Vol. 36 (2016)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

关于 H. Fujimoto 一个结果的改进

易 斌, 陈红菊
(红河学院数学学院, 云南 蒙自 661100)

摘 要: 本文研究了权分担一个公共值集的亚纯函数唯一性问题. 利用值分布理论, 获得了一个唯一性定理, 所获结论改进了 H. Fujimoto 的一个结果.

关 键 词: 权分担; 公共值集; 亚纯函数; 唯一性
MR(2010) **主题分类号**: 30D35 **中图分类号**: O174.52
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2016)04-0883-06

1 引言及主要结论

本文中亚纯函数均指复平面 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数, 所采用的符号均为值分布论中的标准符号 (见文 [1, 2]). 并令 $S(r,f)=o\{T(r,f)\}, r\to\infty, r\notin E$, 其中 $E\subset R^+$ 为本质上测度有穷的集合. 设 S 是一个复数集合, f 和 g 是两个非常数亚纯函数, 令

$$\begin{aligned} E(S,f) &= \bigcup_{a\in S}\{(m,z^*)|z^*\text{为}f(z)=a\text{的 } m \text{ 重根}\},\\ \overline{E}(S,f) &= \bigcup_{a\in S}\{z^*|z^*\text{为}f(z)=a\text{的根}\}. \end{aligned}$$

如果 $E(S,f)=E(S,g)$, 则称 S 为 f 和 g 的 CM 公共值集; 如果 $\overline{E}(S,f)=\overline{E}(S,g)$, 则称 S 为 f 和 g 的 IM 公共值集. 特别地, 如果 $E(\{a\},f)=E(\{a\},g)$, 则称 a 为 f 与 g 的 CM 分担值; 如果 $\overline{E}(\{a\},f)=\overline{E}(\{a\},g)$, 则称 a 为 f 与 g 的 IM 分担值.

1976 年, Gross 在文 [3] 中提出了下述问题.

问题 A 能否找到两个 (甚至一个) 有限集合 S_j $(j=1,2)$, 使得对任何两个非常数整函数 f 与 g, 只要满足 $E(S_j,f)=E(S_j,g)(j=1,2)$, 就有 $f\equiv g$?

许多学者对该问题进行了研究 (详见参考文献 [1]), 并取得了一系列成果. 对于一个离散子集 $S:=\{a_1,a_2\cdots,a_q\}\subset\mathbb{C}$, 使得对任意两个非常数亚纯函数 (整函数) f 与 g, 若只要满足 $E(S,f)=E(S,g)$ 就有 $f\equiv g$, 那么就称 S 是 URSM(URSE); 若只要满足 $\overline{E}(S,f)=\overline{E}(S,g)$ 就有 $f\equiv g$, 那么就称 S 是 URSM-IM(URSE-IM).

现考虑如下形式的多项式

$$P(\omega):=\prod_{j=1}^{q}(\omega-a_j), \tag{1.1}$$

*收稿日期: 2014-02-11 接收日期:2014-04-08
基金项目:国家自然科学基金资助 (11261069); 红河学院校级项目 (XJ14Y06).
作者简介: 易斌 (1986–), 男, 湖南衡阳, 硕士, 主要研究方向: 复分析.

并假设

$$P^{'}(\omega)=q\prod_{j=1}^{k}(\omega-d_j)^{q_j},$$

其中 $d_j(1\le j\le k)$ 相互判别, 且满足

$$P(d_l)\ne P(d_m)\ (1\le l<m\le k), \tag{1.2}$$

对一个非常数多项式 $P(\omega)$, 如果对任意两个非常数亚纯函数 f 与 g 及非零常数 c, 若只要满足 $P(f)=cP(g)$ 就有 $f\equiv g$, 那么就称 $P(\omega)$ 是一个唯一多项式.

2000 年, Fujimoto 在文 [4] 中证明了下列结论.

