Vol. 36 (2016)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一类离散生态经济系统稳定性与分支研究

刘唯一[1], 李必文[2], 傅朝金[3]
(1. 咸宁职业技术学院工学院, 湖北 咸宁 437100)
(2. 湖北师范大学数学与统计学院, 湖北 黄石 435002)
(3. 湖北师范大学文理学院, 湖北 黄石 435002)

摘 要: 本文研究了一个离散生态经济模型的稳定性和分支问题. 利用离散奇异系统理论, 中心流形定理及 Neimark-Sacker 分支理论, 得到了系统关于不动点的稳定性和 Neimark-Sacker 分支的有关结果, 并与相应的连续模型进行对比分析. 推广了文献 [5] 的结果.

关键词: Euler 方法; 稳定性; Neimark-Sacker 分支; 差分代数方程
MR(2010) **主题分类号**: 37G05; 39A28; 39A30 **中图分类号**: O193; O241.84; O155
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2016)04-0809-11

1 引言

近年来, 捕食者 - 食饵生态经济系统受到数学工作者的广泛关注和深入研究. 文献 [1-4] 研究了建立在微分方程基础上具有线性人为收获的捕食者 - 食饵系统, 得到了复杂的动力学行为, 如平衡点的稳定性 [1−4], Hopf 分支 [1−4], 周期解 [3] 等. 文献 [5] 研究了一类具有非线性收获率的捕食者 - 食饵生态经济系统的稳定性和 Hopf 分支. 它们都是用微分代数方程来描述的. 然而, 在捕食者 - 食饵生态经济系统中, 人们常以等间隔时间周期来统计食饵种群数量, 捕食者种群数量以及收获努力量. 对于离散型变量, 差分方程是研究它们之间变化规律的有效方法. 本文的研究基于下面具有非线性收获率的捕食者 - 食饵生态经济系统

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(a - kx - y\right) - e\dfrac{x}{1+mx}, \\ \dot{y} = y\left(-s + x\right), \\ 0 = e\left(p\dfrac{x}{1+mx} - c\right) - v, \end{cases} \tag{1.1}$$

这是受限形式的微分代数方程, 其中 $x = x\left(t\right)$, $y = y\left(t\right)$ 分别表示食饵种群的密度, 捕食者种群密度, $e = e\left(t\right)$ 表示渔民的收获努力量, 在渔业中通常用出动的渔船数或渔网数来度量, 相当于系统中的第二个捕食者. a, s, k 为正常数, 分别表示食饵种群的内禀增长率, 捕食者种群的死亡率, 食饵种群的死亡率. 第三个方程中, p 表示单位捕获物的价格, c 表示单位收获努力的收获成本, v 表示收获经济利润, m 为非负参数, 参见文献 [5, 6, 7]. 通过 Euler 方法将 (1.1) 离散化, 得到一个差分代数方程, 再讨论系统不动点的稳定性和 Neimark-Sacker 分支,

*收稿日期: 2015-02-03 接收日期: 2015-10-19
基金项目: 湖北省教育厅科学研究计划项目 (B2015429); 国家自然科学基金资助 (61304057); 湖北省教育厅优秀中青年科技创新团队资助 (T2014212); 咸宁职业技术学院校级课题 (2015Y006).
作者简介: 刘唯一 (1979–), 男, 湖北黄石, 讲师, 主要研究方向: 微分方程与动力系统.

最后通过 Matlab 数值仿真, 并将结果和系统 (1.1) 中的平衡点的稳定性, Hopf 分支值以及分支方向进行对比分析.

2 模型不动点存在性分析

对 (1.1) 式采用 Euler 方法进行离散化, 得

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \delta x_n\left(a - kx_n - y_n - \dfrac{e_n}{1+mx_n}\right), \\ y_{n+1} = y_n + \delta y_n(-s + x_n), \\ v = e_n\left(p\dfrac{x_n}{1+mx_n} - c\right), \end{cases}$$

其中 δ 为步长. 这是一个差分代数方程, 映射形式为

$$\begin{cases} x \mapsto x + \delta x\left(a - kx - y - \dfrac{e}{1+mx}\right), \\ y \mapsto y + \delta y(-s + x), \\ v = e\left(p\dfrac{x}{1+mx} - c\right). \end{cases} \tag{2.1}$$

为了方便, 令

$$\begin{aligned} &f(x,y,e) = \begin{pmatrix} f_1(x,y,e) \\ f_2(x,y,e) \end{pmatrix}, \\ &g(x,y,e) = e\left(p\frac{x}{1+mx} - c\right) - v, \\ &X = (x,y,e)^T, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} &f_1(x,y,e) = x + \delta x\left(a - kx - y - \frac{e}{1+mx}\right), \\ &f_2(x,y,e) = y + \delta y(-s + x). \end{aligned}$$

在区域 $\mathrm{R}_+^3 = \{(x,y,e)|x>0, y>0, e>0\}$ 内讨论系统 (2.1). 类似文献 [8, 9], 可以得到当 $v > 0$ 时, 系统 (2.1) 以 R_+^3 中点为初值的任意解具有正不变性和有界性.

