Vol. 36 (2016)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一类高阶齐次线性微分方程解的零点

曾娟娟, 刘慧芳
(江西师范大学数学与信息科学学院, 江西 南昌 330022)

摘 要: 本文研究一类整函数系数高阶齐次线性微分方程解的零点分布. 利用 Nevanlinna 值分布理论, 得到当系数 A_{k-1} 的增长性起主要支配作用时, 方程 $f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_0f=0$ 任意超越解的零点收敛指数为无穷, 推广了 Langley 和 Bank 等人的结果.

关键词: 整函数; 微分方程; 增长级; 零点收敛指数
MR(2010) **主题分类号**: 30D35 **中图分类号**: O174.5
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2016)04-0875-08

1 引言及主要结果

本文使用 Nevanlinna 值分布理论的标准记号和基本结果 [1−3], 并使用 $\sigma(f),\mu(f)$ 和 $\lambda(f)$ 分别表示亚纯函数 $f(z)$ 的级, 下级和零点收敛指数.

考虑高阶齐次线性微分方程

$$f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_0f=0, \tag{1.1}$$

其中 $A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 是整函数. 在文 [4] 中, Hellerstein, Miles 和 Rossi 证明了如果 $\max_{j\neq d}\{\sigma(A_j)\}<\sigma(A_d)\leq\frac{1}{2}$, 则方程 (1.1) 的每一个超越解都为无穷级. 在文 [5] 中, Bank 和 Langley 中研究了方程解的零点分布, 得到

定理 A 设 $k\geq 2, A_0,A_1,\cdots,A_{k-2}$ 是整函数, 满足

(i) A_0 是超越的且 $\sigma(A_0)<1/2$;

(ii) 对于 $j>0$, 或者 A_j 是多项式, 或者 $\sigma(A_j)<\sigma(A_0)$,

则方程

$$f^{(k)}+A_{k-2}f^{(k-2)}+\cdots+A_0f=0 \tag{1.2}$$

不可能有两个线性无关解 f_1,f_2 满足 $\max\{\lambda(f_1),\lambda(f_2)\}<\infty$.

Gao [6] 研究了在定理 A 中将起主导作用的系数 A_0 换为 $A_s(s\in\{2,\cdots,k-2\})$, 得到方程 (1.2) 至多有 $m=\min\{k-s,s-1\}$ 个超越线性无关解 $f_1,\cdots,f_m$ 满足 $\max\{\lambda(f_1),\cdots,\lambda(f_m)\}<\infty$.

Langley [7] 研究了在方程 (1.1) 中当其主导作用的系数为 A_{k-1} 时解的零点分布, 得到如下比定理 A 更强的结果.

定理 B 设 $k\geq 2, A_0,A_1,\cdots,A_{k-1}$ 是整函数, 满足

*收稿日期: 2014-01-12 接收日期:2014-04-08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11201195); 江西省自然科学基金项目 (20122BAB201012; 20132BAB201008).
作者简介: 曾娟娟 (1989–), 女, 江西赣州, 硕士, 主要研究方向: 复分析.

(i) A_{k-1} 是超越的且满足 $\sigma(A_{k-1})<1/2$;

(ii) 对于 $j\neq k-1$, 或者 A_j 是多项式, 或者 $\sigma(A_j)<\sigma(A_{k-1})$,

则方程 (1.1) 的任意超越解 f 都有 $\lambda(f)=\infty$.

自然地, 本文会考虑当对系数的级的限制条件减弱时, 是否也有类似于定理 B 的结论? 本文考虑了这一问题, 得到下述结果.

定理 设 $k\geq 2, A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ 是有限级整函数, 满足

(i) $\max\{\sigma(A_j): 0\leq j\leq k-2\}<\mu(A_{k-1})<1/2$, 或

(ii) A_j 是多项式, A_{k-1} 是超越的且 $\mu(A_{k-1})=0$,

则方程 (1.1) 的任意超越解 f 都满足 $\lambda(f)=\infty$.

注 由引理 2.4 可知在定理的条件下, 方程 (1.1) 的每一个超越解 f 都满足 $\mu(f)=\infty$. 而每个非超越解为次数不超过 $k-2$ 的多项式.