定理 A 设 $P(\omega)$ 是形如式 (1.1) 满足式 (1.2) 的唯一多项式, $k\ge 3$ 或者 $k\ge 2$ 且 $\min\{q_1,q_2\}\ge 2$, $S=\{\omega|P(\omega)=0\}$, 那么当 $q>2k+6$ (或 $q>2k+2$) 时, S 是 URSM(URSE); 当 $q>2k+12$ (或 $q>2k+5$) 时, S 是 URSM-IM (URSE-IM).

设 k 是一个正整数或 $+\infty$, 规定

$$E_{k)}(S,f)=\bigcup_{a\in S}\{(m,z^*)|z^*为f(z)=a的\ n\ 重根,其中n\le k,m=n\},$$

如果 $E_{k)}(S,f)=E_{k)}(S,g)$, 则称 f 和 gkCM 分担值集 S. 白小甜在文 [5] (或见文 [6]) 中从 kCM 分担的角度推广了定理 A, 得到了下面的一些结论.

定理 B 设 $P(\omega)$ 是形如式 (1.1) 满足式 (1.2) 的唯一多项式, $k\ge 3$ 或者 $k\ge 2$ 且 $\min\{q_1,q_2\}\ge 2$, $S=\{\omega|P(\omega)=0\}$, 那么当 $q>2k+6$ (或 $q>2k+2$) 时, 对任意的非常数亚纯函数 (整函数) f 和 g, 只要满足 $E_{3)}(S,f)=E_{3)}(S,g)$, 就有 $f\equiv g$.

定理 C 设 $P(\omega)$ 是形如式 (1.1) 满足式 (1.2) 的唯一多项式, $k\ge 3$ 或者 $k\ge 2$ 且 $\min\{q_1,q_2\}\ge 2$, $S=\{\omega|P(\omega)=0\}$, 那么当 $q>2k+7$ (或 $q>2k+2.5$) 时, 对任意的非常数亚纯函数 (整函数) f 和 g, 只要满足 $E_{2)}(S,f)=E_{2)}(S,g)$, 就有 $f\equiv g$.

定理 D 设 $P(\omega)$ 是形如式 (1.1) 满足式 (1.2) 的唯一多项式, $k\ge 3$ 或者 $k\ge 2$ 且 $\min\{q_1,q_2\}\ge 2$, $S=\{\omega|P(\omega)=0\}$, 那么当 $q>2k+10$ (或 $q>2k+4$) 时, 对任意的非常数亚纯函数 (整函数) f 和 g, 只要满足 $E_{1)}(S,f)=E_{1)}(S,g)$, 就有 $f\equiv g$.

由定理 B 可知, 若将定理 A 中的 CM 分担降低为 3CM 分担, 则结论仍然成立.

2001 年, Lahiri 提出了权分担的概念 (见文 [7, 8]). 现设 k 是一个非负整数或 $+\infty$, 规定

$$E_k(S,f)=\bigcup_{a\in S}\{(m,z^*)|z^*为f(z)=a的\ n\ 重根,当n\le k,m=n;当n>k,m=k+1\}.$$

如果 $E_k(S,f)=E_k(S,g)$, 则称 f 和 g 以权 k 分担公共值集 S. 易见, 权分担介于 IM 分担与 CM 分担之间, k 越小权 k 分担就越接近 IM 分担, k 越大权 k 分担就越接近 CM 分担, 且 $E_0(S,f)=\overline{E}(S,f)$, $E_{+\infty}(S,f)=E(S,f)$.

本文则从权分担的角度推广了定理 A, 得到了下面的结论.

定理 1 设 $P(\omega)$ 是形如式 (1.1) 满足式 (1.2) 的唯一多项式, $k\ge 3$ 或者 $k\ge 2$ 且 $\min\{q_1,q_2\}\ge 2$, $S=\{\omega|P(\omega)=0\}$, 那么当 $q>2k+6$ (或 $q>2k+2$) 时, 对任意的非常数亚纯函数 (整函数) f 和 g, 只要满足 $E_1(S,f)=E_1(S,g)$, 就有 $f\equiv g$.