系统 (2.1) 中, 不动点满足如下方程组

$$\begin{cases} a - kx - y - \dfrac{e}{1+mx} = 0, \\ -s + x = 0, \\ v = e\left(p\dfrac{x}{1+mx} - c\right), \end{cases}$$

容易求得不动点为

$$X_0 = (x_0, y_0, e_0)^T = \left(s, a - ks - \frac{e_0}{1+ms}, \frac{(1+ms)v}{(p-cm)s - c}\right)^T,$$

由实际生态经济意义, 假定

$$a - ks - \frac{e_0}{1+ms} > 0, (p-cm)s - c > 0. \tag{H1}$$

3 不动点的稳定性分析

系统 (2.1) 在不动点 X_0 处的广义 Jacobi 矩阵为

$$J(X_0) = \begin{pmatrix} 1 + x_0\delta\left(-k + \frac{e_0 m}{(1+mx_0)^2}\right) & -x_0\delta & -\frac{x_0\delta}{1+mx_0} \\ y_0\delta & 1 & 0 \\ \frac{e_0 p}{(1+mx_0)^2} & 0 & \frac{px_0}{1+mx_0} - c \end{pmatrix},$$

$J(X_0)$ 的相应广义特征方程为

$$\det\begin{pmatrix} 1 + x_0\delta\left(-k + \frac{e_0 m}{(1+mx_0)^2}\right) - \lambda & -x_0\delta & -\frac{x_0\delta}{1+mx_0} \\ y_0\delta & 1-\lambda & 0 \\ \frac{e_0 p}{(1+mx_0)^2} & 0 & \frac{px_0}{1+mx_0} - c \end{pmatrix} = 0.$$

即

$$\lambda^2 + P\lambda + Q = 0,$$

其中

$$\begin{aligned} P &= -2 - x_0\delta\left(-k + \frac{e_0 m}{(1+mx_0)^2}\right) - \frac{x_0\delta e_0 p}{(1+mx_0)^2((p-cm)x_0 - c)}, \\ Q &= 1 + x_0\delta\left(-k + \frac{e_0 m}{(1+mx_0)^2}\right) + \frac{x_0\delta e_0 p}{(1+mx_0)^2((p-cm)x_0 - c)} + x_0 y_0 \delta^2. \end{aligned}$$

令

$$F(\lambda) = \lambda^2 + P\lambda + Q,$$

则

$$\begin{aligned} &F(1) = x_0 y_0 \delta^2, \\ &F(-1) = 4 + 2x_0\delta\left(-k + \frac{e_0 m}{(1+mx_0)^2}\right) + \frac{2x_0\delta e_0 p}{(1+mx_0)^2((p-cm)x_0 - c)} + x_0 y_0 \delta^2. \end{aligned}$$

定义 1 假设 λ_1 和 λ_2 是系统 (2.1) 在正不动点 X_0 处广义 Jacobi 矩阵的广义特征方程的两个根, 则

1) 若 $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$, 则 X_0 为汇, 且局部渐近稳定;

2) 若 $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| > 1$, 则 X_0 为源, 且不稳定;

3) 若 $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| > 1$(或 $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| < 1$), 则 X_0 为鞍点;

4) 若 $|\lambda_1| = 1$ 或 $|\lambda_2| = 1$, 则 X_0 为非双曲不动点.

由定义 1 看出, 系统不动点的稳定性和 Jacobi 矩阵的特征根有关. 接下来需要以下引理, 参见文献 [10].

引理 1 令 $F(\lambda)=\lambda^2+P\lambda+Q$, 若 $F(1)>0$, 则

1) $|\lambda_1|<1$, $|\lambda_2|<1$, 当且仅当 $F(-1)>0, Q<1$;

2) $|\lambda_1|>1$, $|\lambda_2|>1$, 当且仅当 $F(-1)>0, Q>1$;

3) $|\lambda_1|<1$, $|\lambda_2|>1$(或 $|\lambda_1|>1$, $|\lambda_2|<1$), 当且仅当 $F(-1)<0$;

4) $\lambda_1=-1$ 或 $|\lambda_2|\neq 1$, 当且仅当 $F(-1)=0$ 和 $P\neq 0,2$;

5) λ_1 和 λ_2 为复数, 且 $|\lambda_1|=|\lambda_2|=1$, 当且仅当 $P^2-4Q<0$, $Q=1$.

由定义 1 和引理 1 容易得到如下关于不动点的稳定性定理.

定理 1 当系统 (2.1) 满足 (H1) 时, 有唯一的正不动点 X_0, X_0 为

1) 汇, 当且仅当 $2x_0\delta\left(-k+\frac{e_0m}{(1+mx_0)^2}\right)+\frac{2x_0\delta e_0p}{(1+mx_0)^2((p-cm)x_0-c)}+x_0y_0\delta^2+4>0$, 且 $x_0\delta\left(-k+\frac{e_0m}{(1+mx_0)^2}\right)+\frac{x_0\delta e_0p}{(1+mx_0)^2((p-cm)x_0-c)}+x_0y_0\delta^2<0$;

2) 源, 当且仅当 $2x_0\delta\left(-k+\frac{e_0m}{(1+mx_0)^2}\right)+\frac{2x_0\delta e_0p}{(1+mx_0)^2((p-cm)x_0-c)}+x_0y_0\delta^2+4>0$, 且 $x_0\delta\left(-k+\frac{e_0m}{(1+mx_0)^2}\right)+\frac{x_0\delta e_0p}{(1+mx_0)^2((p-cm)x_0-c)}+x_0y_0\delta^2>0$;