2 引理

引理 2.1 [8] 设 $f(z)$ 为超越亚纯函数, $\Gamma=\{(k_1,j_1),\cdots,(k_m,j_m)\}$ 是不同整数对组成的有限集合, 满足 $k_i>j_i\geq 0\ (i=1,\cdots,m)$. 又设 $\alpha>1$ 是一给定实常数, 则存在集合 $E\subset(1,+\infty)$ 具有有穷对数测度和依赖于 α 和 Γ 的常数 $B>0$, 使得对所有满足 $|z|=r\notin[0,1]\cup E$ 的 z 和 $(k,j)\in\Gamma$, 有

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right|\leq B\Big(\frac{T(\alpha r,f)}{r}\log^{\alpha}r\cdot\log T(\alpha r,f)\Big)^{k-j}.$$

引理 2.2 [9] 设 $f(z)$ 是超越整函数, 则存在对数测度为有穷的集合 $E\subset(1,+\infty)$, 使得当 z 满足 $|z|=r\notin[0,1]\cup E, |f(z)|=M(r,f)$ 时, 有

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right|\leq 2r^{s}(s\in\mathbf{N}),$$

其中 $M(r,f)=\max_{|z|=r}|f(z)|$.

引理 2.3 [10,11] 假设 $g(z)$ 是整函数, 且 $0\leq\mu(g)<1$, 则对每一个 $\alpha\in(\mu(g),1)$, 存在一集合 $E\subset[0,\infty)$, 满足

$$\overline{\log\mathrm{dens}}E\geq 1-\frac{\mu(g)}{\alpha},$$

其中 $E=\{r\in[0,\infty): m(r)>M(r)\cos\pi\alpha\}$, $m(r)=\inf\limits_{|z|=r}\log|g(z)|, M(r)=\sup\limits_{|z|=r}\log|g(z)|$.

引理 2.4 设 $k\geq 2, A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ 满足定理中条件, 则方程 (1.1) 的任一超越解 f 都有 $\mu(f)=\infty$.

证 设 f 是方程 (1.1) 的超越解, 由引理 2.1, 存在一个有穷对数测度的集合 $E_1\subset(1,\infty)$ 及常数 $B>0$, 使得对所有满足 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1$ 的 z 有

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(i)}(z)}\right|\leq B(T(2r,f))^{j+1}\ \ (0\leq i<j\leq k). \tag{2.1}$$

又由引理 2.2, 存在一个有穷对数测度的集合 $E_2\subset(1,\infty)$, 使得当 z 满足 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_2, |f(z)|=M(r,f)$ 时, 有

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(k-1)}(z)}\right|\leq r^{k}. \tag{2.2}$$

由方程 (1.1) 得

$$|A_{k-1}(z)| \leq \left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(k-1)}(z)}\right| + \left[\left|A_{k-2}(z)\frac{f^{(k-2)}(z)}{f(z)}\right| + \cdots + |A_0(z)|\right] \cdot \left|\frac{f(z)}{f^{(k-1)}(z)}\right|. \tag{2.3}$$

下面分情况讨论:

情形 (i) $\max\{\sigma(A_j) : 0 \leq j \leq k-2\} < \mu(A_{k-1}) < 1/2$. 记 $\max\{\sigma(A_j) : 0 \leq j \leq k-2\} = \sigma, \mu(A_{k-1}) = \mu$. 取 ε 满足 $0 < 2\varepsilon < \mu - \sigma$, 则存在 $r_1 > 0$, 使得当 $|z| = r > r_1$ 时, 有

$$|A_j(z)| \leq \exp\{r^{\sigma+\varepsilon}\}, (j = 0, 1, \cdots, k-2), \tag{2.4}$$

$$\log M(r, A_{k-1}) > r^{\mu-\varepsilon/2}. \tag{2.5}$$

对 $A_{k-1}(z)$ 运用引理 2.3, 取 $\alpha = \frac{1+2\mu}{4}$, 则存在集合 $E_3 \subset [0,\infty)$, 满足 $\overline{\log \mathrm{dens}} E_3 \geq 1 - \frac{\mu}{\alpha}$, 使得对所有满足 $|z| = r \in E_3$ 的 z, 有 $\log|A_{k-1}(z)| > \cos\pi\alpha \log M(r, A_{k-1})$. 再结合 (2.5) 式得对所有满足 $|z| = r \in E_3 \backslash [0, r_1]$ 的 z, 有

