

3×3 阶上三角算子矩阵的点谱和剩余谱扰动

黄俊杰, 吴秀峰, 阿拉坦仓

(内蒙古大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特 010021)

摘 要: 基于值域的稠密性和闭性, 有界线性算子 T 的点谱和剩余谱可分别细分为 $\sigma_{p,1}(T), \sigma_{p,2}(T)$ 和 $\sigma_{r,1}(T), \sigma_{r,2}(T)$. 设 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ 为无穷维复可分 Hilbert 空间, 给定 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1), B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2), C \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$, 结合分析方法与算子分块技巧给出了 $M_{D,E,F}$ 的上述四种谱随 D, E, F 扰动的完全描述.

关键词: 算子矩阵; 点谱; 剩余谱; 扰动

MR(2010) 主题分类号: 47A10; 47A55

中图分类号: O177.1; O177.7

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2016)05-1056-11

1 引言

缺少了某些元素的算子矩阵称为缺项算子矩阵. 算子矩阵的谱补问题旨在讨论缺项算子矩阵中所缺的元素对整个算子矩阵谱的影响, 在换位提升理论, 插值理论, 以及系统控制理论中具有重要应用. 算子矩阵的谱扰动属于谱补问题的研究范畴, 它是当所缺的元素跑遍特定的集合时整个算子矩阵谱的稳定的组成部分.

设 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ 为无穷维复可分 Hilbert 空间. 以 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j)$ 表示从 $\mathcal{H}_i$ 到 $\mathcal{H}_j$ 的所有有界 (线性) 算子构成的集合, $\mathcal{B}(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_i)$ 简记为 $\mathcal{B}(\mathcal{H}_i)$, 其中 $i, j = 1, 2, 3$. 给定 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1), B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2), C \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$, 记

$$M_{D,E,F} = \begin{pmatrix} A & D & E \\ 0 & B & F \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},$$

其中

$$D \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1), E \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_1), F \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_3, \mathcal{H}_2)$$

为待定的未知算子. 显然, $M_{D,E,F}$ 是 $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3$ 上的缺项上三角算子矩阵. 为叙述方便, 对于给定算子 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1), B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$, 以 M_D 表示缺项 2×2 阶上三角算子矩阵

$$M_D = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2),$$

其中 $D \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ 待定.

经过近二十年的积累, 2×2 阶上三角算子矩阵的谱扰动研究已日臻完善, 涌现出诸如谱, 点谱, 剩余谱, 连续谱, 近似点谱, 亏谱, 本质谱, Weyl 谱, 以及 Browder 谱等的扰动结果

*收稿日期: 2014-04-11

接收日期: 2014-06-23

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11461049; 11371185); 内蒙古自治区自然科学基金资助 (2013JQ01).

作者简介: 黄俊杰 (1977-), 男, 蒙古族, 内蒙古兴安盟, 教授, 主要研究方向: 算子矩阵理论及应用.

[2, 3, 5–8, 10–18]. 例如, 文 [15] 研究了上三角算子矩阵 M_D 的点谱和剩余谱扰动, 得到如下结果

$$\begin{aligned}
 \bigcap_{D \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)} \sigma_{p,1}(M_D) &= \{\lambda \in \sigma_p(A) : \overline{\mathcal{R}(A - \lambda)} = \mathcal{H}_1, \overline{\mathcal{R}(B - \lambda)} = \mathcal{H}_2\} \\
 &\quad \cup \{\lambda \in \sigma_p(B) : \mathcal{R}(A - \lambda) = \mathcal{H}_1, \overline{\mathcal{R}(B - \lambda)} = \mathcal{H}_2\}, \\
 \bigcap_{D \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)} \sigma_{p,2}(M_D) &= \{\lambda \in \sigma_p(A) : \overline{\mathcal{R}(B - \lambda)} \neq \mathcal{H}_2\} \\
 &\quad \cup \{\lambda \in \sigma_p(A) : \mathcal{R}(B - \lambda) = \mathcal{H}_2, d(A - \lambda) > n(B - \lambda)\} \\
 &\quad \cup \{\lambda \in \sigma_p(B) : \mathcal{R}(A - \lambda) \text{ 闭}, d(A - \lambda) < n(B - \lambda), \overline{\mathcal{R}(B - \lambda)} \neq \mathcal{H}_2\}, \\
 \bigcap_{D \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)} \sigma_{r,1}(M_D) &= (\sigma_{r,1}(A) \cap \rho(B)) \cup (\sigma_{r,1}(A) \cap \sigma_{r,1}(B)) \\
 &\quad \cup (\rho(A) \cap \sigma_{r,1}(B)), \\
 \bigcap_{D \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)} \sigma_{r,2}(M_D) &= (\sigma_{r,2}(A) \cap \sigma_r(B)) \cup (\sigma_c(A) \cap \sigma_r(B)) \cup (\sigma_{r,2}(A) \cap \rho(B)) \\
 &\quad \cup (\rho(A) \cap \sigma_{r,2}(B)) \cup \{\lambda \in \sigma_{r,1}(A) \cap \sigma_{r,2}(B) : d(A - \lambda) < \infty\}.
 \end{aligned}$$

最近, 文 [4, 18] 分别研究了上三角算子矩阵 $M_{D,E,F}$ 的左 (右) 本质谱, 以及点谱, 剩余谱和连续谱的扰动; 文 [9] 给出了 $M_{D,E,F}$ 的点谱, 连续谱和剩余谱之并集的描述. 本文在文 [15] 的基础上探讨了 3×3 阶情形, 得到

$$\bigcap_{D,E,F} \sigma_{p,i}(M_{D,E,F}), \quad \bigcap_{D,E,F} \sigma_{r,i}(M_{D,E,F}) \quad (i = 1, 2)$$

的完全描述.

对于有界算子 T , 分别以 T^* , $\mathcal{N}(T)$ 和 $\mathcal{R}(T)$ 表示 T 的共轭算子, 零空间和值域; 以 $n(T)$, $d(T)$ 分别表示 $\mathcal{N}(T)$, $\mathcal{N}(T^*)$ 的维数, 即 $n(T) = \dim \mathcal{N}(T)$, $d(T) = \dim \mathcal{N}(T^*)$. 下面给出文中涉及的一些基本概念和辅助引理.