3) 鞍点, 当且仅当 $2x_0\delta\left(-k+\frac{e_0m}{(1+mx_0)^2}\right)+\frac{2x_0\delta e_0p}{(1+mx_0)^2((p-cm)x_0-c)}+x_0y_0\delta^2+4<0$;

4) 非双曲不动点, 当且仅当

$$P^2-4Q<0, Q=1\Leftrightarrow v=v_0. \tag{H2}$$

事实上, 由 $Q=1$, 即

$$x_0\delta\left(-k+\frac{e_0m}{(1+mx_0)^2}\right)+\frac{x_0\delta e_0p}{(1+mx_0)^2((p-cm)x_0-c)}+x_0y_0\delta^2=0,$$

又 $e_0=\frac{(1+ms)v}{(p-cm)s-c}$, $y_0=a-ks-\frac{e_0}{1+ms}$. 取满足 (H1), (H2) 的参数值 a, c, k, m, s, p, δ, 从而可以找到相应的 v 值, 记为 v_0.

4 Neimark-Sacker 分支分析

由以上不动点稳定性分析中的定理 1, 可以得到下面关于分支存在条件的定理.

定理 2 系统 (2.1) 当参数 v 在 v_0 的小邻域内变化时, 不动点 X_0 处可能会出现 Neimark-Sacker 分支.

取满足 (H1), (H2) 的参数, 系统 (2.1) 可表为

$$\begin{cases} x\mapsto x+\delta x\left(a-kx-y-\dfrac{e}{1+mx}\right), \\ y\mapsto y+\delta y(-s+x), \\ v_0=e\left(p\dfrac{x}{1+mx}-c\right). \end{cases} \tag{4.1}$$

选取 v^* 作为变化参数, 系统 (4.1) 在微小扰动下变为

$$\begin{cases} x\mapsto x+\delta x\left(a-kx-y-\dfrac{e}{1+mx}\right), \\ y\mapsto y+\delta y(-s+x), \\ v_0+v^*=e\left(p\dfrac{x}{1+mx}-c\right), \end{cases} \tag{4.2}$$

其中 $|v^*| \ll 1$ 为一个很小的扰动参数.

定义系统 (2.1) 的局部参数化 ψ:

$$\begin{aligned}&X=\psi(Z)=X_0+U_0Z+V_0H(Z),\\&g(v,\psi(Z))=0,\end{aligned}$$

其中

$$U_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix},V_0=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},Z=(z_1,z_2)^T.$$

$H:\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}$ 是一个光滑映射, 参见文献 [11, 12]. 基于上述函数 ψ 的定义, 有

$$D\psi(Z)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-\frac{ep}{(1+mx)((p-cm)x-c)}&0\end{pmatrix}=\Big(D_{Z_1}\psi(Z),\quad D_{Z_2}\psi(Z)\Big),$$

系统 (2.1) 可降阶变为形如

$$Z\mapsto f(\psi(Z)),Z\in A\subset\mathrm{R}^2 \tag{4.3}$$

的系统, 其中 $A=\psi^{-1}(B(X_0))$, $B(X_0)$ 为包含 X_0 的一个开域.

系统 (4.3) 在正不动点 $Z_0=0$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{aligned}D_Zf(\psi(0))&=Df(X_0)D\psi(0)\\&=\begin{pmatrix}1+x_0\delta\left(-k+\frac{e_0m}{(1+mx_0)^2}\right)&-x_0\delta&-\frac{x_0\delta}{1+mx_0}\\y_0\delta&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Dg(X)\\U_0^T\end{pmatrix}^{-1}_{x=x_0}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1+x_0\delta\left(-k+\frac{e_0m}{(1+mx_0)^2}\right)+\frac{x_0\delta e_0p}{(1+mx_0)((p-cm)x_0-c)}&-x_0\delta\\y_0\delta&1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

其中隐含的 v 为 $v=v_0+v^*$.

由 (4.2) 式得

$$\begin{cases}z_1\mapsto a_1z_1+a_2z_2+a_{11}z_1^2+a_{12}z_1z_2+a_{22}z_2^2+a_{111}z_1^3+a_{112}z_1^2z_2+a_{122}z_1z_2^2\\\qquad+a_{222}z_2^3+O((|z_1|+|z_2|)^4),\\z_2\mapsto b_1z_1+b_2z_2+b_{11}z_1^2+b_{12}z_1z_2+b_{22}z_2^2+b_{111}z_1^3+b_{112}z_1^2z_2+b_{122}z_1z_2^2\\\qquad+b_{222}z_2^3+O((|z_1|+|z_2|)^4).\end{cases} \tag{4.4}$$

为了求出 (4.4) 式中的系数, 需要计算

$$\begin{aligned}f_{1Z_1}(X)&=Df_1(X)D_{Z_1}\psi(Z)\\&=1+\delta a-2\delta kx-\delta y-\frac{\delta e}{1+mx}+\frac{\delta exm}{(1+mx)^2}+\frac{\delta xep}{(1+mx)^2\left((p-cm)x-c\right)},\end{aligned}$$