$$|A_{k-1}(z)| > \exp\{r^{\mu-\varepsilon}\}. \tag{2.6}$$

从而由 (2.1)–(2.6) 式得: 对满足 $|z| = r \in E_3 \backslash ([0, r_1] \cup E_1 \cup E_2)$ 且 $|f(z)| = M(r, f)$ 的 z, 有

$$\exp\{r^{\mu-\varepsilon}\} < |A_{k-1}(z)| \leq kB(T(2r, f))^{k+1} \cdot r^k \cdot \exp\{r^{\sigma+\varepsilon}\}.$$

故可得 $\mu(f) = \infty$.

情形 (ii) A_j $(0 \leq j \leq k-2)$ 是多项式, A_{k-1} 是超越的且 $\mu(A_{k-1}) = 0$. 对于多项式 A_j $(0 \leq j \leq k-2)$, 存在常数 $M_1 > 0$, 使得

$$|A_j(z)| = O(r^{M_1}). \tag{2.7}$$

由引理 3, 取 $\alpha = 1/4$, 则存在集合 $E_4 \subset [0,\infty)$, 满足 $\overline{\log \mathrm{dens}} E_4 = 1$, 使得对所有满足 $|z| = r \in E_4$ 的 z, 有 $\log|A_{k-1}(z)| > \frac{\sqrt{2}}{2}\log M(r, A_{k-1})$. 由于 $A_{k-1}(z)$ 是超越整函数, 故有

$$\frac{\min\{\log|A_{k-1}(z)| : |z| = r\}}{\log r} > \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\log M(r, A_{k-1})}{\log r} \longrightarrow \infty,$$

即对充分大的 $M(> M_1 + K)$, 存在 $r_2 > 0$, 使得对所有满足 $|z| = r \in E_4 \backslash [0, r_2]$ 的 z, 有

$$|A_{k-1}(z)| > r^M. \tag{2.8}$$

从而由 (2.1)–(2.3),(2.7) 和 (2.8) 式得对满足 $|z| = r \in E_4 \backslash ([0, r_2] \cup E_1 \cup E_2)$ 且 $|f(z)| = M(r, f)$ 的 z, 有

$$r^M < |A_{k-1}(z)| \leq kB(T(2r, f))^{k+1} \cdot r^k \cdot O(r^{M_1}). \tag{2.9}$$

由 (2.9) 式可得 $\mu(f) = \infty$. 引理得证.

引理 2.5 [3] 设 $F(r)$ 与 $G(r)$ 是 $(0,\infty)$ 上的单调非减实值函数. 如果 $F(r) \leq G(r), r \notin E$, 其中 E 是测度有限的集合, 则对任给常数 $\alpha > 1$, 存在 $r_0 > 0$, 当 $r > r_0$ 时, 有 $F(r) \leq G(\alpha r)$.

引理 2.6 设 $k \geq 2, A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ 满足定理中条件, 若方程 (1.1) 的一超越解 f 满足 $\lambda(f) < \infty$, 则 $f = we^h$, 其中 w 是 f 的零点构成的典型乘积或多项式, 满足 $\sigma(w) = \lambda(w) = \lambda(f) < \infty, h$ 为有限级超越整函数.

证 由引理 2.4 知若 f 为方程 (1.1) 的超越解, 则

$$\mu(f) = \sigma(f) = \infty. \tag{2.10}$$

假设 f 为方程 (1.1) 的满足 $\lambda(f) < \infty$ 超越解, 由 Hadamard 分解定理得 $f = we^h$, 其中 w 是 f 的零点构成的典型乘积或多项式, 满足 $\sigma(w) = \lambda(w) = \lambda(f) < \infty, h$ 为整函数. 再结合 (2.10) 式知 h 为超越整函数.