定义 1.1 ^[1] 设 T 为 Banach 空间 X 中的有界线性算子, 则 T 的预解集 $\rho(T)$ 定义为

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ 具有定义于 } X \text{ 上的有界逆}\},$$

并称集合 $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ 为 T 的谱.

由闭图象定理, $\lambda \in \rho(T)$ 当且仅当 $T - \lambda$ 是双射. 显然, $\sigma(T)$ 可分成下述互不相交的组成部分 $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T)$, 其中

$$\begin{aligned}
 \sigma_p(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ 不是单射}\}, \\
 \sigma_r(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ 是单射且 } \overline{\mathcal{R}(T - \lambda)} \neq X\}, \\
 \sigma_c(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ 是单射, } \overline{\mathcal{R}(T - \lambda)} = X \text{ 且 } \mathcal{R}(T - \lambda) \neq X\}
 \end{aligned}$$

分别为 T 的点谱, 剩余谱和连续谱. 类似于文 [1], 可对点谱和剩余谱进一步细分为

$$\begin{aligned}
 \sigma_{p,1}(T) &= \{\lambda \in \sigma_p(T) : \overline{\mathcal{R}(T - \lambda)} = X\}, \\
 \sigma_{p,2}(T) &= \{\lambda \in \sigma_p(T) : \overline{\mathcal{R}(T - \lambda)} \neq X\}, \\
 \sigma_{r,1}(T) &= \{\lambda \in \sigma_r(T) : \mathcal{R}(T - \lambda) \text{ 闭}\}, \\
 \sigma_{r,2}(T) &= \{\lambda \in \sigma_r(T) : \mathcal{R}(T - \lambda) \text{ 不闭}\}.
 \end{aligned}$$

此外, 称集合

$$\sigma_{\delta}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{R}(T - \lambda) \neq X\}$$

为 T 的亏谱. 为叙述方便, 记

$$\begin{aligned}\rho_l(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ 是左可逆的}\}, \\ \sigma_l(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ 不是左可逆的}\}, \\ \rho_m(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ 是 Moore-Penrose 可逆的}\}, \\ \sigma_m(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ 不是 Moore-Penrose 可逆的}\}, \\ \rho_{co}(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\mathcal{R}(T - \lambda)} = X\}, \\ \sigma_{co}(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\mathcal{R}(T - \lambda)} \neq X\}, \\ \rho_{in}(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ 是单射}\}, \\ \rho_{\delta}(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ 是满射}\}.\end{aligned}$$

如所熟知, $\lambda \in \rho_m(T)$ 当且仅当 $\mathcal{R}(T - \lambda)$ 闭; $\lambda \in \rho_l(T)$ 当且仅当 $T - \lambda$ 为具有闭值域的单射. 显然, $\sigma_{p,1}(T) = \sigma_p(T) \cap \rho_{co}(T)$, $\sigma_{p,2}(T) = \sigma_p(T) \cap \sigma_{co}(T)$, $\sigma_{r,1}(T) = \sigma_r(T) \cap \rho_m(T)$, $\sigma_{r,2}(T) = \sigma_r(T) \cap \sigma_m(T)$.

引理 1.1 ^[9] 设 X, Y 为 Banach 空间, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. 若 $\mathcal{R}(T)$ 不闭, 则存在无穷维子空间 $M \subset \overline{\mathcal{R}(T)}$ 使得

$$\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{R}(T) + M, \quad M \cap \mathcal{R}(T) = \{0\}.$$

引理 1.2 设 X, Y 为 Banach 空间, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. 下述结论显然成立.

- (i) 若 $S \in \mathcal{B}(X, Y)$ 为有限秩算子, 则 $\mathcal{R}(T)$ 闭当且仅当 $\mathcal{R}(T + S)$ 闭;
- (ii) 若 $U \in \mathcal{B}(Y), V \in \mathcal{B}(X)$ 为可逆算子, 则 $\mathcal{R}(T)$ 闭当且仅当 $\mathcal{R}(UTV)$ 闭.

引理 1.3 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1), B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2), C \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$ 为给定算子, 则任给 D, E, F 均有 $\lambda \in \rho_{in}(M_{D,E,F})$ 的充要条件为 $\lambda \in \rho_{in}(A) \cap \rho_{in}(B) \cap \rho_{in}(C)$.

引理 1.4 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1), B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2), C \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$ 为给定算子, 则任给 D, E, F 均有 $\lambda \in \rho_{co}(M_{D,E,F})$ 的充要条件为 $\lambda \in \rho_{co}(A) \cap \rho_{co}(B) \cap \rho_{co}(C)$.

引理 1.1 的证明见 [9, 推论 1]; 引理 1.2 是熟知的, 引理 1.3, 1.4 是显然的, 证明从略.

2 主要结论及其证明

本节给出本文的主要结果和证明. 为便于叙述, 以下记

$$\{e_i^{(1)}\}_{i=1}^{n(B-\lambda)}, \{e_i^{(2)}\}_{i=1}^{n(C-\lambda)}, \{f_i^{(1)}\}_{i=1}^{d(A-\lambda)}, \{f_i^{(2)}\}_{i=1}^{d(B-\lambda)}, \{h_i^{(1)}\}_{i=1}^{\infty}, \{h_i^{(2)}\}_{i=1}^{\infty}$$

分别为 $\mathcal{N}(B - \lambda), \mathcal{N}(C - \lambda), \mathcal{R}(A - \lambda)^{\perp}, \mathcal{R}(B - \lambda)^{\perp}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 的规范正交基, 其中 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1), B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2), C \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$.

定理 2.1 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1), B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2), C \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$ 为给定算子, 则

$$\begin{aligned}\bigcap_{D,E,F} \sigma_{p,1}(M_{D,E,F}) &= (\sigma_{p,1}(A) \cap \rho_{co}(B) \cap \rho_{co}(C)) \cup (\rho_{\delta}(A) \cap \sigma_{p,1}(B) \cap \rho_{co}(C)) \\ &\quad \cup (\rho_{\delta}(A) \cap \rho_{\delta}(B) \cap \sigma_{p,1}(C)).\end{aligned}\tag{2.1}$$

证 记 $\Sigma = \bigcap_{D,E,F} \sigma_{p,1}(M_{D,E,F})$, $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 依次为式 (2.1) 等号右端的集合. 先证 $\Sigma \supset \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$. 设 $\lambda \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, 由引理 1.4 可知任给 D, E, F 均有 $\lambda \in \rho_{\text{co}}(M_{D,E,F})$, 下面只须证还有 $\lambda \in \sigma_p(M_{D,E,F})$.