由定理 1 可知若将定理 A 中的权 $+\infty$ 分担 (即 CM 分担) 降低为权 1 分担, 则结论仍然成立.

2 一些引理

引理 1 [1] 若 z_0 是非常数亚纯函数 f 与 g 的公共一级极点, 则 z_0 是 $\frac{f''}{f'}-\frac{g''}{g'}$ 的至少一重零点.

引理 2 [4] 设 $P(\omega)$ 是形如式 (1.1) 的多项式, 且满足条件 $P(d_l)\neq P(d_m)(1\leq l<m\leq k)$, $k\geq 3$ 或者 $k\geq 2$ 且 $\min\{q_1,q_2\}\geq 2$, 对任意两个非常数亚纯函数 f 与 g, 若存在常数 c_1 及非零常数 c_0, 使得

$$\frac{1}{P(f)}=\frac{c_0}{P(g)}+c_1,$$

则 $c_1=0$.

引理 3 设 $P(\omega)$ 是一非常数多项式, $S=\{\omega|P(\omega)=0\}$, f 和 g 是任意的两个非常数亚纯函数, 满足 $E_1(S,f)=E_1(S,g)$, 令 $F=P(f),G=P(g)$,

$$\begin{aligned}H&=\frac{(\frac{1}{F})''}{(\frac{1}{F})'}-\frac{(\frac{1}{G})''}{(\frac{1}{G})'}=(\frac{F''}{F'}-\frac{2F'}{F})-(\frac{G''}{G'}-\frac{2G'}{G}),\\ \varphi&=\frac{f'g'}{(f-a)(g-a)}H,\end{aligned}$$

其中 $a\in\mathbb{C}-S$. 如果 $\varphi\not\equiv 0$, 则

$$N(r,\frac{1}{F})+N(r,\frac{1}{G})-\overline{N}_{(3}(r,\frac{1}{F})-\overline{N}_{(3}(r,\frac{1}{G})\leq 2N(r,\frac{1}{\varphi}).$$

证 由 $E_1(S,f)=E_1(S,g)$ 可得 $E_1(0,F)=E_1(0,G)$, 下面分析 φ 的零点取值状况.

当 z_0 是 F 的 1 重零点时, z_0 也是 G 的 1 重零点, 从而由引理 1 可知 z_0 是 φ 的至少 1 重零点.

当 z_0 是 F 的 2 重零点时, z_0 是 G 的至少 2 重零点. 当 z_0 是 G 的 2 重零点时, 从而 z_0 不是 H 的极点, 是 f' 及 g' 的 1 重零点, 故 z_0 是 φ 的至少 2 重零点.

当 z_0 是 G 的 $k(\geq 3)$ 重零点时, 从而 z_0 分别是 H 的 1 级极点, f' 的 1 重零点, g' 的 $k-1$ 重零点, 故 z_0 是 φ 的 $k-1(\geq 2)$ 重零点.

故此时 z_0 是 φ 的至少 2 重零点.

当 z_0 是 F 的 $k(\geq 3)$ 重零点时, z_0 也是 G 的至少 2 重零点, 从而 z_0 至多是 H 的 1 级极点, 并分别是 f' 及 g' 的至少 1 重零点及 $k-1$ 重零点, 故 z_0 是 φ 的至少 $k-1$ 重零点.

根据以上的分析并及 $\varphi\not\equiv 0$ 可得

$$N(r,\frac{1}{F})-\overline{N}_{(3}(r,\frac{1}{F})\leq N(r,\frac{1}{\varphi}).$$

同理可得

$$N(r,\frac{1}{G})-\overline{N}_{(3}(r,\frac{1}{G})\leq N(r,\frac{1}{\varphi}).$$

由以上两式可得结论成立.

3 定理 1 的证明

情形 1 当 f,g 为非常数亚纯函数时, 设 f,g 及多项式 $P(\omega)$ 均满足定理 1 的条件, F,G,H,φ 均如引理 3 所述, 下面再分两种情况讨论.