由数学归纳法知

$$f^{(k)} = we^h[(h')^k + P_{k-1}(h')] = f \cdot [(h')^k + P_{k-1}(h')], \tag{2.11}$$

其中 $P_{k-1}(h')$ 为 h' 的次数不超过 $k-1$ 的微分多项式, 系数为 $\frac{w'}{w}, \cdots, \frac{w^{(k)}}{w}$.

将 (2.11) 式代入方程 (1.1) 得

$$(h')^k = \overline{P_{k-1}}(h') - A_0, \tag{2.12}$$

其中 $\overline{P_{k-1}}(h')$ 为 h' 的次数不超过 $k-1$ 的微分多项式, 系数为 $\frac{w'}{w}, \cdots, \frac{w^{(k)}}{w}, A_1, \cdots, A_{k-1}$.

令 $H_1 = \{\theta \in [0, 2\pi) : |h'(re^{i\theta})| < 1\}, H_2 = [0, 2\pi) \backslash H_1$, 则由 (2.12) 式得

$$\begin{aligned} T(r, h') = m(r, h') &= \frac{1}{2\pi}\int_{H_1} \log^+ |h'(re^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{H_2} \log^+ |h'(re^{i\theta})| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{H_2} \log^+ |h'(re^{i\theta})| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{H_2} \log^+ \left|\frac{\overline{P_{k-1}}(h')}{(h')^{k-1}}\right| d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} \log^+ |A_0(re^{i\theta})| d\theta + O(1) \\ &\leq M\left[\sum_{j=1}^{k} m(r, \frac{w^{(j)}}{w}) + \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j)\right] + m(r, A_0) + S(r, h') \\ &\leq M\sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) + m(r, A_0) + O(\log rT(r, h')) \quad (r \longrightarrow \infty, r \notin E), \end{aligned}$$

其中 $M > 0$ 为一常数, E 为线测度有限的集合. 故由引理 2.5 及级的定义得 $\sigma(h') \leq \max\{\sigma(A_j : 0 \leq j \leq k-1)\} < +\infty$, 所以 h 为有限级. 引理得证.

引理 2.7 [8] 设 $w(z)$ 为开平面上有限 ρ 级超越亚纯函数, $\Gamma = \{(k_1, j_1), \ldots, (k_m, j_m)\}$ 是由不同整数对组成的有限集合, 满足 $k_i > j_i \geq 0$ $(i = 1, \cdots, m)$, 又设 $\varepsilon > 0$ 是给定常数, 则

(i) 存在零测度集 $E_1 \subset [0, 2\pi)$, 使得如果 $\psi_0 \in [0, 2\pi) \backslash E_1$, 则存在常数 $R_0 = R_0(\psi_0) > 0$, 对满足 $\arg z = \psi_0$ 及 $|z| \geq R_0$ 的所有 z 及所有 $(k, j) \in \Gamma$, 都有

$$\left|\frac{w^{(k)}(z)}{w^{(j)}(z)}\right| \leq |z|^{(k-j)(\rho-1+\varepsilon)}.$$

(ii) 存在对数测度为有限的集合 $E_2 \subset (1,+\infty)$, 使得对满足 $|z| = r \notin [0,1] \cup E_2$ 的所有 z 及 $(k,j) \in \Gamma$, 上式成立.

(iii) 存在测度为有限的集合 $E_3 \subset (0,+\infty)$, 使得对满足 $|z| = r \notin E_3$ 的所有 z 及 $(k,j) \in \Gamma$, 有

$$\left|\frac{w^{(k)}(z)}{w^{(j)}(z)}\right| \leq |z|^{(k-j)(\rho+\varepsilon)}.$$

引理 2.8 [3] 假设 $f(z)$ 为亚纯函数, 令 $\frac{f'(z)}{f(z)} = \xi(z)$, 则当 $n \geq 1$ 时,

$$\frac{f^{(n)}(z)}{f(z)} = \xi^n + \frac{n(n-1)}{2}\xi^{n-2}\xi' + \alpha_n \xi^{n-3}\xi'' + \beta_n \xi^{n-4}(\xi')^2 + P_{n-3}(\xi),$$

其中 $\alpha_n = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2), \beta_n = \frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3), P_{n-3}(\xi)$ 是 ξ 的常系数微分多项式, 当 $n \leq 3$ 时, 它恒等于 0, 当 $n > 3$ 时, 它的次数为 $n-3$.