若 $\lambda \in \Sigma_1$, 则 $\lambda \in \sigma_p(A)$, 显然任给 D, E, F 均有 $\lambda \in \sigma_p(M_{D,E,F})$. 若 $\lambda \in \Sigma_2 \setminus \Sigma_1$, 则 $\lambda \in \rho(A) \cap \sigma_{p,1}(B) \cap \rho_{\text{co}}(C)$, 所以任给 D, E, F 均存在可逆算子 V 使得

$$\begin{pmatrix} A - \lambda & D & E \\ 0 & B - \lambda & F \\ 0 & 0 & C - \lambda \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} A - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & B - \lambda & F \\ 0 & 0 & C - \lambda \end{pmatrix}.$$

注意到 $\lambda \in \sigma_p(B)$ 和 V 的可逆性, 显然任给 D, E, F 均有 $\lambda \in \sigma_p(M_{D,E,F})$. 若 $\lambda \in \Sigma_3 \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$, 则 $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B) \cap \sigma_{p,1}(C)$, 同上讨论即可, 不再赘述.

下面证明 $\Sigma \subset \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$. 为此, 只须证若 $\lambda \notin \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ 必有 $\lambda \notin \Sigma$, 可分以下 4 种情形讨论.

情形 1 $\lambda \in \sigma_{\text{co}}(A) \cup \sigma_{\text{co}}(B) \cup \sigma_{\text{co}}(C)$. 此时, 取 D, E, F 均为零算子, 显然 $\overline{\mathcal{R}(M_{D,E,F} - \lambda)} \neq \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3$, 因此 $\lambda \notin \Sigma$.

情形 2 $\lambda \in \rho_{\text{co}}(A) \cap \rho_{\text{co}}(B) \cap \rho_{\text{co}}(C) \cap \rho_{\text{in}}(A) \cap \sigma_m(A)$. 此时, 由引理 1.1, 存在无穷维子空间 $M \subset \overline{\mathcal{R}(A - \lambda)}$ 使得 $M \cap \mathcal{R}(A - \lambda) = \{0\}$. 记 M 的某个含有无穷多元素的规范正交集为 $\{g_i^{(1)}\}_{i=1}^\infty$. 定义 $F = 0$,

$$\begin{cases} D(e_i^{(1)}) = g_{2i-1}^{(1)}, & i = 1, 2, \dots, n(B - \lambda), \\ D(y) = 0, & y \in \mathcal{N}(B - \lambda)^\perp, \\ E(e_i^{(2)}) = g_{2i}^{(1)}, & i = 1, 2, \dots, n(C - \lambda), \\ E(y) = 0, & y \in \mathcal{N}(C - \lambda)^\perp. \end{cases}$$

则 $M_{D,E,F} - \lambda$ 为单射, 显然 $\lambda \notin \Sigma$.

情形 3 $\lambda \in \rho_{\text{co}}(A) \cap \rho_{\text{co}}(B) \cap \rho_{\text{co}}(C) \cap \rho_{\text{in}}(A) \cap \rho_{\text{in}}(B) \cap \sigma_m(B)$. 此时, 类似于情形 2, 存在无穷维子空间 $N \subset \overline{\mathcal{R}(B - \lambda)}$ 使得 $N \cap \mathcal{R}(B - \lambda) = \{0\}$. 记 N 的某个含有无穷多元素的规范正交集为 $\{g_i^{(2)}\}_{i=1}^\infty$. 取 D, E 均为零算子, 并定义

$$\begin{cases} F(e_i^{(2)}) = g_i^{(2)}, & i = 1, 2, \dots, n(C - \lambda), \\ F(y) = 0, & y \in \mathcal{N}(C - \lambda)^\perp. \end{cases}$$

显然 $M_{D,E,F} - \lambda$ 为单射, 因此 $\lambda \notin \Sigma$.

情形 4 $\lambda \in \rho_{\text{co}}(A) \cap \rho_{\text{co}}(B) \cap \rho_{\text{co}}(C) \cap \rho_{\text{in}}(A) \cap \rho_{\text{in}}(B) \cap \rho_{\text{in}}(C)$. 此时, 由引理 1.3, 取 D, E, F 均为零算子便有 $M_{D,E,F} - \lambda$ 为单射, 因此 $\lambda \notin \Sigma$.

定理 2.2 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1), B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2), C \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$ 为给定算子, 则

$$\bigcap_{D,E,F} \sigma_{p,2}(M_{D,E,F}) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3,$$

其中

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= (\sigma_p(A) \cap \sigma_{co}(C)) \cup \{\lambda \in \sigma_p(A) \cap \rho_\delta(C) : d(B - \lambda) > n(C - \lambda)\} \\ &\quad \cup \{\lambda \in \sigma_{p,2}(A) \cap \rho_m(B) \cap \rho_\delta(C) : d(A - \lambda) + d(B - \lambda) > n(B - \lambda) + n(C - \lambda)\}, \\ \Sigma_2 &= \{\lambda \in \rho_l(A) \cap \sigma_{co}(C) : d(A - \lambda) < n(B - \lambda)\} \\ &\quad \cup \{\lambda \in \rho_l(A) \cap \sigma_{p,2}(B) \cap \rho_\delta(C) : d(A - \lambda) < n(B - \lambda), d(B - \lambda) > n(C - \lambda)\}, \\ \Sigma_3 &= \{\lambda \in \rho_l(A) \cap \rho_m(B) \cap \sigma_{p,2}(C) : d(A - \lambda) + d(B - \lambda) < n(B - \lambda) + n(C - \lambda)\}.\end{aligned}$$

证 记 $\Sigma = \bigcap_{D,E,F} \sigma_{p,2}(M_{D,E,F})$, $\Sigma_{11}, \Sigma_{12}, \Sigma_{13}$ 依次为 Σ_1 等号右端的集合. 先证 $\Sigma \supset \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$.