情形 1.1 存在 $I\subset R^{+},\mathrm{mes}I=+\infty$, 使得

$$\overline{N}(r,\frac{1}{f'})+\overline{N}(r,\frac{1}{g'})\geq(1+\frac{1}{1000})\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r,f)(r\in I,r\to\infty). \tag{3.1}$$

如果 $\varphi\not\equiv0$, 则由引理 3 可知

$$N(r,\frac{1}{F})+N(r,\frac{1}{G})-\overline{N}_{(3}(r,\frac{1}{F})-\overline{N}_{(3}(r,\frac{1}{G})\leq 2N(r,\frac{1}{\varphi}). \tag{3.2}$$

另一方面, 由对数导数引理可得 $m(r,\varphi)=S(r,f)$, 分析 φ 的极点取值状况可得

$$N(r,\varphi)\leq 2\overline{N}(r,f)+2\overline{N}(r,g)+\overline{N}(r,\frac{1}{f-a})+\overline{N}(r,\frac{1}{g-a})+\sum_{l=1}^{k}[\overline{N}(r,\frac{1}{f-d_l})+\overline{N}(r,\frac{1}{g-d_l})]. \tag{3.3}$$

从而由 Nevanlinna 第一基本定理可得

$$T(r,\varphi)\leq(k+3)\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r,f). \tag{3.4}$$

注意到

$$\overline{N}(r,\frac{1}{f'})\leq N(r,\frac{1}{f'})-\overline{N}_{(3}(r,\frac{1}{F}),\overline{N}(r,\frac{1}{g'})\leq N(r,\frac{1}{g'})-\overline{N}_{(3}(r,\frac{1}{G}). \tag{3.5}$$

从而由 Nevanlinna 第一, 第二基本定理及式 (3.1), (3.2), (3.4), (3.5) 可得

$$(q-1+\frac{1}{1000})\{T(r,f)+T(r,g)\}\leq(2k+6)\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r,f)(r\in I,r\to\infty), \tag{3.6}$$

与 $q>2k+6$ 矛盾. 从而 $\varphi\equiv0$, 即 $H\equiv0$, 故存在常数 c_1 及非零常数 c_0, 使得

$$\frac{1}{F}=\frac{c_0}{G}+c_1. \tag{3.7}$$

由引理 2 可知 $c_1=0$, 再从 $P(\omega)$ 是唯一多项式可得 $f\equiv g$.

情形 1.2 存在 $I\subset R^{+},\mathrm{mes}I=+\infty$, 使得

$$\overline{N}(r,\frac{1}{f'})+\overline{N}(r,\frac{1}{g'})\leq(1+\frac{1}{100})\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r,f)(r\in I,r\to\infty). \tag{3.8}$$

如果 $H\not\equiv0$, 由引理 1 可知

$$N_{1)}(r,\frac{1}{F})\leq N(r,\frac{1}{H}). \tag{3.9}$$

分析 H 的极点取值状况可得

$$N(r,H)\leq\overline{N}(r,f)+\overline{N}(r,g)+\overline{N}^{*}(r,\frac{1}{f'})+\overline{N}^{*}(r,\frac{1}{g'})+\sum_{l=1}^{k}[\overline{N}(r,\frac{1}{f-d_l})+\overline{N}(r,\frac{1}{g-d_l})]+\overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{F}), \tag{3.10}$$

其中 $\overline{N}^*(r,\frac{1}{f'})$ 表示 f' 的零点但非 F 的零点者所成之精简密指量; $\overline{N}^*(r,\frac{1}{g'})$ 表示 g' 的零点但非 G 的零点者所成之精简密指量.