$f_{1Z_2}(X)=Df_1(X)D_{Z_2}\psi(Z)=-\delta x,\ f_{2Z_1}(X)=Df_2(X)D_{Z_1}\psi(Z)=\delta y,$
$f_{2Z_2}(X)=Df_2(X)D_{Z_2}\psi(Z)=1+\delta x-\delta s,$

$$\begin{aligned}f_{1Z_1Z_1}(X)&=Df_{1Z_1}(X)D_{Z_1}\psi(Z)\\&=\frac{2\left(-x^3kcm^3+x^3kpm^2-3x^2kcm^2+2x^2kpm-3xkcm+xkp+ecm-kc-ep\right)\delta}{(1+mx)^2\left(-xp+xcm+c\right)},\end{aligned}$$

$f_{1Z_1Z_2}(X)=Df_{1Z_1}(X)D_{Z_2}\psi(Z)=-\delta,\ f_{1Z_2Z_2}(X)=Df_{1Z_2}(X)D_{Z_2}\psi(Z)=0,$
$f_{2Z_1Z_1}(X)=Df_{2Z_1}(X)D_{Z_1}\psi(Z)=0,\ f_{2Z_1Z_2}(X)=Df_{2Z_1}(X)D_{Z_2}\psi(Z)=\delta,$
$f_{2Z_2Z_2}(X)=Df_{2Z_2}(X)D_{Z_2}\psi(Z)=0,$

$$f_{1Z_1Z_1Z_1}(X)=Df_{1Z_1Z_1}(X)D_{Z_1}\psi(Z)=-\frac{2\delta e\left(-p+cm\right)\left(3cm^2x+3cm-3pmx-2p\right)}{(1+mx)^3(-xp+xcm+c)^2},$$

$f_{1Z_1Z_1Z_2}(X)=Df_{1Z_1Z_1}(X)D_{Z_2}\psi(Z)=0,\ f_{1Z_1Z_2Z_2}(X)=Df_{1Z_1Z_2}(X)D_{Z_2}\psi(Z)=0,$
$f_{1Z_2Z_2Z_2}(X)=Df_{1Z_2Z_2}(X)D_{Z_2}\psi(Z)=0,\ f_{2Z_1Z_1Z_1}(X)=Df_{2Z_1Z_1}(X)D_{Z_1}\psi(Z)=0,$
$f_{2Z_1Z_1Z_2}(X)=Df_{2Z_1Z_1}(X)D_{Z_2}\psi(Z)=0,\ f_{2Z_1Z_2Z_2}(X)=Df_{2Z_1Z_2}(X)D_{Z_2}\psi(Z)=0,$
$f_{2Z_2Z_2Z_2}(X)=Df_{2Z_2Z_2}(X)D_{Z_2}\psi(Z)=0.$

将 X_0 分别代入可得

$f_{1Z_1}(X_0)=1-\delta kx_0+\frac{\delta ex_0m}{(1+mx_0)^2}+\frac{\delta x_0e_0p}{(1+mx_0)^2((p-cm)x_0-c)},\ f_{1Z_2}(X_0)=-\delta x_0,\ f_{2Z_1}(X_0)=\delta y_0,$
$f_{2Z_2}(X_0)=1,$
$f_{1Z_1Z_1}(X_0)=\frac{2\left(-x_0{}^3kcm^3+x_0{}^3kpm^2-3x_0{}^2kcm^2+2x_0{}^2kpm-3x_0kcm+x_0kp+e_0cm-kc-e_0p\right)\delta}{(1+mx_0)^2(-x_0p+x_0cm+c)},$
$f_{1Z_1Z_2}(X_0)=-\delta,\ f_{1Z_2Z_2}(X_0)=0,\ f_{2Z_1Z_1}(X_0)=0,\ f_{2Z_1Z_2}(X_0)=\delta,\ f_{2Z_2Z_2}(X_0)=0,$
$f_{1Z_1Z_1Z_1}(X_0)=-\frac{2\delta e_0(-p+cm)\left(3cm^2x_0+3cm-3pmx_0-2p\right)}{(1+mx_0)^3(-x_0p+x_0cm+c)^2},\ f_{1Z_1Z_1Z_2}(X_0)=0,\ f_{1Z_1Z_2Z_2}(X_0)=0,$
$f_{1Z_2Z_2Z_2}(X_0)=0,\ f_{2Z_1Z_1Z_1}(X_0)=0,$
$f_{2Z_1Z_1Z_2}(X_0)=0,\ f_{2Z_1Z_2Z_2}(X_0)=0,\ f_{2Z_2Z_2Z_2}(X_0)=0.$

所以

$a_1=1-\delta kx_0+\frac{\delta e_0x_0m}{(1+mx_0)^2}+\frac{\delta x_0e_0p}{(1+mx_0)^2((p-cm)x_0-c)},\ a_2=-\delta x_0,$
$a_{11}=\frac{2\left(-x_0{}^3kcm^3+x_0{}^3kpm^2-3x_0{}^2kcm^2+2x_0{}^2kpm-3x_0kcm+x_0kp+e_0cm-kc-e_0p\right)\delta}{(1+mx_0)^2(-x_0p+x_0cm+c)},$
$a_{12}=-\delta,\ a_{22}=0,\ a_{111}=-\frac{2\delta e_0(-p+cm)\left(3cm^2x_0+3cm-3pmx_0-2p\right)}{(1+mx_0)^3(-x_0p+x_0cm+c)^2},$
$a_{112}=0,\ a_{122}=0,\ a_{222}=0,\ b_1=\delta y_0,\ b_2=1,\ b_{11}=0,\ b_{12}=\delta,$
$b_{22}=0,\ b_{111}=0,\ b_{112}=0,\ b_{122}=0,\ b_{222}=0.$