若 $\lambda \in \Sigma_{11}$, 则 $\lambda \in \sigma_p(A)$ 且 $\overline{\mathcal{R}(C - \lambda)} \neq \mathcal{H}_3$. 显然 $\lambda \in \Sigma$. 现设 $\lambda \in \Sigma_{12}$. 由 $\lambda \in \rho_\delta(C)$ 可知任给 D, E, F 算子矩阵 $M_{D,E,F} - \lambda$ 均有如下分块表示

$$M_{D,E,F} - \lambda = \begin{pmatrix} A - \lambda & D & E_1 & E_2 \\ 0 & (B - \lambda)_1 & F_{11} & F_{12} \\ 0 & 0 & F_{21} & F_{22} \\ 0 & 0 & (C - \lambda)_1 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_2 \\ \mathcal{N}(C - \lambda)^\perp \\ \mathcal{N}(C - \lambda) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \overline{\mathcal{R}(B - \lambda)} \\ \mathcal{R}(B - \lambda)^\perp \\ \mathcal{H}_3 \end{pmatrix},$$

其中 $(C - \lambda)_1$ 为可逆算子. 因此存在可逆算子 U 使得

$$U \begin{pmatrix} A - \lambda & D & E_1 & E_2 \\ 0 & (B - \lambda)_1 & F_{11} & F_{12} \\ 0 & 0 & F_{21} & F_{22} \\ 0 & 0 & (C - \lambda)_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - \lambda & D & 0 & E_2 \\ 0 & (B - \lambda)_1 & 0 & F_{12} \\ 0 & 0 & 0 & F_{22} \\ 0 & 0 & (C - \lambda)_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意到 $d(B - \lambda) > n(C - \lambda)$ 可知无论如何选取 D, E, F 均有 F_{22} 具有闭值域且不是满射, 进而由 U 的可逆性得到 $\lambda \in \sigma_{co}(M_{D,E,F})$. 再由 $\lambda \in \sigma_p(A)$, 显然 $\lambda \in \Sigma$. 以下假设 $\lambda \in \Sigma_{13}$. 由于 $\lambda \in \rho_\delta(C) \cap \rho_m(B)$, 所以任给 D, E, F 均有

$$M_{D,E,F} - \lambda = \begin{pmatrix} (A - \lambda)_1 & D_{11} & D_{12} & E_{11} & E_{12} \\ 0 & D_{21} & D_{22} & E_{21} & E_{22} \\ 0 & (B - \lambda)_1 & 0 & F_{11} & F_{12} \\ 0 & 0 & 0 & F_{21} & F_{22} \\ 0 & 0 & 0 & (C - \lambda)_1 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{N}(B - \lambda)^\perp \\ \mathcal{N}(B - \lambda) \\ \mathcal{N}(C - \lambda)^\perp \\ \mathcal{N}(C - \lambda) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{R}(A - \lambda)} \\ \mathcal{R}(A - \lambda)^\perp \\ \mathcal{R}(B - \lambda) \\ \mathcal{R}(B - \lambda)^\perp \\ \mathcal{H}_3 \end{pmatrix},$$

其中 $(B - \lambda)_1, (C - \lambda)_1$ 为可逆算子. 因此存在可逆算子 U 使得

$$U(M_{D,E,F} - \lambda) = \begin{pmatrix} (A - \lambda)_1 & 0 & D_{12} & 0 & E'_{12} \\ 0 & 0 & D_{22} & 0 & E'_{22} \\ 0 & (B - \lambda)_1 & 0 & 0 & F_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_{22} \\ 0 & 0 & 0 & (C - \lambda)_1 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $E'_{12} = E_{12} - D_{11}(B - \lambda)_1^{-1}F_{12}$, $E'_{22} = E_{22} - D_{21}(B - \lambda)_1^{-1}F_{12}$. 由

$$d(A - \lambda) + d(B - \lambda) > n(B - \lambda) + n(C - \lambda)$$

易知无论如何选取 D, E, F 均有 $\begin{pmatrix} D_{22} & E'_{22} \\ 0 & F_{22} \end{pmatrix}$ 具有闭值域且不是满射, 结合 $\lambda \in \sigma_p(A)$ 便有 $\lambda \in \Sigma$. 于是 $\Sigma \supset \Sigma_1$.

设 $\lambda \in \Sigma_2$. 由于 $\lambda \in \rho_l(A)$, 所以任给 D, E, F 均有

$$M_{D,E,F} - \lambda = \begin{pmatrix} (A - \lambda)_1 & D_{11} & D_{12} & E_1 \\ 0 & D_{21} & D_{22} & E_2 \\ 0 & (B - \lambda)_1 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 & C - \lambda \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{N}(B - \lambda)^\perp \\ \mathcal{N}(B - \lambda) \\ \mathcal{H}_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{R}(A - \lambda) \\ \mathcal{R}(A - \lambda)^\perp \\ \mathcal{H}_2 \\ \mathcal{H}_3 \end{pmatrix},$$

其中 $(A - \lambda)_1$ 为可逆算子. 因此存在可逆算子 V 使得

$$(M_{D,E,F} - \lambda)V = \begin{pmatrix} (A-\lambda)_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{21} & D_{22} & E_2 \\ 0 & (B-\lambda)_1 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 & C-\lambda \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

注意到 $n(B - \lambda) > d(A - \lambda)$, 显然无论如何选取 D, E, F 均有 D_{22} 不是单射, 进而由式 (2.2) 便知 $\lambda \in \sigma_p(M_{D,E,F})$. 这样, 若 $\lambda \in \sigma_{co}(C)$, 则任给 D, E, F 均有 $\lambda \in \sigma_{co}(M_{D,E,F})$, 显然 $\lambda \in \Sigma$; 若 $\lambda \in \rho_\delta(C)$ 且 $d(B - \lambda) > n(C - \lambda)$, 则由 Σ_{12} 的证明可知任给 D, E, F 均有 $\lambda \in \sigma_{co}(M_{D,E,F})$, 从而 $\lambda \in \Sigma$. 于是 $\Sigma \supset \Sigma_2$.

