设马氏链 $\Phi=\{\Phi_n, n\geq 0\}$ 是 Harris 常返的, 则对任意的 $x\in E$, $B\in\mathcal{E}^+$, 有 $P_x(\eta_B=\infty)=1$, 更有 $P_x(\tau_B<\infty)=1$.

令 $\mathcal{H}$ 表示从 E 到 $\overline{R}_+ := [0,\infty]$ 上的映射集合: $\mathcal{H}$ 包含 1, 且对非负线性组合及单调递增极限封闭, 则 $\mathcal{H}$ 是一个凸锥. 称 A 是从 $\mathcal{H}$ 到 $\mathcal{H}$ 的一个锥射, 若 $A0=0$,

$$A(c_1f_1+c_2f_2)=c_1Af_1+c_2Af_2,\quad \forall c_1,\, c_2\geq 0,\, f_1,\, f_2\in\mathcal{H}.$$

令 $\mathcal{A}:=\{A:\mathcal{H}\to\mathcal{H},\ A\text{是一个锥射},\ \text{当}f_n\in\mathcal{H},\ f_n\uparrow f\Rightarrow Af_n\uparrow Af\}$.

定义 2.4 [5] 给定 $A\in\mathcal{A}$, $g\in\mathcal{H}$,称 f^* 为方程

$$f(x)=(Af)(x)+g(x),\ \ x\in E \tag{2.1}$$

的最小非负解, 若 f^* 满足 (2.1) 式且对于任何满足 (2.1) 式的 $\widetilde{f}\in\mathcal{H}$,都有

$$\widetilde{f}(x)\geq f^*(x),\ \ \forall x\in E.$$

引理 2.5 [5] 方程 (2.1) 的最小非负解一定存在并且唯一. 进一步, 最小非负解可以通过下面递推方法构造: 令

$$f^{(0)}=0,\quad f^{(n+1)}=Af^{(n)}+g,\quad n\geq 0,$$

则当 $n\to\infty$ 时,$f^{(n)}\uparrow f^*$.

引理 2.6 [5] (局部化定理) 设 U 是一个非负可测核, $\{f^*(x), x\in E\}$ 是方程

$$f(x)=\int U(x,dy)f(y)+g(x),\qquad x\in E$$

的最小非负解, 令 $G\subset E$ 且 $\{\widetilde{f}^*(x), x\in G\}$ 是方程

$$f(x)=\int_G U(x,dy)f(y)+\int_{G^c} U(x,dy)f^*(y)+g(x),\qquad x\in G$$

的最小非负解, 则有

$$\widetilde{f}^*(x)=f^*(x),\qquad x\in G.$$

引理 2.7 [5] 设 $A,\ \widetilde{A}\in\mathcal{A},\ g,\ \widetilde{g}\in\mathcal{H}$, 满足 $\widetilde{A}\geq A,\ \widetilde{g}\geq g,\ f^*$ 是方程 (2.1) 的最小非负解, 则方程

$$\widetilde{f}\geq\widetilde{A}\widetilde{f}+\widetilde{g},\qquad \widetilde{f}\in\mathcal{H}$$

的任意解 $\widetilde{f}$,都有 $\widetilde{f}\geq f^*$.

设 $C\in\mathcal{E}^+$,令 $\tau_C^{(n)}:=\min\{\tau_C,n\}$, $G_C^{(n)}(x,f,r):=E_x[\sum\limits_{k=0}^{\tau_C^{(n)}-1}f(\Phi_k)r^k]$, $\forall n\geq 1$, 则有 $\tau_C^{(n)}\uparrow\tau_C$. 由引理 2.3 及单调收敛定理, 有

$$\lim_{n\to\infty}G_C^{(n)}(x,f,r)=E_x[\sum_{k=0}^{\tau_C-1}f(\Phi_k)r^k]=G_C(x,f,r).$$