系统 (4.4) 的线性化部分在 $(0,0)$ 处的特征方程为 $\lambda^2+P(v^*)\lambda+Q(v^*)=0$, 其中

$$\begin{aligned}P(v^*)&=-2-x_0\delta\left(-k+\frac{e_0m}{(1+mx_0)^2}\right)-\frac{x_0\delta e_0p}{(1+mx_0)^2((p-cm)x_0-c)},\\Q(v^*)&=1+x_0\delta\left(-k+\frac{e_0m}{(1+mx_0)^2}\right)+\frac{x_0\delta e_0p}{(1+mx_0)^2((p-cm)x_0-c)}+x_0y_0\delta^2,\\y_0&=a-ks-\frac{v_0+v^*}{(p-cm)s-c},\\e_0&=\frac{1+ms}{(p-cm)s-c}(v_0+v^*).\end{aligned}$$

因此

$$\lambda_1=-\frac{P(v^*)}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{4Q(v^*)-P^2(v^*)}=\alpha+i\omega,$$

$$\lambda_2 = -\frac{P(v^*)}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{4Q(v^*) - P^2(v^*)} = \alpha - i\omega,$$

其中 $\alpha = -\frac{P(v^*)}{2}, \omega = \frac{\sqrt{4Q(v^*)-P^2(v^*)}}{2}$, 且 $|\lambda_{1,2}|_{v^*=0} = \sqrt{Q(0)} = 1$, $\frac{d|\lambda_{1,2}|}{dv^*}\Big|_{v^*=0} \neq 0$. 当选择参数满足 (H1) 和 (H2), 且 $P(0) \neq 0$ 时, $(\lambda_{1,2})^n \neq 1 (n = 1, 2, 3, 4)$. 此时, 系统 (4.4) 在其不动点 $(0, 0)$ 处的特征值不在单位圆和坐标轴的交点上, 即系统产生的是 Neimark-Sacker 分支, 而不是折叠分支或者 Flip 分支, 参见文 [13].

下面求 (4.4) 式在 $v^* = 0$ 处的标准型

$$T = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ \alpha - a_1 & -\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ \frac{b_2 - a_1}{2} & -\omega \end{pmatrix}$$

是可逆的. 通过变换 $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, 系统 (4.1) 变为如下形式

$$\begin{cases} u \mapsto \alpha u - \omega v + \bar{f}_1(u, v), \\ v \mapsto \omega u + a v + \bar{f}_2(u, v), \end{cases} \tag{4.5}$$

在 (4.5) 式中

$$\bar{f}_1(u, v) = \tilde{a}_{11}u^2 + \tilde{a}_{12}uv + \tilde{a}_{22}v^2 + \tilde{a}_{111}u^3 + \tilde{a}_{112}u^2v + \tilde{a}_{122}uv^2 + \tilde{a}_{222}v^3 + O((|u| + |v|)^4),$$
$$\bar{f}_2(u, v) = \tilde{b}_{11}u^2 + \tilde{b}_{12}uv + \tilde{b}_{22}v^2 + \tilde{b}_{111}u^3 + \tilde{b}_{112}u^2v + \tilde{b}_{122}uv^2 + \tilde{b}_{222}v^3 + O((|u| + |v|)^4).$$

令

$$\xi = \frac{\alpha - a_1}{a_2}, \tilde{a}_{11} = a_2(a_{11} + \xi a_{12} + \xi^2 a_{22}), \tilde{a}_{12} = -(a_{12} + 2\xi a_{22})\omega,$$
$$\tilde{a}_{22} = \frac{a_{22}\xi^2}{a_2}, \tilde{a}_{111} = a_2^2 a_{111} + \xi a_2^2 a_{112} + \xi^2 a_2^2 a_{122} + \xi a_{222},$$
$$\tilde{a}_{112} = -\omega\left(\frac{a_{112}}{a_2} + 2\xi a_2 a_{122} + 3\xi^2 a_2 a_{222}\right), \tilde{a}_{122} = \omega^2(a_{112} + 3\xi a_{222}),$$
$$\tilde{a}_{222} = -\frac{a_{222}\xi^3}{a_2}, \tilde{b}_{11} = \frac{a_2^2}{\omega}\left(\xi a_{11} - b_{11} + \xi(\xi a_{12} - b_{12}) + \xi^2(\xi a_{22} - b_{22})\right),$$
$$\tilde{b}_{12} = -a_2\left(\xi a_{12} - b_{12} + 2\xi(\xi a_{22} - b_{22})\right), \tilde{b}_{22} = \omega(\xi a_{22} - b_{22}),$$
$$\tilde{b}_{111} = \frac{a_2}{\omega}\left(a_2^2(\xi a_{111} - b_{111}) + \xi a_2^2(\xi a_{112} - b_{112}) + \xi^2 a_2^2(\xi a_{122} - b_{122}) + \xi(\xi a_{222} - b_{222})\right),$$
$$\tilde{b}_{112} = -\left(\xi a_{112} - b_{112} + 2\xi a_2^2(\xi a_{122} - b_{122}) + 3\xi^2 a_2^2(\xi a_{222} - b_{222})\right),$$
$$\tilde{b}_{122} = a_2\omega\left(\xi a_{122} - b_{122} + 3\xi(\xi a_{222} - b_{222})\right), \tilde{b}_{222} = -\omega^2(\xi a_{222} - b_{222}).$$