引理 2.9 [12] 假设 $f(z), g(z)$ 为开平面上非常数亚纯函数, 若 $\sigma(f) < \mu(g)$, 则 $\mu(fg) = \mu(g)$.

引理 2.10 设 $A(z)$ 是有限级超越整函数, 若 $\mu(A) < 1/2$, 则 $A(z)$ 必有无穷多个零点.

证 由 Hadamard 分解定理知 $A(z) = w(z)e^{Q(z)}$, 其中 $w(z)$ 是 $A(z)$ 的零点构成的典型乘积或多项式, $Q(z)$ 为多项式.

假设 $A(z)$ 只有有限个零点, 则 $w(z)$ 为多项式, 又由于 $A(z)$ 是超越的, 所以 $\deg Q \geq 1$($\deg Q$ 表示多项式 $Q(z)$ 的次数). 注意到 $\sigma(\omega) = 0 < \deg Q = \mu(e^{Q(z)})$, 所以由引理 2.9 得 $\mu(A) = \mu(e^{Q(z)}) \geq 1$, 矛盾. 故 $A(z)$ 必有无穷多个零点.

3 定理的证明

设 f 是方程 (1.1) 的超越解, 则由引理 2.4 得 $\mu(f) = \sigma(f) = \infty$. 下面使用文 [6] 的方法证明 $\lambda(f) = \infty$.

假设 f 是方程 (1.1) 的满足 $\lambda(f) < \infty$ 的超越解, 则由引理 2.6 得 $f = we^h$, 其中 w 是 f 的零点构成的典型乘积或多项式, 满足 $\sigma(w) = \lambda(w) = \lambda(f) < \infty, h$ 为有限级超越整函数.

由引理 2.7, 存在对数测度为有限的集合 $E_5 \subset (1,+\infty)$, 使得对满足 $|z| = r \notin [0,1] \cup E_5$ 的所有 z, 有

$$\left|\frac{w^{(m)}}{w}\right| + \left|\frac{h^{(m)}}{h'}\right| \leq r^{M_2} \ \ (m = 1, \cdots, k), \tag{3.1}$$

其中 M_2 为一正常数, 在不同地方出现可代表不同常数.

下面分情况讨论:

情形 (i) $\max\{\sigma(A_j) : 0 \leq j \leq k-2\} < \mu(A_{k-1}) < 1/2$. 仍记 $\max\{\sigma(A_j) : 0 \leq j \leq k-2\} = \sigma, \mu(A_{k-1}) = \mu$. 取 ε 满足 $0 < 2\varepsilon < \mu - \sigma$, 这时仍有 (2.4) 和 (2.6) 式. 则存在序列 $\{r_n\}$ 满足 $r_n \longrightarrow \infty, r_n \in E_3 \backslash ([0, r_1] \cup E_5)$, 使得在 $|z| = r_n$ 上有

$$\log|A_{k-1}(z)| > r_n^{\mu-\varepsilon}, \tag{3.2}$$

$$|A_j(z)| = O(\exp\{r_n^{\sigma+\varepsilon}\}). \tag{3.3}$$

现在在 $|z|=r_n$ 上估计 $h'(z)$. 由 $h'(z)$ 是超越整函数, 存在 $N>0$(N 可取足够大), 使得如果点 z 在 $|z|=r_n$ 上并满足 $|h'(z)|\geq|z|^N$ 时, 则由 (2.11) 和 (3.1) 式易证

$$\frac{f^{(p)}}{f}=(h')^p\Big(1+O(|z|^{-M_2})\Big), p=1,\cdots,k. \tag{3.4}$$

将 $f=we^h$ 代入方程 (1.1), 两边除以 f, 由 (3.3), (3.4) 式, 对在 $|z|=r_n$ 上满足 $|h'(z)|\geq|z|^N$ 的 z, 有

$$(h')^k(1+o(1))+A_{k-1}(h')^{k-1}(1+o(1))+\sum_{m=0}^{k-2}O(\exp\{r_n^{\sigma+\varepsilon}\})(h')^m=0,$$

