Vol. 36 ( 2016 ) No. 5

# 数 学 杂 志

J. of Math. (PRC)

## 基于 GMRES(m) 法的双连通区域数值保角变换的计算法

吕毅斌<sup>1</sup>, 赖富明<sup>1</sup>, 王樱子<sup>2</sup>, 武德安<sup>3</sup>

(1. 昆明理工大学理学院, 云南 昆明 650500)

(2. 昆明理工大学计算中心, 云南 昆明 650500)

(3. 电子科技大学数学科学学院,四川成都 611731)

摘要: 本文研究了基于模拟电荷法的双连通区域的数值保角变换问题.利用限制 Krylov 子空间最大维数的算法-GMRES(m)算法,求解基于模拟电荷法的双连通区域数值保角变换中的约束方程,获得了模拟电荷和变换半径,构造了近似保角变换函数.数值实验表明了本文算法的有效性. 关键词: 模拟电荷法;双连通区域; Krylov 子空间; GMRES(m) 法

 MR(2010) 主题分类号:
 65E05; 30C30
 中图分类号:
 O241.85

 文献标识码:
 A
 文章编号:
 0255-7797(2016)05-1028-07

### 1 引言

保角变换是复变函数的一个基本问题, 广泛应用于物理学与工学<sup>[1-3]</sup>. 保角变换的主要 求解方法: 解析法和数值计算法. 解析法指出了变换函数的存在, 但是只能给出一些特殊区 域的变换函数表达式. 基于实际问题的复杂性, 必须通过数值计算方法求变换函数. 目前的 保角变换分为两类: 一类是单连通区域的保角变换, 另一类是多连通区域的保角变换.

1969 年,德国的 Steinbigler 提出了在计算空气中回转对称电极周围电场时可以用设置 在电极内部的若干个虚设的模拟电荷来计算电极表面上电荷分布的电场的计算方法,形成了 模拟电荷法 (Charge Simulation Method) 的基本思想<sup>[4]</sup>. 自 20 世纪 80 年代起,天野要等对 模拟电荷法、数值保角变换、数值保角变换的模拟电荷法以及数值保角变换中模拟电荷点的 计算方法做了许多研究工作,提出了基于模拟电荷的保角变换计算法 (天野法)<sup>[5-8]</sup>. 在复杂 的数值保角变换的计算中,相比传统的数值计算法,基于模拟电荷法的数值保角变换计算法 具有计算精度高、误差评价容易、计算时间短等优势.

广义极小残量法 (Generalized Minimum Residual Methods)<sup>[9-11]</sup> 是在 Krylov 子空间进 行迭代的计算方法,但是 GMRES 法的储存量和正交化工作量会随着迭代次数的增加而增 加,因此,一般需要利用限制 Krylov 子空间最大维数的算法 –GMRES(*m*) 法求解计算问题. 本文利用 GMRES(*m*) 求解出了双连通区域模拟电荷法中的约束方程,得到了模拟电荷和变 换半径,从而得到近似保角变换函数,最后利用数值实验验证了算法的有效性和结果的正确 性.

<sup>\*</sup>收稿日期: 2015-07-17 接收日期: 2016-01-19

**基金项目:**国家自然科学基金资助 (11461037).

**作者简介:** 吕毅斌 (1972-), 男, 黑龙江牡丹江, 副教授, 主要研究方向: 科学计算和图像处理. 通讯作者: 王樱子.

#### 2 基于模拟电荷法的数值保角变换计算法

本节主要阐述基于模拟电荷法的双连通区域保角变换的数值计算法 <sup>[12–13]</sup>. 对于 z 平面上的一个有限双连通区域 D,它由两条封闭的 Jordan 曲线  $C_1$  和  $C_2$  所围成. 通过保角变换把它变成了 w 平面的一个圆环  $\mu < |\omega| < 1$ ,  $C_1$  和  $C_2$  分别是外部边界和内部边界.