引理 2.8 沿用上面的记号, $\forall x\in E$, 有下面的递推公式

$$G_C^{(1)}(x,f,r)=f(x), \tag{2.2}$$

$$G_C^{(n+1)}(x,f,r)=r\int_{C^c}P(x,dy)G_C^{(n)}(y,f,r)+f(x),\ \ n\geq 1. \tag{2.3}$$

证 当 $n=1$ 时, $\tau_C^{(1)}=\min\{\tau_C,1\}=1$,所以

$$G_C^{(1)}(x,f,r)=E_x[\sum_{k=0}^{\tau_C^{(1)}-1}f(\Phi_k)r^k]=f(x).$$

用 θ 表示通常的漂移算子. 注意到, 在 $\tau_C>1$ 时, 有 $\tau_C=\theta\tau_C+1$,因此

$$\tau_C^{(n+1)}I_{\{1<\tau_C\}}=\min\{\theta\tau_C+1,n+1\}I_{\{1<\tau_C\}}=\{\theta\tau_C^{(n)}+1\}I_{\{1<\tau_C\}},\quad n\geq 1.$$

由马氏性, 对任意的 $n\geq 1$,有

$$\begin{aligned}
G_C^{(n+1)}(x,f,r)&=E_x[\sum_{k=0}^{\tau_C^{(n+1)}-1}f(\Phi_k)r^k]\\
&=E_x[\sum_{k=0}^{\tau_C^{(n+1)}-1}f(\Phi_k)r^kI_{\{1=\tau_C\}}]+E_x[\sum_{k=0}^{\tau_C^{(n+1)}-1}f(\Phi_k)r^kI_{\{1<\tau_C\}}]\\
&=E_x[f(x)I_{\{1=\tau_C\}}]+E_x[f(x)I_{\{1<\tau_C\}}]+E_x[\sum_{k=1}^{\theta\tau_C^{(n)}}f(\Phi_k)r^kI_{\{1<\tau_C\}}]\\
&=E_x[E_x[\sum_{k=0}^{\theta\tau_C^{(n)}-1}f(\Phi_{k+1})r^{k+1}I_{\{1<\tau_C\}}|\mathcal{F}_1]]+f(x)\\
&=E_x[I_{\{1<\tau_C\}}E_x[\sum_{k=0}^{\theta\tau_C^{(n)}-1}f(\Phi_{k+1})r^{k+1}|\mathcal{F}_1]]+f(x)\\
&=rE_x[I_{\{1<\tau_C\}}E_x[\theta\sum_{k=0}^{\tau_C^{(n)}-1}f(\Phi_k)r^k|\mathcal{F}_1]]+f(x)\\
&=rE_x[I_{\{1<\tau_C\}}E_{\Phi_1}[\sum_{k=0}^{\tau_C^{(n)}-1}f(\Phi_k)r^k]]+f(x)\\
&=r\int_{C^c}P(x,dy)G_C^{(n)}(y,f,r)+f(x).
\end{aligned}$$

3 主要结果的证明

定理 1.4 的证明 令

$$V^{(0)}(x)=0,$$

$$V^{(n+1)}(x)=r\int_{C^c}P(x,dy)V^{(n)}(y)+f(x),\quad n\geq 0.$$

下面利用归纳法证明, $\forall n\geq 1,\ \ x\in E$, 都有

$$V^{(n)}(x)=G_C^{(n)}(x,f,r).\tag{3.1}$$

当 $n=1$ 时, 由 (2.2) 式, 有

$$V^{(1)}(x)=f(x)=G_C^{(1)}(x,f,r),\ \ \forall x\in E.\tag{3.2}$$

即 $n=1$ 时, (3.1) 式成立.