现设 $\lambda \in \Sigma_3$. 由 $\lambda \in \rho_l(A) \cap \rho_m(B)$ 可知任给 D, E, F 均有

$$M_{D,E,F} - \lambda = \begin{pmatrix} (A-\lambda)_1 & D_{11} & D_{12} & E_{11} & E_{12} \\ 0 & D_{21} & D_{22} & E_{21} & E_{22} \\ 0 & (B-\lambda)_1 & 0 & F_{11} & F_{12} \\ 0 & 0 & 0 & F_{21} & F_{22} \\ 0 & 0 & 0 & (C-\lambda)_1 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{N}(B-\lambda)^\perp \\ \mathcal{N}(B-\lambda) \\ \mathcal{N}(C-\lambda)^\perp \\ \mathcal{N}(C-\lambda) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{R}(A-\lambda)^\perp \\ \mathcal{R}(A-\lambda)^\perp \\ \mathcal{R}(B-\lambda) \\ \mathcal{R}(B-\lambda)^\perp \\ \mathcal{H}_3 \end{pmatrix},$$

其中 $(A - \lambda)_1, (B - \lambda)_1$ 均为可逆算子, $(C - \lambda)_1$ 为单射. 因此存在可逆算子 U, V 使得

$$U(M_{D,E,F} - \lambda)V = \begin{pmatrix} (A-\lambda)_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{22} & E'_{21} & E'_{22} \\ 0 & (B-\lambda)_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{21} & F_{22} \\ 0 & 0 & 0 & C-\lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

其中 $E'_{21} = E_{21} - D_{21}(B - \lambda)_1^{-1}F_{11}$, $E'_{22} = E_{22} - D_{21}(B - \lambda)_1^{-1}F_{12}$. 由

$$d(A - \lambda) + d(B - \lambda) < n(B - \lambda) + n(C - \lambda)$$

易知无论如何选取 D, E, F 均有 $\begin{pmatrix} D_{22} & E'_{22} \\ 0 & F_{22} \end{pmatrix}$ 不是单射, 进而由式 (2.3) 可有 $\lambda \in \sigma_p(M_{D,E,F})$. 注意到 $\lambda \in \sigma_{p,2}(C)$, 则任给 D, E, F 均有 $\lambda \in \sigma_{co}(M_{D,E,F})$, 显然 $\lambda \in \Sigma$. 于是 $\Sigma \supset \Sigma_3$. 综上所述可知 $\Sigma \supset \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$.

下面证明相反的包含关系. 为此只须证若 $\lambda \notin \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ 必有 $\lambda \notin \Sigma$, 可分以下 6 种情形讨论.

情形 1 $\lambda \in \rho_{in}(A) \cap \sigma_m(A)$. 此时, 取定理 2.1 中情形 2 的 D, E, F 便有 $M_{D,E,F} - \lambda$ 为单射, 因此 $\lambda \notin \Sigma$.

情形 2 $\lambda \in \rho_l(A) \cap \sigma_m(B)$ 且 $d(A - \lambda) \geq n(B - \lambda)$. 此时, 取定理 2.1 中情形 3 的集合 $N, \{g_i^{(2)}\}_{i=1}^\infty$ 和算子 E, F , 并定义

$$\begin{cases} D(e_i^{(1)}) = f_i^{(1)}, & i = 1, 2, \dots, n(B - \lambda), \\ D(y) = 0, & y \in \mathcal{N}(B - \lambda)^\perp. \end{cases}$$

则 $M_{D,E,F} - \lambda$ 为单射, 显然 $\lambda \notin \Sigma$.

情形 3 $\lambda \in \rho_l(A) \cap \rho_m(B)$, $d(A - \lambda) \geq n(B - \lambda)$ 且 $d(A - \lambda) + d(B - \lambda) \geq n(B - \lambda) + n(C - \lambda)$. 此时, 定义

$$\begin{cases} D(e_i^{(1)}) = f_i^{(1)}, & i = 1, 2, \dots, n(B - \lambda), \\ D(y) = 0, & y \in \mathcal{N}(B - \lambda)^\perp. \end{cases}$$

若 $d(B - \lambda) \geq n(C - \lambda)$, 则定义 $E = 0$,

$$\begin{cases} F(e_i^{(2)}) = f_i^{(2)}, & i = 1, 2, \dots, n(B - \lambda), \\ F(y) = 0, & y \in \mathcal{N}(B - \lambda)^\perp; \end{cases}$$

若 $d(B - \lambda) < n(C - \lambda)$, 由 $d(A - \lambda) + d(B - \lambda) \geq n(B - \lambda) + n(C - \lambda)$ 可知

$$d(A - \lambda) - n(B - \lambda) \geq n(C - \lambda) - d(B - \lambda).$$

则定义

$$\begin{cases} E(e_{d(B-\lambda)+i}^{(2)}) = f_{n(B-\lambda)+i}^{(1)}, & i = 1, 2, \dots, n(C - \lambda) - d(B - \lambda), \\ E(y) = 0, & y \perp \{e_i^{(2)}\}_{i=d(B-\lambda)+1}^{n(C-\lambda)-d(B-\lambda)}, \\ F(e_i^{(2)}) = f_i^{(2)}, & i = 1, 2, \dots, d(B - \lambda), \\ F(y) = 0, & y \perp \{e_i^{(2)}\}_{i=1}^{d(B-\lambda)}. \end{cases}$$

容易验证 $M_{D,E,F} - \lambda$ 为单射, 显然 $\lambda \notin \Sigma$.

情形 4 $\lambda \in \rho_{\text{co}}(C) \cap \sigma_m(C)$. 此时, 注意到 $\lambda \in \sigma_m(C)$ 当且仅当 $\bar{\lambda} \in \sigma_m(C^*)$. 由引理 1.1, 存在无穷维子空间 $Z \subset \overline{\mathcal{R}(C^* - \bar{\lambda})} = \mathcal{N}(C - \lambda)^\perp$ 使得 $Z \cap \mathcal{R}(C^* - \bar{\lambda}) = \{0\}$. 记 Z 的某个含有无穷多元素的规范正交集为 $\{g_i^{(3)}\}_{i=1}^\infty$. 定义 $D = 0$,

$$\begin{cases} E(g_i^{(3)}) = h_i^{(1)}, & i = 1, 2, \dots, \\ E(y) = 0, & y \perp \{g_i^{(3)}\}_{i=1}^\infty, \\ F(g_i^{(3)}) = h_i^{(2)}, & i = 1, 2, \dots, \\ F(y) = 0, & y \perp \{g_i^{(3)}\}_{i=1}^\infty, \end{cases}$$

则 $E^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3)$, $F^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ 均为单射, 而且 $\mathcal{R}(E^*) = \mathcal{R}(F^*) = \text{span}\{g_i^{(3)} : i = 1, 2, \dots\}$. 注意到 $Z \cap \mathcal{R}(C^* - \bar{\lambda}) = \{0\}$ 和 $\lambda \in \rho_{\text{co}}(C)$, 所以立即得到 $M_{D,E,F}^* - \bar{\lambda}$ 是单射. 即 $M_{D,E,F} - \lambda$ 具有稠值域, 从而 $\lambda \notin \Sigma$.