#### 图 1: 基于模拟电荷法的双连通区域数值保角变换

在不失一般性的情况下, 假定 f(0) = 0, f(z) 满足正规化条件  $f(\infty) = \infty$ ,  $f'(\infty) > 0$  时, 可以表示成

$$f(z) = ze^{g(z)+ih(z)}, \quad z \in \overline{D} = D + C_1 + C_2,$$
(2.1)

q(z) 是 Dirichlet 型势场问题

$$\begin{cases} \nabla^2 g(z) = 0, & z \in D, \\ g(z) = -\log |z|, & z \in C_1, \\ g(z) = \log \mu - \log |z|, & z \in C_2 \end{cases}$$
(2.2)

的解,  $h(z) \ge g(z)$  的共轭调和函数<sup>[14]</sup>. 由模拟电荷法可知 g(z) 可以用  $C_1$  和  $C_2$  所围成的 区域外部配置 N 个电荷点作为极的对数势场的一次结合

$$G(z) = -\sum_{i=1}^{N} Q_i \log |z - \zeta_i|, z \in \bar{D}$$
(2.3)

高度近似.因此 g(z) 在区域 D 内的共轭调和函数 h(z) 可以用

$$H(z) = -\sum_{i=1}^{N} Q_i \arg(z - \zeta_i), z \in \overline{D}$$

$$(2.4)$$

近似. 另外,  $\mu$  由 *M* 近似.  $\zeta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 为电荷点, 分布在给定区域的外部, 即 *N*/2 个 点分布在边界 *C*<sub>1</sub> 的外部, 另外 *N*/2 个点分布在边界 *C*<sub>2</sub> 的内部. 根据 (2.2) 式, 双连通区域 的数值保角变换是单连通区域的内部保角变换与外部保角变换的组合, 因此边界条件可以看

成内部保角变换边界条件与外部保角变换边界条件的组合. 未知电荷  $Q_i$  可以用边界上选择的约束点  $z_j$  在满足 Dirichlet 边界条件时进行求解, 即

$$\sum_{i=1}^{N} Q_i \log |z_j - \zeta_i| = \log |z_j|, \quad z_j \in C_1,$$
(2.5)

$$\sum_{i=1}^{N} Q_i \log |z_j - \zeta_i| + \log M = \log |z_j|, z_j \in C_2.$$
(2.6)

又由于  $g(\infty) = 0$ ,  $h(\infty) = 0$ , 根据 (2.3) 和 (2.4) 式可推导出

$$\sum_{i=N/2+1}^{N} Q_i = 0. (2.7)$$

上述 (2.5) 式中  $z_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N/2$ ) 取在边界  $C_1$  上. 类似的, (2.6) 式中  $z_j$  ( $j = N/2 + 1, N/2 + 2, \dots, N$ ) 取在边界  $C_2$  上.

联立 (2.5)-(2.7) 式, 化为 N+1 维约束方程

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,N/2+1} & \cdots & a_{1,N} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{N/2+1,1} & \cdots & a_{N/2+1,N/2+1} & \cdots & a_{N/2+1,N} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{N,N/2+1} & \cdots & a_{NN} & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_{N/2+1} \\ \vdots \\ Q_N \\ \log M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log |z_1| \\ \vdots \\ \log |z_{N/2+1}| \\ \vdots \\ \log |z_N| \\ 0 \end{pmatrix},$$
(2.8)

其中  $a_{ij} = \log |z_j - \zeta_i|$ . 最后, 利用  $z_i, \zeta_i, Q_i, M$  计算双连通保角变换.

### 3 基于 GMRES(m) 法的模拟电荷的求解

将约束方程 (2.8) 式写成标准线性方程组 Ax = b 的形式, 其中

$$A \in R^{(N+1) \times (N+1)}, \ x \in R^{N+1}, \ b \in R^{N+1}.$$

约束方程的系数矩阵 A 非对称的, 广义极小残量法 (GMRES) 是当前求解大型非对称线性方程非常有效的算法之一. 它是在 Krylov 子空间

$$K_m(A, r_0) = \operatorname{span}\{r_0, Ar_0, Ar_0^2, \cdots, Ar_0^{m-1}\}$$

的基础上发展起来的算法, 通过寻找近似解  $x_m \in x_0 + K_m(A, r_0)$ , 来逼近约束方程 (2.8) 的准确解. 但是 GMRES 法在求解约束方程时, 随着电荷点数的增加, 计算量和储存量都会随着迭代次数的增加而大大增加. 为了避免这种情况, 每 m 步必须重新启动, 这就是 GMRES(m) 法 <sup>[15]</sup>. GMRES(m) 算法是 GMRES 算法的进一步改进, 根据文献 [16], 可以得到求解模拟电荷的 GMRES(m) 法, 其算法步骤如下:

**Algorithm 1**  $\overline{\text{GMRES}}(m)$  Algorithm

**Input**:  $A, b, x_0, \varepsilon$ . Initialize  $r_0 = Ax_0 - b$  and  $\rho_0 = ||r_0||$ . define  $\tilde{H}_m = (h_{ij})_{(m+1) \times m}$  and  $Q_m = (q_1, q_2, \cdots, q_m)$ . while stopping criterion is not satisfied do for j = 1 : m $r_k = Aq_k;$ for i = i : j $h_{ij} = q_i^T r_j;$  $r_i = r_i - h_{ij}q_i;$ end for  $h_{j+1,j} = ||r_j||_2$ , if  $h_{j+1,j} = 0$ , set m = j;  $q_{k+1} = r_k / h_{k+1,k};$ end for compute  $y_m$ ,  $\|\rho_0 e_1 - \tilde{H}_m y_m\|_2 = \min$ , set  $x_{m+1} = x_0 + Q_m y_m$ ;  $r = b - Ax_{m+1};$ if error = norm(r) <  $\varepsilon$ ;  $x_0 = x_m$ ; end if end while return  $x_m$ .

上述算法中,  $x_0$  是给定的初始近似解, 取为零向量,  $r_0 = b - Ax_0$  为初始向量,  $\varepsilon$  是给定 精度.

#### 4 数值实验

在 MATLAB 7.0 环境下,以椭圆为边界的双连通区域  $C_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ ,  $C_2 : x^2/a_2^2 + y^2/b_2^2 = 1$ 为例,  $C_1 \ \pi C_2$ 为边界.利用模拟电荷法对双连通区域的保角变换进行数 值实验,保角变换误差由

error = max 
$$\left( \max_{c_1} ||f(z)| - 1|, \max_{c_2} ||f(z)| - M| \right)$$

确定, 检验 GMRES(m) 法的有效性, 具体步骤如下:

**步骤 1** 设定电荷点  $\zeta_i$  (*i* = 1, 2, · · · , *N*), 约束点  $z_i$  (*i* = 1, 2, · · · , *N*) 以及各个参数;

步骤 2 根据边界条件确定关于模拟电荷  $Q_i(i = 1, 2, \dots, N)$  和变换半径 M 的约束方程;

步骤 3 通过 GMRES(*m*) 法求解约束方程, 得到模拟电荷  $Q_i(i = 1, 2, \dots, N)$  和变换半径 *M*, 从而构造近似保角变换函数 f(z).

**例1**  $a_1 = 7, b_1 = 5, a_2 = 5, b_2 = 1$  时. 分别用 Method 1 和 Method 2 表示天野法和基于 GMRES(m) 法的双连通区域保角变换的计算法. 图 2 给出的是这两种方法数值保角变换误差. 由图 2 可知电荷点数增加时,误差会随着电荷点数的增加而减小. 当电荷点数多于 90时, Method 2 的保角变换误差要小于 Method 1. 电荷点数 N = 200 时, Method 2 的保角变换误差为 4.1729 × 10<sup>-6</sup>,而 Method 1 的保角变换误差为 8.7557 × 10<sup>-6</sup>,说明本文所采用的

算法可以得到更高精度的模拟电荷  $Q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 和变换半径 M. 图 3 给出的模拟电 荷点数 N 为 200 时, 模拟电荷点的分布情况.



为进一步验证本文算法的有效性,取以

$$C_1: x^2/7^2 + y^2/5^2 = 1, \ C_2: x^2/5^2 + y^2 = 1$$

为边界的内部区域的等高线. 图 4 中, 粗实线表示的边界, 细线表示的等高线. 电荷点数取 200, 利用 GMRES(*m*) 法求解约束方程, 从而构造变换函数. 图 5 为区域及其等高线的映射 结果, 可以看出, 对于 *C*<sub>1</sub> 和 *C*<sub>2</sub> 的所围成的区域内的任意部分, 经过保角变换, 对应的仍然是 变换后所围成区域的内部. 且边界经过保角变换对应的同心圆也是变换后图像的边界, 从而 验证了基于 GMRES(*m*) 法的双连通区域保角变换的计算法的有效性.



图 4: 边界及区域等高线 (例 1)



图 5: 边界及区域等高线保角变换 (例 1)

**例 2**  $a_1 = 8, b_1 = 4, a_2 = 4, b_2 = 2$  时. 类似于图 2 和图 3, 图 6 和图 7 分别给出了两种 方法的数值保角变换误差和模拟电荷点的分布. 从图 6 中可以看出, 电荷点数越多, 两种方法 的保角变换误差越小. 但是, 当电荷点数大于 180 时, Method 2 的保角变换误差明显要小于 Method 1. 电荷点数为 300, Method 2 的保角变换误差已经达到 3.7814 × 10<sup>-13</sup>. 图 8 中细 线表示以

$$C_1: x^2/8^2 + y^2/4^2 = 1, \ C_2: x^2/4^2 + y^2/2^2 = 1$$

为边界的内部区域的等高线, 粗线表示边界. 从图 9 可以看出, Method 2 可以得到了很好的保角变换结果.