假设 $n=k>1$ 时, (3.1) 式成立, 即 $V^{(k)}(x)=G_C^{(k)}(x,f,r)$. 由 (2.3) 式, 有

$$\begin{aligned}V^{(k+1)}(x)&=r\int_{C^c}P(x,dy)V^{(k)}(y)+f(x)\\&=r\int_{C^c}P(x,dy)G_C^{(k)}(y,f,r)+f(x)\\&=G_C^{(k+1)}(x,f,r).\end{aligned}$$

即 $n=k+1$ 时, (3.1) 式仍成立. 由引理 2.5 可知, 方程 (1.1) 的最小非负解为

$$V^*(x)=\lim_{n\to\infty}V^{(n)}(x)=\lim_{n\to\infty}G_C^{(n)}(x,f,r)=G_C(x,f,r)=E_x[\sum_{k=0}^{\tau_C-1}f(\Phi_k)r^k],\quad x\in E.$$

推论 1.5 的证明 由定理 1.4 及局部化定理 (引理 2.6) 可知结论成立.

定理 1.6 的证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 令

$$\widetilde{V}(x)=E_x[\sum_{k=0}^{\sigma_C-1}f(\Phi_k)r^k]=\begin{cases}E_x[\sum\limits_{k=0}^{\tau_C-1}f(\Phi_k)r^k], & x\in C^c,\\ 0, & x\in C,\end{cases}$$

约定当 $n<m$ 时, $\sum\limits_{k=m}^{n}a_k=0$.

当 $x\in C^c$ 时, 由推论 1.5, 有

$$\begin{aligned}\Delta\widetilde{V}(x)&=P\widetilde{V}(x)-\widetilde{V}(x)\\&=\int_{C^c}P(x,dy)E_y[\sum_{k=0}^{\tau_C-1}f(\Phi_k)r^k]-E_x[\sum_{k=0}^{\tau_C-1}f(\Phi_k)r^k]\\&=(\frac{1}{r}-1)E_x[\sum_{k=0}^{\tau_C-1}f(\Phi_k)r^k]-\frac{f(x)}{r}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

由推论 1.5 及引理 2.7 可知, $\{\widetilde{V}(x),x\in E\}$ 是方程 (1.2) 的最小非负解. 由条件 (1) 成立, 有

$$\sup_{x\in C}\int_{C^c}P(x,dy)E_y[\sum_{k=0}^{\tau_C-1}f(\Phi_k)r^k]\leq\sup_{x\in C}\int_{C^c}P(x,dy)V(y)<\infty.\tag{3.4}$$

由定理 1.4 可知

$$E_x[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} f(\Phi_k)r^k] = r\int_{C^c} P(x,dy)E_y[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} f(\Phi_k)r^k] + f(x),\ \ x\in E. \tag{3.5}$$

由 (3.4), (3.5) 式以及函数 f 在集合 C 上有界, 有

$$\begin{aligned}\sup_{x\in C} E_x[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} f(\Phi_k)r^k] &\le r\sup_{x\in C}\int_{C^c} P(x,dy)E_y[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} f(\Phi_k)r^k] + \sup_{x\in C} f(x)\\ &\le r\sup_{x\in C}\int_{C^c} P(x,dy)V(y) + \sup_{x\in C} f(x) < \infty.\end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1) 设 $\sup\limits_{x\in C} E_x[\sum\limits_{k=0}^{\tau_C-1} f(\Phi_k)r^k] < \infty$, 则 $b := \frac{1}{r}\sup\limits_{x\in C} E_x[\sum\limits_{k=0}^{\tau_C-1} f(\Phi_k)r^k] < \infty$. 当 $x\in C$ 时, 由定理 1.4 以及 f 的非负性, 有

$$\begin{aligned}\Delta\widetilde{V}(x) &= P\widetilde{V}(x) - \widetilde{V}(x) = \int_{C^c} P(x,dy)E_y[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} f(\Phi_k)r^k]\\ &= \frac{1}{r}E_x[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} f(\Phi_k)r^k] - \frac{f(x)}{r} \le \frac{1}{r}E_x[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} f(\Phi_k)r^k] \le b < \infty.\end{aligned} \tag{3.6}$$