或

$$\frac{h'}{A_{k-1}}(1+o(1))+1+\sum_{m=0}^{k-2}O(\exp\{r_n^{\sigma+\varepsilon}\})(h')^{m-k}\cdot\frac{h'}{A_{k-1}}=0,$$

或

$$\frac{h'}{A_{k-1}}(1+o(1))+1+\frac{h'}{A_{k-1}}\frac{O(\exp\{r_n^{\sigma+\varepsilon}\})}{(h')^2}=0,$$

或

$$\frac{h'}{A_{k-1}}\Big(1+\frac{O(\exp\{r_n^{\sigma+\varepsilon}\})}{(h')^2}\Big)=-1. \tag{3.5}$$

如果存在无穷多个 n, 比如 n_k, 使得对在 $|z|=r_{n_k}$ 上满足 $|h'(z)|\geq|z|^N$ 的点 z 有 $|h'(z)|\leq\exp\{r_{n_k}^{\sigma+\varepsilon}\}$, 则由 (3.2) 式知当 $n_k\to\infty$ 时, (3.5) 式左边 $\to 0$, (3.5) 式显然不成立. 因此当 n 充分大时, 在 $|z|=r_n$ 上满足 $|h'(z)|\geq|z|^N$ 的点 z 必同时满足 $|h'(z)|>\exp\{r_n^{\sigma+\varepsilon}\}$. 从而由 (3.5) 式, 对在 $|z|=r_n$ 上满足 $|h'(z)|\geq|z|^N$ 的点 z 一致地有

$$\frac{h'}{A_{k-1}} = -1+o(1), \tag{3.6}$$

$$\frac{A_{k-1}}{h'} = -\Big(1+\frac{O(r_n^{M_2})}{h'}\Big). \tag{3.7}$$

现令 $G_{1,n}=\{z:|h'(z)|\geq|z|^N,|z|=r_n\}, G_{2,n}=\{z:|h'(z)|<|z|^N,|z|=r_n\}, G_n=\{z:|z|=r_n\}$, 则 $G_n=G_{1,n}\cup G_{2,n}, G_{1,n}\cap G_{2,n}=\emptyset$. 由 (3.2) 和 (3.6) 式, 当 r_n 充分大时, 有 $G_{1,n}=\{z:|h'(z)|>|z|^N,|z|=r_n\}$ 存在. 对于线性连通开集 G_n, 可分为两个开集 $G_{1,n},G_{2,n}$ 之并, 且 $G_{1,n}\cap G_{2,n}=\emptyset$. 故 $G_{1,n},G_{2,n}$ 中必有一个为空集. 因为 $h'(z)$ 是超越整函数, 当 r_n 足够大时, $G_{1,n}\neq\emptyset$, 也就是说, 当 r_n 足够大时, $G_{2,n}=\emptyset$. 因此当 r_n 足够大时, (3.4)–(3.7) 式总是成立的.

又由 (3.7) 式得 $A_{k-1}+h'=O(r_n^{M_2})$, 则 $A_{k-1}+h'$ 必为多项式. 而对于多项式 P, 可以把 e^P 合并到 w 中, 因此不妨设 $A_{k-1}+h'\equiv 0$, 即 $A_{k-1}\equiv -h'$. 对 $\frac{f'}{f}=h'+\frac{w'}{w}$ 运用引理 8, 再结合 (3.1) 式, 在 $|z|=r_n$ 上, 有

$$\frac{f^{(p)}}{f}=O(r_n^{M_2})(h')^{p-2}+\tbinom{p}{1}(h')^{p-1}\frac{w'}{w}+\tbinom{p}{2}(h')^{p-2}h''+(h')^p, p=2,\cdots,k. \tag{3.8}$$

于是由 (3.8) 式, 在 $|z|=r_n$ 上, 有

$$A_{k-1}\frac{f^{(k-1)}}{f}=-h'\frac{f^{(k-1)}}{f}=O(r_n^{M_2})(h')^{k-2}-\binom{k-1}{1}(h')^{k-1}\frac{w'}{w}-\binom{k-1}{2}(h')^{k-2}h''-(h')^k. \tag{3.9}$$