情形 5 $\lambda \in \sigma_m(B) \cap \rho_\delta(C)$ 且 $d(B - \lambda) \leq n(C - \lambda)$. 此时, 类似于情形 4, 存在无穷维子空间 $W \subset \overline{\mathcal{R}(B^* - \bar{\lambda})} = \mathcal{N}(B - \lambda)^\perp$ 使得 $W \cap \mathcal{R}(B^* - \bar{\lambda}) = \{0\}$. 记 W 的某个含有无穷多元素的规范正交集为 $\{g_i^{(4)}\}_{i=1}^\infty$. 定义 $E = 0$,

$$\begin{cases} D(g_i^{(4)}) = h_i^{(1)}, & i = 1, 2, \dots, \\ D(y) = 0, & y \perp \{g_i^{(4)}\}_{i=1}^\infty, \\ F(e_i^{(2)}) = f_i^{(2)}, & i = 1, 2, \dots, d(B - \lambda), \\ F(y) = 0, & y \perp \{e_i^{(2)}\}_{i=1}^{d(B-\lambda)}. \end{cases}$$

显然, $M_{D,E,F} - \lambda$ 具有稠值域, 因此 $\lambda \notin \Sigma$.

情形 6 $\lambda \in \rho_m(B) \cap \rho_\delta(C)$, $d(B - \lambda) \leq n(C - \lambda)$ 且 $d(A - \lambda) + d(B - \lambda) \leq n(B - \lambda) + n(C - \lambda)$. 此时, 定义

$$\begin{cases} F(e_i^{(2)}) = f_i^{(2)}, & i = 1, 2, \dots, d(B - \lambda), \\ F(y) = 0, & y \perp \{e_i^{(2)}\}_{i=1}^{d(B-\lambda)}. \end{cases}$$

若 $d(A - \lambda) \leq n(B - \lambda)$, 则定义 $E = 0$,

$$\begin{cases} D(e_i^{(1)}) = f_i^{(1)}, & i = 1, 2, \dots, d(A - \lambda), \\ D(y) = 0, & y \perp \{e_i^{(1)}\}_{i=1}^{d(A-\lambda)}; \end{cases}$$

否则注意到 $d(A - \lambda) - n(B - \lambda) \leq n(C - \lambda) - d(B - \lambda)$, 定义

$$\begin{cases} D(e_i^{(1)}) = f_i^{(1)}, & i = 1, 2, \dots, n(B - \lambda), \\ D(y) = 0, & y \in \mathcal{N}(B - \lambda)^\perp, \\ E(e_{d(B-\lambda)+i}^{(2)}) = f_{n(B-\lambda)+i}^{(1)}, & i = 1, 2, \dots, d(A - \lambda) - n(B - \lambda), \\ E(y) = 0, & y \perp \{e_i^{(2)}\}_{i=1}^{d(A-\lambda)-n(B-\lambda)}. \end{cases}$$

不难看出 $M_{D,E,F} - \lambda$ 是满射, 从而 $\lambda \notin \Sigma$.

定理 2.3 设 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$, $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$ 为给定算子, 则

$$\begin{aligned} \bigcap_{D,E,F} \sigma_{r,1}(M_{D,E,F}) &= (\sigma_{r,1}(A) \cap \rho(B) \cap \rho(C)) \cup (\rho_l(A) \cap \sigma_{r,1}(B) \cap \rho(C)) \\ &\quad \cup (\rho_l(A) \cap \rho_l(B) \cap \sigma_{r,1}(C)). \end{aligned} \quad (2.4)$$

证 记 $\Sigma = \bigcap_{D,E,F} \sigma_{r,1}(M_{D,E,F})$, $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 依次为式 (2.4) 右端的集合. 先证 $\Sigma \supset \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$. 设 $\lambda \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, 显然 $\lambda \in \rho_l(A) \cap \rho_l(B) \cap \rho_l(C)$, 所以任给 D, E, F 均有

$$M_{D,E,F} - \lambda = \begin{pmatrix} (A-\lambda)_1 & D_1 & E_1 \\ 0 & D_2 & E_2 \\ 0 & (B-\lambda)_1 & F_1 \\ 0 & 0 & F_2 \\ 0 & 0 & (C-\lambda)_1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_2 \\ \mathcal{H}_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathcal{R}(A-\lambda) \\ \mathcal{R}(A-\lambda)^\perp \\ \mathcal{R}(B-\lambda) \\ \mathcal{R}(B-\lambda)^\perp \\ \mathcal{R}(C-\lambda) \\ \mathcal{R}(C-\lambda)^\perp \end{pmatrix},$$

其中 $(A - \lambda)_1, (B - \lambda)_1, (C - \lambda)_1$ 均为可逆算子. 因此存在可逆算子 U 使得

$$U(M_{D,E,F} - \lambda) = \begin{pmatrix} (A-\lambda)_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & (B-\lambda)_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (C-\lambda)_1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

注意到 $d(A - \lambda), d(B - \lambda), d(C - \lambda)$ 至少有一个大于零, 由式 (2.5) 可知无论如何选取 D, E, F 均有 $M_{D,E,F} - \lambda$ 左可逆且 $\overline{\mathcal{R}(M_{D,E,F} - \lambda)} \neq \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3$. 因此 $\lambda \in \Sigma$. 于是 $\Sigma \supset \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$.