由 (3.3), (3.6) 式以及 f 的非负性, 有

$$\sup_{x\in C}\int_{C^c} P(x,dy)E_y[\sum_{k=0}^{\tau_C-1} f(\Phi_k)r^k] \le b < \infty. \tag{3.7}$$

$$\Delta\widetilde{V}(x) \le -(1-\frac{1}{r})\widetilde{V}(x) + bI_C(x), \qquad \forall x\in E. \tag{3.8}$$

下证集合 $S := \{x\in E : \widetilde{V}(x) < \infty\}$ 是一个吸收集. 反证法, 假设存在 $x_0\in S$ 满足 $P(x_0, S^c) > 0$, 由 (3.8) 式, 有

$$\infty = \int_{S^c} P(x_0,dy)\widetilde{V}(y) \le \int_E P(x_0,dy)\widetilde{V}(y) \le \frac{1}{r}\widetilde{V}(x_0) + b < \infty,$$

矛盾, 因此 $\forall x\in S$, 都有 $P(x,S^c)=0$, 即 S 是马氏链的吸收集. 由 $\emptyset\ne C\subset S$ 以及引理 2.2 可知, 集合 S 是满集, 即 $\Psi(S)=1$, 因此 $\widetilde{V}(x)$ 是几乎处处有限的非负函数. 由 (3.3), (3.7) 式可知, $\{E_x[\sum\limits_{k=0}^{\sigma_C-1} f(\Phi_k)r^k], x\in E\}$ 是方程 (1.2) 的几乎处处有限非负解. 证毕.

参 考 文 献

[1] 王梓坤. 生灭过程与马尔可夫链 (第二版)[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[2] 李俊平, 侯振挺. Markov 骨架过程积分型泛函的分布与矩及其应用举例 [J]. 应用数学学报, 2001, 24(2): 277–283.

[3] 来向荣. 非齐次生灭过程的积分型泛函 [J]. 工程数学学报, 1994, 11(2): 69–75.

[4] 陈柳鑫, 李俊平, 侯振挺. 非齐次 (H, Q) 过程积分型泛函的分布与矩 [J]. 长沙铁道学院学报, 2000, 18(3): 81–85.

[5] Chen Mufa. From markov chains to non-equilibrium particle systems (2nd ed.)[M]. Singapore: World Scientific, 2004.

[6] Meyn S P, Tweedie R L. Markov chains and stochastic stability[M]. London: Springer-Verlag, 1992.

[7] Anderson W J. Continuous-time markov chains: an applications-oriented approach[M]. New York: Springer-Verlag, 1991.

[8] 胡迪鹤. 随机过程论: 基础, 理论, 应用 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2005.

[9] 徐侃, 张绍义. Markov 耦合与 Markov 过程的遍历性 [J]. 数学杂志, 2001, 21(3): 315–318.

[10] 高振龙, 王伟刚, 胡迪鹤. 随机环境中马氏链转移函数的收敛性 [J]. 数学杂志, 2008, 28(5): 546–550.

THE MOMENTS OF EXPONENTIAL OF STOCHASTIC FUNCTIONAL FOR MARKOV CHAINS ON GENERAL STATE SPACE

QU Cong [1], ZHANG Shui-li [1,2]

(*1.Institute of Mathematics and Information Science, Pingdingshan University, Pingdingshan 467000,China*)

(*2.Institute of Mathematics and Statistics, Hubei University, Wuhan 430062, China*)

Abstract: In this paper, we research the exponential moments of stochastic functional for markov chains on general state space. By using the theory of minimal nonnegative solutions, we obtain the minimal nonnegative solutions to the corresponding equation is the exponential moments of stochastic functional, the results for markov chains on denumerable space are enlarged, as application, the equivalence between the exponential moments of stochastic functional and drift condition, are proved.

Keywords: Markov chains; stochastic functional; minimal nonnegative solutions

2010 MR Subject Classification: 60J05