将 (3.8) 式代入 (1.1) 式, 结合 (3.1)–(3.3), (3.9) 式和 $h'\equiv -A_{k-1}$, 再两边除以 $(h')^{k-1}$, 当 r_n 足够大时, 在 $|z|=r_n$ 上有

$$\frac{w'}{w}+(k-1)\frac{h''}{h'}=\frac{O(r_n^{M_2})}{h'}-\frac{A_{k-2}}{h'},$$

故

$$\frac{w'}{w}+(k-1)\frac{A'_{k-1}}{A_{k-1}}=O(r_n^{-2}). \tag{3.10}$$

记 $F=w(A_{k-1})^{k-1}$, 由 (3.10) 式和幅角原理得

$$n(r_n,\frac{1}{F})=O(r_n^{-1}). \tag{3.11}$$

而根据引理 2.10 知 A_{k-1} 有无穷多个零点, 故 F 也必含有无穷多个零点, 矛盾! 所以 $\lambda(f)=\infty$.

情形 (ii) A_j $(0\le j\le k-2)$ 是多项式, A_{k-1} 是超越的且 $\mu(A_{k-1})=0$. 这时仍有 (2.7) 和 (2.8) 式. 则存在序列 $\{r_n\}$ 满足 $r_n\longrightarrow\infty, r_n\in E_4\backslash([0,r_2]\cup E_5)$, 在 $|z|=r_n$ 上有

$$|A_{k-1}(z)|>r_n^M, \tag{3.12}$$

$$|A_j(z)|=O(r_n^{M_1}). \tag{3.13}$$

使用类似于情形 (i) 的证法, 将 (3.2), (3.3) 式换成 (3.12), (3.13) 式即可证 $\lambda(f)=\infty$. 定理得证.

参 考 文 献

[1] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[2] Hayman W K. Meromorphic functions[M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.

[3] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations[M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1993.

[4] Hellerstein S, Miles J, Rossi J. On the growth of solutions of certain linear differential equations[J]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 1992, 17: 327–341.

[5] Bank S, Langley J. Oscillation theory for higher order linear differential equations with entire coefficients[J]. Compl. Var. The. Appl., 1991, 16: 163–175.

[6] Gao S. Some results on the complex oscillation for higher order homegeneous linear differential equations[J]. Kodia Math. J., 1996, 19: 355–364.

[7] Langley J. Some oscillation theorems for higher order linear differential equations with entire coefficients of small growth[J]. Res. Math., 1991, 20: 517–529.

[8] Gundersen G. Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates[J]. J. London Math. Soc., 1988, 37: 88–104.

[9] Chen Z X, Yang C C. Quantitative estimations on the zeros and growths of entire solutions of linear differential equations[J]. Compl. Var., 2000, 42: 119–133.

[10] Cheng W P, Jun Z. On the growth of solutions to the complex differential equation $f''+Af'+Bf=0$[J]. Sci. China, Math., 2011, 54: 939–947.

[11] Barry P D. Some throrems related to the $\cos\pi\rho$ theorem[J]. Proc. London Math. Soc., 1970, 21: 334–360.

[12] Yi H X, Yang C C. Uniqueness theory of meromorphic functions[M]. New York: Kluwer Acad. Publ., 2003.

ZEROS OF SOLUTIONS OF CERTAIN HIGHER ORDER HOMOGENEOUS LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

ZENG Juan-juan, LIU Hui-fang

(*College of Math. and Information Science, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China*)

Abstract: In this paper, we investigate the distribution of the zeros of the solutions for certain higher order homogeneous linear differential equations $f^{(k)}+A_{k-1}f^{(k-1)}+\cdots+A_0f=0$ with entire coefficients. By using the Nevanlinna's value distribution theory, we obtain that the exponent of convergence of zeros of every transcendental solution is infinite when A_{k-1} is the dominant coefficient, which extends the results of Langley and Bank.

Keywords: entire function; differential equation; growth of order; exponent of convergence of zeros

2010 MR Subject Classification: 30D35