由 $\bar{f}_1(u, v), \bar{f}_2(u, v)$ 可计算其在 $(0, 0)$ 处的二阶, 三阶导数分别为

$$\bar{f}_{1uu} = 2\tilde{a}_{11}, \bar{f}_{1uv} = 2\tilde{a}_{12}, \bar{f}_{1vv} = 2\tilde{a}_{22}, \bar{f}_{1uuu} = 6\tilde{a}_{111},$$
$$\bar{f}_{1uuv} = 6\tilde{a}_{112}, \bar{f}_{1uvv} = 6\tilde{a}_{122}, \bar{f}_{1vvv} = 6\tilde{a}_{222},$$

$$\bar{f}_{2uu}=2\tilde{b}_{11},\bar{f}_{2uv}=2\tilde{b}_{12},\bar{f}_{2vv}=2\tilde{b}_{22},$$
$$\bar{f}_{2uuu}=6\tilde{b}_{111},\bar{f}_{2uuv}=6\tilde{b}_{112},\bar{f}_{2uvv}=6\tilde{b}_{122},\bar{f}_{2vvv}=6\tilde{b}_{222}.$$

为使系统 (4.5) 存在 Neimark-Sacker 分支, 要求当 $v^*=0$ 时下面的判定值不为零

$$\beta=\left(-\mathrm{Re}\left(\frac{(1-2\lambda_1)\lambda_2^2}{1-\lambda_1}\xi_1\xi_2\right)-\frac{1}{2}|\xi_2|^2-|\xi_3|^2+\mathrm{Re}(\lambda_2\xi_4)\right),$$

其中

$$\begin{aligned}
\xi_1&=\frac{1}{8}(\bar{f}_{1uu}-\bar{f}_{1vv}+2\bar{f}_{2uv}+i(\bar{f}_{2uu}-\bar{f}_{2vv}-2\bar{f}_{1uv})),\\
\xi_2&=\frac{1}{4}(\bar{f}_{1uu}+\bar{f}_{1vv}+i(\bar{f}_{2uu}+\bar{f}_{2vv})),\\
\xi_3&=\frac{1}{8}(\bar{f}_{1uu}-\bar{f}_{1vv}-2\bar{f}_{2uv}+i(\bar{f}_{2uu}-\bar{f}_{2vv}+2\bar{f}_{1uv})),\\
\xi_4&=\frac{1}{16}(\bar{f}_{1uuu}+\bar{f}_{1uvv}+\bar{f}_{2uuv}+\bar{f}_{2vvv}+i(\bar{f}_{2uuu}+\bar{f}_{2uvv}-\bar{f}_{1uuv}-\bar{f}_{1vvv})).
\end{aligned}$$

由以上分析和 Neimark-Sacker 分支理论, 参见文 [13], 有以下定理

定理 3 假设条件 (H1) 和 (H2) 成立, 且满足 $P(0)\neq 0$. 若 $\beta\neq 0$, 则当参数 v 在 v_0 的小邻域内变化时, 系统 (2.1) 在正不动点 X_0 处存在 Neimark-Sacker 分支. 若 $\beta<0$ (resp. $\beta>0$), 则当 $v>v_0$ (resp. $v<v_0$) 时, 系统 (2.1) 在正不动点 X_0 处产生一个渐近稳定 (不稳定) 的周期轨道.

5 数值仿真及对比分析

利用 MATLAB 来展示一个具体的例子.

设步长 δ=0.01, 并且以文献 [5] 中相同的初值出发. 容易验证它们满足 (H1) 和 (H2), 那么系统 (2.1) 变成

$$\begin{cases}x\mapsto x+0.01x\left(4-x-y-\dfrac{e}{1+0.1x}\right),\\ y\mapsto y+0.01y(-2+x),\\ v=e\left(\dfrac{x}{1+0.1x}-1\right).\end{cases}\tag{5.1}$$

计算得出系统 (5.1) 存在一个正不动点 $X_0=(2,1.1210767,1.05470795)$, 根据定理 1 可算出 $v_0=0.70313863$, 并求得广义 Jacobi 矩阵的特征值为

$$\lambda_1{=}0.9999+0.01497i,\lambda_2=0.9999-0.01497i,$$

且

$$|\lambda_{1,2}|=1,\beta{=}-715.5163<0.$$

根据定理 3, 当 $v>v_0$ 时, 不动点 $X_0=(2,1.1210767,1.05470795)$ 是不稳定的, 且有一个渐近稳定的周期轨道; 当 $v<v_0$ 时, 不动点 $X_0=(2,1.1210767,1.05470795)$ 是渐近稳定的, 且无周期轨道.