再证相反的包含关系. 本文断言: $\lambda \in \Sigma$ 蕴含 $\lambda \in \rho_l(A) \cap \rho_l(B) \cap \rho_l(C)$. 若不然, 取 D, E, F 皆为零算子便有 $\lambda \in \sigma_l(M_{D,E,F})$, 这与 $\lambda \in \Sigma$ 矛盾. 因此只须证若 $\lambda \in (\rho_l(A) \cap$

$\rho_l(B) \cap \rho_l(C)) \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3)$ 便有 $\lambda \notin \Sigma$. 这是显然的, 因为 $\lambda \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ 蕴含 $\lambda \in \rho_l(A) \cap \rho_l(B) \cap \rho_l(C)$ 且 $A - \lambda, B - \lambda, C - \lambda$ 至少有一个值域不稠, 从而若 $\lambda \in (\rho_l(A) \cap \rho_l(B) \cap \rho_l(C)) \setminus (\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3)$ 便有 $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B) \cap \rho(C)$.

定理 2.4 设 $A \in \mathcal{B}(H_1), B \in \mathcal{B}(H_2), C \in \mathcal{B}(H_3)$ 为给定算子, 则

$$\bigcap_{D,E,F} \sigma_{r,2}(M_{D,E,F}) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2,$$

其中

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= ((\sigma_c(A) \cup \sigma_{r,2}(A)) \cap \sigma_r(B) \cap \rho(C)) \cup (\sigma_{r,2}(A) \cap \rho(B) \cap \rho(C)) \\ &\quad \cup \{\lambda \in \rho_{\text{in}}(A) \cap \sigma_{r,2}(B) \cap \rho(C) : d(A - \lambda) < \infty\}, \\ \Sigma_2 &= ((\sigma_c(A) \cup \sigma_{r,2}(A)) \cap \rho_{\text{in}}(B) \cap \sigma_r(C)) \\ &\quad \cup \{\lambda \in \rho_{\text{in}}(A) \cap (\sigma_c(B) \cup \sigma_{r,2}(B)) \cap \sigma_r(C) : d(A - \lambda) < \infty\} \\ &\quad \cup \{\lambda \in \rho_{\text{in}}(A) \cap \rho_{\text{in}}(B) \cap \sigma_{r,2}(C) : d(A - \lambda) < \infty, d(B - \lambda) < \infty\}. \end{aligned}$$

证 记 $\Sigma = \bigcap_{D,E,F} \sigma_{r,2}(M_{D,E,F})$. 先证 $\Sigma \supset \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. 设 $\lambda \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. 因为 $\lambda \in \Sigma_2$ 蕴含 $\lambda \in \sigma_r(C)$, 显然任给 D, E, F 均有 $\Sigma_2 \subset \sigma_{co}(M_{D,E,F})$; 注意到 $\lambda \in \Sigma_1$ 蕴含 $\lambda \in (\sigma_r(B) \cap \rho(C)) \cup (\sigma_{r,2}(A) \cap \rho(B) \cap \rho(C))$, 容易证明任给 D, E, F 均有 $\Sigma_1 \subset \sigma_{co}(M_{D,E,F})$. 此外, 由引理 1.3 易知任给 D, E, F 均有 $M_{D,E,F} - \lambda$ 为单射. 以下只须证还有 $\lambda \in \sigma_m(M_{D,E,F})$.

现记 Σ_i 的表达式中等号右端的集合依次为 $\Sigma_{i1}, \Sigma_{i2}, \Sigma_{i3}$ ($i = 1, 2$). 若 $\lambda \in \Sigma_{11} \cup \Sigma_{12} \cup \Sigma_{21}$, 则必有 $\lambda \in \sigma_m(A)$. 显然任给 D, E, F 均有 $\lambda \in \sigma_m(M_{D,E,F})$. 若 $\lambda \in \Sigma_{13}$, 则任给 D, E, F 均有

$$M_{D,E,F} - \lambda = \begin{pmatrix} (A-\lambda)_1 & D_1 & E_1 \\ 0 & D_2 & E_2 \\ 0 & (B-\lambda)_1 & F_1 \\ 0 & 0 & F_2 \\ 0 & 0 & C-\lambda \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_2 \\ \mathcal{H}_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{R}(A-\lambda)} \\ \mathcal{R}(A-\lambda)^\perp \\ \overline{\mathcal{R}(B-\lambda)} \\ \mathcal{R}(B-\lambda)^\perp \\ \mathcal{H}_3 \end{pmatrix},$$

其中 $C - \lambda$ 可逆. 因此存在可逆算子 U 使得

$$U(M_{D,E,F} - \lambda) = \begin{pmatrix} (A-\lambda)_1 & D_1 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & (B-\lambda)_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C-\lambda \end{pmatrix},$$

结合 $d(A - \lambda) < \infty$, 应用引理 1.2 可有 $\lambda \in \sigma_m(M_{D,E,F})$ 当且仅当

$$\begin{pmatrix} (A-\lambda)_1 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & (B-\lambda)_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C-\lambda \end{pmatrix}$$

的值域不闭. 这样若 $\lambda \in \sigma_m(A)$, 同前述讨论可知, 任给 D, E, F 均有 $\lambda \in \sigma_m(M_{D,E,F})$; 若 $\lambda \notin \sigma_m(A)$, 则 $(A - \lambda)_1$ 为可逆算子, 注意到 $\lambda \in \sigma_{r,2}(B)$ 容易得到任给 D, E, F 均有 $\lambda \in \sigma_m(M_{D,E,F})$. 类似地, 容易证明若 $\lambda \in \Sigma_{22} \cup \Sigma_{23}$, 则任给 D, E, F 仍有 $\lambda \in \sigma_m(M_{D,E,F})$.

再证 $\Sigma \subset \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. 注意到任给 D, E, F 均有 $\sigma_{r,2}(M_{D,E,F}) \subset \sigma_m(M_{D,E,F})$. 所以要证 $\lambda \notin \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 蕴含 $\lambda \notin \Sigma$, 只须考虑如下 3 种情形即可.

情形 1 $\lambda \in \sigma_c(C)$, $d(A - \lambda) < \infty$ 且 $d(B - \lambda) < \infty$. 此时, 注意到 $\lambda \in \sigma_m(C)$, 取形如定理 2.2 中情形 4 的 D, E, F 可知 $M_{D,E,F} - \lambda$ 具有稠值域, 显然 $\lambda \notin \Sigma$.