另一方面, 由对数导数引理可得 $m(r,H)=S(r,f)$, 再由 Nevanlinna 第一基本定理可得

$$T(r,H)\leq(k+1)\{T(r,f)+T(r,g)\}+\overline{N}(r,\frac{1}{f'})+\overline{N}^*(r,\frac{1}{g'})+S(r,f). \tag{3.11}$$

注意到 $\overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{F})=\overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{G})$, 在 (3.9) 式两边同时加上 $\overline{N}_{(2}(r,\frac{1}{F})$ 可得

$$\overline{N}(r,\frac{1}{F})\leq(k+1)\{T(r,f)+T(r,g)\}+\overline{N}(r,\frac{1}{f'})+\overline{N}(r,\frac{1}{g'})+S(r,f). \tag{3.12}$$

同理可得

$$\overline{N}(r,\frac{1}{G})\leq(k+1)\{T(r,f)+T(r,g)\}+\overline{N}(r,\frac{1}{f'})+\overline{N}(r,\frac{1}{g'})+S(r,f). \tag{3.13}$$

由 Nevanlinna 第二基本定理及式 (3.8), (3.12), (3.13) 可得

$$(q-2)\{T(r,f)+T(r,g)\}\leq(2k+4+\frac{1}{50})\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r,f)(r\in I,r\to\infty), \tag{3.14}$$

与 $q>2k+6$ 矛盾. 故 $H\equiv 0$, 与情形 1.1 的讨论类似可得 $f\equiv g$.

情形 2 当 f,g 为非常数整函数时, 有 $\overline{N}(r,f)=\overline{N}(r,g)=0$, 下面也分两种情形讨论.

情形 2.1 存在 $I\subset R^+,\mathrm{mes}I=+\infty$, 使得

$$\overline{N}(r,\frac{1}{f'})+\overline{N}(r,\frac{1}{g'})\geq\frac{1}{1000}\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r,f)(r\in I,r\to\infty). \tag{3.15}$$

类似地可得

$$(q-1+\frac{1}{1000})\{T(r,f)+T(r,g)\}\leq(2k+2)\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r,f)(r\in I,r\to\infty), \tag{3.16}$$

与 $q>2k+2$ 矛盾. 从而可得 $f\equiv g$.

情形 2.2 存在 $I\subset R^+,\mathrm{mes}I=+\infty$, 使得

$$\overline{N}(r,\frac{1}{f'})+\overline{N}(r,\frac{1}{g'})\leq\frac{1}{100}\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r,f)(r\in I,r\to\infty). \tag{3.17}$$

类似地可得

$$(q-1)\{T(r,f)+T(r,g)\}\leq(2k+\frac{1}{50})\{T(r,f)+T(r,g)\}+S(r,f)(r\in I,r\to\infty), \tag{3.18}$$

与 $q>2k+2$ 矛盾. 从而可得 $f\equiv g$.

定理 1 证毕.

参 考 文 献

[1] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1995.

[2] L Yang. Value distribution theory[M]. Beijing: Science Press, 1993.

[3] Gross F. Factorization of meromorphic functions and some open problems[J]. Compl. Anal., Lect. Notes Math., 1977, 599: 51–69.

[4] Fujimoto H. On uniqueness of meromorphic functions sharing finite sets[J]. Amer. J. Math., 2000, 122: 1175–1203.

[5] 白小甜. 关于亚纯函数分担公共值集的一些结果 [D]. 济南: 山东大学博士学位论文, 2011.

[6] Bai Xiaotian, Han Qi, Chen Ang. On a result of H. Fujimoto[J]. J. Math. Kyoto Univ., 2009, 49(3): 631–643.

[7] Lahiri I. Weighted sharing and uniqueness of meromorphic functions[J]. Nagoya Math. J., 2001, 161: 193–206.

[8] Lahiri I. Weighted sharing and uniqueness of meromorphic functions[J]. Compl. Var., 2001, 46: 241–253.

IMPROVEMENT OF A RESULT ON H. FUJIMOTO

YI Bin, CHEN Hong-ju

(*School of Mathematics, Honghe University, Mengzi 661100, China*)

Abstract: In this paper, we study the uniqueness of meromorphic functions that share one value set with weight one. By using the value distribution theory, we obtain a uniqueness theorem, which improves a result of H. Fujimoto.

Keywords: weight; shared value set; meromorphic function; uniqueness

2010 MR Subject Classification: 30D35