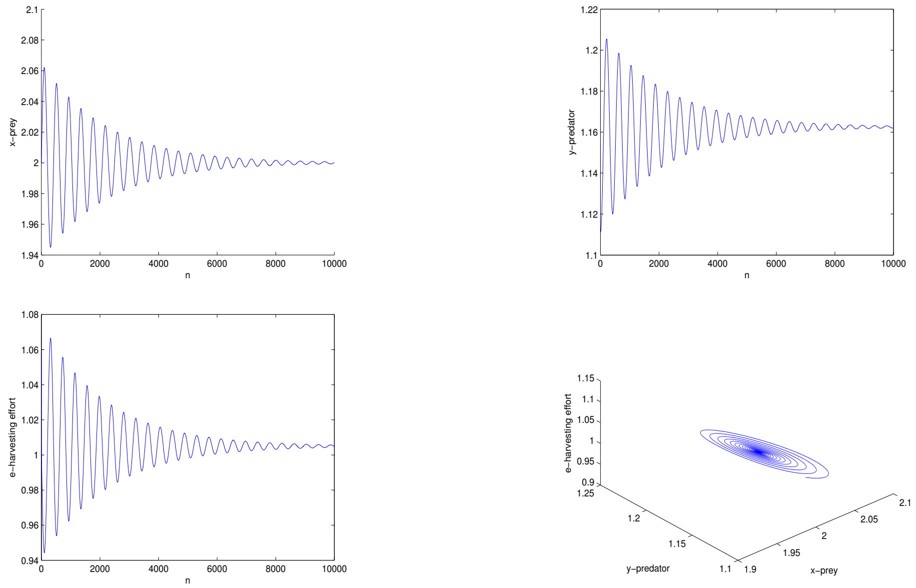

图 1: $a = 4$, $k = 1$, $s = 2$, $p = 1$, $m = 0.1$, $c = 1$, δ=0.01, $v = 0.67$ 情形下的 Neimark-Sacker 分支图

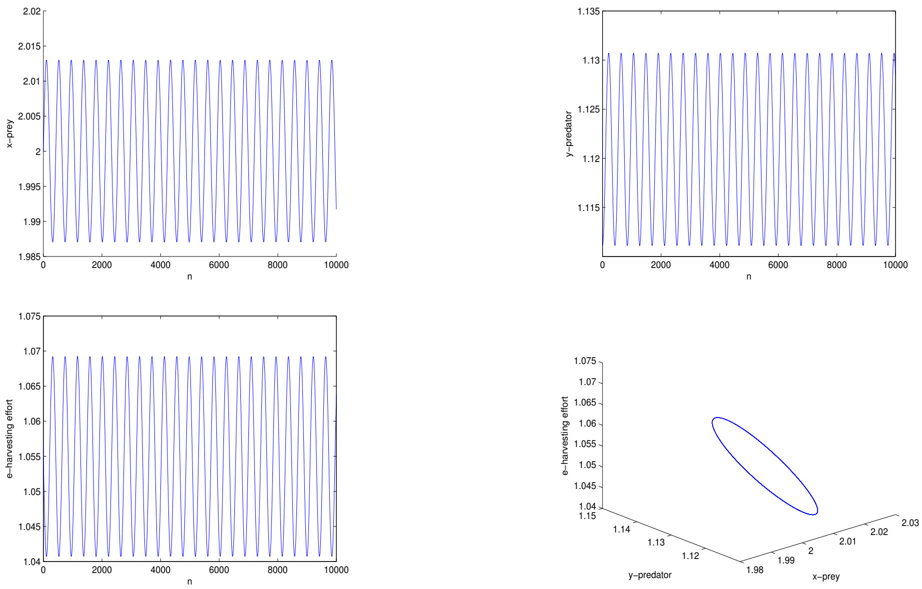

图 2: $a = 4$, $k = 1$, $s = 2$, $p = 1$, $m = 0.1$, $c = 1$, δ=0.01, $v = 0.7032$ 情形下的 Neimark-Sacker 分支图

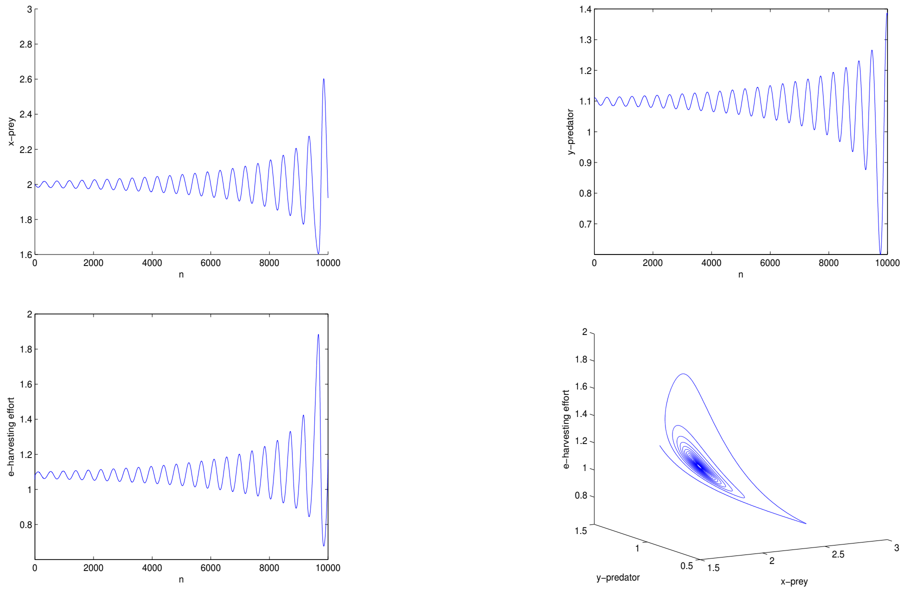

图 3: $a=4$, $k=1$, $s=2$, $p=1$, $m=0.1$, $c=1$, δ=0.01, $v=0.72074$ 情形下的 Neimark-Sacker 分支图

图 1 展示了当 $v=0.67<v_0$ 时系统 (5.1) 的不动点 X_0 是渐近稳定的; 图 3 展示了当 $v=0.72074>v_0$ 时系统 (5.1) 的不动点 X_0 是不稳定的. 说明当经济利润 v 由小变大通过 v_0 时, 生态系统 (5.1) 将失去稳定性. 以上事实说明, 渔民在作业时不能一味地追求经济利润最大化, 否则可能导致生态系统的不平衡, 甚至会引发灾害. 渔民们要有意识地保持经济利润在某个合理的区间内. 图 2 显示出当 v 在 v_0 的小邻域内, 系统在不动点处产生了一个渐近稳定的周期轨道.