情形 2 $\lambda \in \sigma_{r,1}(A) \cap \sigma_c(B) \cap \rho(C)$ 且 $d(A - \lambda) < \infty$. 此时, 取 E, F 均为零算子并定义 $D(h_i^{(2)}) = h_i^{(1)}$, 显然 $M_{D,E,F} - \lambda$ 具有稠值域, 从而 $\lambda \notin \Sigma$.

情形 3 $\lambda \in (\rho(A) \cap \sigma_c(B) \cap \rho(C)) \cup (\sigma_c(A) \cap (\rho(B) \cup \sigma_c(B)) \cap \rho(C)) \cup (\sigma_c(A) \cap \sigma_c(B) \cap \rho(C))$. 此时, 取 D, E, F 均为零算子, 显然 $M_{D,E,F} - \lambda$ 具有稠值域, 因此 $\lambda \notin \Sigma$.

注 由上述定理, 文 [15] 的结果可描述为

$$\begin{aligned} \bigcap_{D \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)} \sigma_{p,1}(M_D) &= (\sigma_{p,1}(A) \cap \rho_{co}(B)) \cup (\rho_\delta(A) \cap \sigma_{p,1}(B)), \\ \bigcap_{D \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)} \sigma_{p,2}(M_D) &= (\sigma_p(A) \cap \sigma_{co}(B)) \\ &\quad \cup \{\lambda \in \sigma_{p,2}(A) \cap \rho_\delta(B) : d(A - \lambda) > n(B - \lambda)\} \\ &\quad \cup \{\lambda \in \rho_l(A) \cap \sigma_{p,2}(B) : d(A - \lambda) < n(B - \lambda)\}, \\ \bigcap_{D \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)} \sigma_{r,1}(M_D) &= (\sigma_{r,1}(A) \cap \rho(B)) \cup (\rho_l(A) \cap \sigma_{r,1}(B)), \\ \bigcap_{D \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)} \sigma_{r,2}(M_D) &= ((\sigma_{r,2}(A) \cup \sigma_c(A)) \cap \sigma_r(B)) \cup (\sigma_{r,2}(A) \cap \rho(B)) \\ &\quad \cup \{\lambda \in \rho_{in}(A) \cap \sigma_{r,2}(B) : d(A - \lambda) < \infty\}. \end{aligned}$$

参 考 文 献

- [1] Azizov T Ya, Iokhvidov I S. Linear operators in spaces with an indefinite metric[M]. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 1989.
- [2] Cao X, Meng B. Essential approximate point spectra and Weyl's theorem for operator matrices[J]. J. Math. Anal. Appl., 2005, 304: 759-771.
- [3] Cao X. Browder essential approximate point spectra and hypercyclicity for operator matrices[J]. Lin. Alg. Appl., 2007, 426: 317-324.
- [4] 曹小红. 3×3 阶上三角算子矩阵的 Weyl 型定理 [J]. 数学学报 (中文版), 2006, 49: 529-538.
- [5] Djordjević D S. Perturbations of spectra of operator matrices[J]. J. Oper. The., 2002, 48: 467-486.
- [6] Djordjević S V, Zguitti H. Essential point spectra of operator matrices through local spectral theory[J]. J. Math. Anal. Appl., 2008, 338: 285-291.
- [7] Du H, Pan J. Perturbation of spectrums of 2×2 operator matrices[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1994, 121: 761-766.
- [8] Hai G., Chen A. On the right (left) invertible completions for operator matrices[J]. Integr. Equ. Oper. The., 2010, 67: 79-93.
- [9] Hai G, Alatancang. Possible spectrums of 3×3 upper triangular operator matrices[J]. J. Math. Res. Expo., 2009, 29: 649-661.
- [10] 黄俊杰, 阿拉坦仓, 王华. 上三角算子矩阵谱的自伴扰动 [J]. 数学学报 (中文版), 2010, 53: 1193-1200.
- [11] Hwang I S, Lee W Y. The boundedness below of 2×2 upper triangular operator matrices[J]. Integr. Equ. Oper. The., 2001, 39: 267-276.

- [12] Li Y, Du H. The intersection of essential approximate point spectra of operator matrices[J]. J. Math. Anal. Appl., 2006, 323: 1171–1183.
- [13] Li Y, Sun X, Du H. The intersection of left (right) spectra of 2×2 upper triangular operator matrices[J]. Lin. Algebra Appl., 2006, 418: 112–121.
- [14] Zerouali E H, Zguitti H. Perturbation of spectra of operator matrices and local spectral theory[J]. J. Math. Anal. Appl., 2006, 324: 992–1005.
- [15] 张澜, 阿拉坦仓. 一类缺项算子矩阵的谱扰动 [J]. 应用数学学报, 2010, 33: 59–65.
- [16] Zhang H, Du H. Browder spectra of upper-triangular operator matrices[J]. J. Math. Anal. Appl., 2006, 323: 700–707.
- [17] Zhang S, Wu Z, Zhong H. Continuous spectrum, point spectrum and residual spectrum of operator matrices[J]. Lin. Algebra Appl., 2010, 433: 653–661.
- [18] 吴秀峰, 黄俊杰, 阿拉坦仓. 三阶上三角算子矩阵点谱, 连续谱和剩余谱的扰动 [J]. 数学学报, 2015, 35(3): 423–430.

PERTURBATION OF THE POINT AND RESIDUAL SPECTRA OF 3×3 UPPER TRIANGULAR OPERATOR MATRICES

HUANG Jun-jie, WU Xiu-feng, Alatancang

(School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China)

Abstract: The point and residual spectra of a bounded operator T are, respectively, split into $\sigma_{p,1}(T)$, $\sigma_{p,2}(T)$ and $\sigma_{r,1}(T)$, $\sigma_{r,2}(T)$, based on the denseness and closedness of its range. Let $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ be infinite dimensional complex separable Hilbert spaces. Given the operators $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ and $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$, some complete characterizations on the perturbations of the previous four spectra for the partial operator matrix $M_{D,E,F}$ are given by means of the analysis method and block operator technique.

Keywords: operator matrix; point spectrum; residual spectrum; perturbation

2010 MR Subject Classification: 47A10; 47A55