图 8: 边界及区域等高线 (例 2)

图 9: 边界及区域等高线保角变换 (例 2)

#### 5 结束语

本文利用 GMRES(*m*) 法求解出了双连通区域保角变换模拟电荷法中的约束方程,进而 提出了基于 GMRES(*m*) 法的双连通区域数值保角变换的计算法.并通过数值实验验证了新 算法的有效性,且用等高线模拟了保角变换的计算结果.本算法同样可以运用解决其它的多 连通区域数值保角变换问题.

#### 参考文献

- [1] 曹伟杰. 保形变换理论及其应用 [M]. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1988.
- [2] 朱满座. 数值保角变换及其在电磁理论中的应用 [D]. 西安: 西安电子科技大学, 2008.
- [3] 林为干. 微波理论与技术 [M]. 北京: 科学出版社, 1979.
- [4] Singer H. A charge simulation method for calculation of high voltage field [J]. IEEE Trans. Power App. Sys., 1974, 9(3): 1660–1668.

- [5] Amano K. Numerical conformal mappings of exterior domains based on the charge simulation method [J]. Trans. Inform. Proc. Soc. Japan, 1998, 29(1): 62–72 (in Japanese).
- [6] Amano K. Numerical conformal mappings of interior domains based on the charge simulation method
   [J]. Trans. Inform. Proc. Soc. Japan, 1988, 29(7): 697–699 (in Japanese).
- [7] Amano K. A bidirectional method for numerical conformal mapping based on the charge simulation method [J]. Trans. Inform. Proc. Soc. Japan, 1991, 28(4): 473–482 (in Japanese).
- [8] Amano K. Numerical conformal mapping of doubly-connected domains based on the charge simulation method [J]. Trans. Inform. Proc. Soc. Japan, 1988, 29(7): 914–919 (in Japanese).
- [9] Golub G H, Van Loan C F. Matrix computation (4th ed.)[M]. 北京:人民邮电出版社, 2014.
- [10] 全忠, 向淑晃. 基于 GMRES 的多项式预处理广义极小残差法 [J]. 计算数学, 2006(4): 365-376.
- [11] 潘春平, 王红玉, 赵伟良. 一种求解鞍点问题的广义对称超松弛迭代法 [J]. 数学杂志, 2011, 31(3): 569-574.
- [12] Amano K. A charge simulation method for numerical conformal mapping of interior, exterior and doubly-connected domains[J]. Comput. Appl. Math., 1994, 53(30): 353–370.
- [13] Lu Y, Wu D, Wang Y, et al. The accuracy improvement of numerical conformal mapping using the modified Gram -Schmidt method[C]. 19th Intern. Confer. Indus. Engin. Engin. Manag., Berlin Heidelberg: Springer, 2013: 555–56.
- [14] 戴济能, 杜金元. 单准周期的 Riemann 边值问题 [J]. 数学杂志, 2006, 26(5): 579-584.
- [15] Saad Y. A Flexible inner-outer preconditioned GMRES algorithm [J]. SIAM J. Sci. Comp., 1993, 14(2): 461–469.
- [16] Habu M, Nodera F. GMRES(m) algorithm with changing the restart cycle adaptively [C]. Proc. Alg. 2000 Confer. Sci. Comp., 2000: 254–263.

## THE GMRES(M) METHOD FOR NUMERICAL CONFORMAL MAPPING OF DOUBLY-CONNECTED DOMAIN

LU Yi-bin<sup>1</sup>, LAI Fu-ming<sup>1</sup>, WANG Ying-zi<sup>2</sup>, WU De-an<sup>3</sup>

(1.School of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China)

(2. Computer Center, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China) (3. School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology,

Chengdu 611731, China)

Abstract: In this paper, we study the GMRES(m) method for numerical conformal mapping based on charge simulation method of doubly-connected domain. In this method, using the GMRES(m) method which limited the number of Krylov subspace's maximum dimension, the linear equation of charge simulation method is solved, and the approximate conformal mapping function is constructed by using the charges and conformal mapping radius. Numerical results show that the proposed method is effective.

**Keywords:** charge simulation method; doubly-connected domains; Krylov subspace; GMRES(m) method

2010 MR Subject Classification: 65E05; 30C30