与文献 [5] 中的结果进行比较发现, 当连续系统 (1.1) 经过 Euler 方法离散化得到系统 (2.1) 后, 平衡点和分支值都发生了变化. 步长 δ 越小, 则变化越小; 反之步长 δ 越大, 则变化越大. 这里取较小的值 δ=0.01, 计算得平衡点由 $(2, 1.111111, 1.0666665)$ 微小地变化到 $(2, 1.1210767, 1.05470795)$, 且分支值由 0.711111 微小地变化到 0.70313863. 综合两次实验发现, 系统 (1.1) 经过 Euler 离散化后在其 Hopf 分支值的小邻域内产生 Neimark-Sacker 分支, 且系统平衡点的稳定性, 分支方向和产生的极限环稳定性均保持一致, 即系统的 Hopf 分支性质得以保持. 因此 Neimark-Sacker 分支可以看做映射的 Hopf 分支. 但在实验过程中也发现, 连续系统经过 Euler 方法离散化后, 必须经过多次迭代 (实验中为 10000 次) 才能看出系统的渐近行为, 而原连续系统在较小的时间间隔 (实验中为 $[0, 250]$) 就可看出系统的渐近行为, 这是应该注意的问题.

参 考 文 献

[1] Liu W, Fu C J, Chen B S. Hopf bifurcation and center stability for a predator-prey biological economic model with prey harvesting [J]. Commun. Nonl. Sci. Numer. Simul., 2012, 17(10): 3989–3998.

[2] Liu W, Fu C J, Chen B S. Hopf bifurcation for a predator - prey biological economic system with Holling type Ⅱ functional response [J]. J. Franklin Insti., 2011, 348(6): 1114–1127.

[3] Zhang G D, Zhu L L, Chen B S. Hopf bifurcation and stability for a differential-algebraic biological economic system [J]. Appl. Math. Comput., 2010, 217(1): 330–338.

[4] 李华刚, 钱靖, 李必文, 陈伯山. 一类带收获和时滞的生态经济模型的稳定性和 Hopf 分支 [J]. 数学杂志, 2013, 33(3): 511–518.

[5] Liu W Y, Li B W, Fu C J, Chen B S. Dynamics of a predator-prey ecological system with nonlinear harvesting rate [J]. Wuhan Univ. J. Natur. Sci., 2015, 20(1): 25–33.

[6] Gordon H S. Economic theory of a common property resource: the fishery[J]. J. Polit. Econ., 1954, 62(2): 124–142.

[7] Griffiths K J, Holling C C. A competition submodel for parasites and predators[J]. Canadian Entomologist, 1969, 101(8): 785–818.

[8] Zhang G D, Shen Y, Chen B S. Bifurcation analysis in a discrete differential-algebraic predator-prey system [J]. Appl. Math. Model., 2014, 38: 4835–4848.

[9] Zhang G D, Shen Y. Periodic solutions for a neutral delay Hassell-Varley type predator-prey system [J]. Appl. Math. Comput., 2015, 264: 443–452.

[10] Liu X L, Xiao D M. Complex dynamic behaviors of a discrete-time predator-prey system[J]. Chaos Sol. Frac., 2007, 32: 80–94.

[11] Chen B S, Chen J J. Bifurcation and chaotic behavior of a discrete singular biological economic system[J]. Appl. Math. Comput., 2012, 219(5): 2371–2386.

[12] 陈伯山, 廖晓昕. 微分代数系统的标准型和分支 [J]. 应用数学学报, 2000, 23(3): 429–443.

[13] 陆启韶, 彭临平, 杨卓琴. 常微分方程与动力系统 [M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2010.

STABILITY AND BIFURCATION RESEARCH ON A CLASS OF DISCRETE BIOLOGICAL ECONOMIC SYSTEM

LIU Wei-yi[1], LI Bi-wen[2], FU Chao-jin[3]

(*1. School of Technology, Xianning Vocational Technical College, Xianning 437100, China*)

(*2. School of Mathematics and Statistics, Hubei Normal University, Huangshi 435002, China*)

(*3. School of Arts and Science, Hubei Normal University, Huangshi 435002, China*)

Abstract: The stability and bifurcation of a class of discrete biological economic system are studied. For this purpose, by discrete singular system theory, center manifold theorem and Neimark-Sacker bifurcation theory, some important results about the stability of fixed point and Neimark-Sacker bifurcation are obtained. The results about discrete system are comparatively analyzed with the corresponding continuous system, which extend the results in [5].

Keywords: Euler method; stability; Neimark-Sacker bifurcation; difference-algebraic equation

2010 MR Subject Classification: 37G05; 39A28; 39A30