Vol. 36 (2016)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

全平面上解析的零级 Laplace-Stieltjes 变换

杨 祺, 卢维娜, 田宏根
(新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830054)

摘 要: 本文研究了 Laplace-Stieltjes 变换所定义的零级整函数的增长性. 利用型函数, 得到了这类整函数关于增长性及正规增长性的充要条件, 推广了 Dirichlet 级数的相关结论.

关 键 词: Laplace-Stieltjes 变换; 级; Newton 多边形; 型函数
MR(2010) **主题分类号**: 30D99; 60F99 **中图分类号**: O175.55
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2016)03-0633-08

1 引言

关于 Dirichlet 级数的增长性和值分布的研究, 文 [1–3] 中已经取得了一系列的结果. Laplace-Stieltjes 变换可以看成是 Dirichlet 级数的推广. 余家荣先生于 1963 年在文献 [4] 中首先对 Laplace-Stieltjes 变换的增长性和值分布的研究作了一些奠定性的工作, 得到了三种不同的收敛横坐标和 Valiron-Knopp-Bohr 公式, 并定义了全平面上收敛的 Laplace-Stieltjes 变换的最大模, 最大项和增长级等, 推广了 Dirichlet 级数的相关结论. 最近, 关于 Laplace-Stieltjes 变换的研究, 已经有一些完美的结果 [4–9] . 但关于全平面上零级 Laplace-Stieltjes 变换的研究还不是很多. 本文应用高宗升先生的零级型函数, 首先定义了它关于型函数的级, 下级和正规增长级, 然后对全平面上的一类零级 Laplace-Stieltjes 变换的增长性进行了研究, 得到了关于它们的增长性和正规增长性的充要条件. 对于文中采用的记号除特别说明外均与文献 [4] 中的保持一致.

2 相关定义及主要引理

设 Laplace-Stieltjes 变换

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{sy} d\alpha(y) \ \ (s = \sigma + it, t \in R) \tag{2.1}$$

(为了表述方便, 后面简称为 L-S 变换), 其中 $\alpha(y)$ 是对于 $y \geq 0$ 有定义的实值或复值函数, 而且它在任何闭区间 $[0, X]$ $(0 < X < +\infty)$ 上是有界变差的. 取序列 $\{\lambda_n\}$, 满足

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n \uparrow +\infty, \tag{2.2}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) < +\infty, \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log n}{\lambda_n} = d < +\infty. \tag{2.3}$$

*收稿日期: 2015-05-12 接收日期: 2015-10-13
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11461070); 新疆师范大学优秀青年教师科研启动基金资助 (XJNU201417).
作者简介: 杨祺 (1979–), 女, 新疆阿克苏, 讲师, 主要研究方向: 复分析.

还假设 L-S 变换 (2.1) 满足

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\tfrac{\log A_n^*}{\lambda_n}=-\infty, \tag{2.4}$$

其中

$$A_n^*=\sup_{\lambda_n<x\le\lambda_{n+1},-\infty<t<\infty}|\int_{\lambda_n}^x e^{ity}d\alpha(y)|.$$

由文 [4] 中的一致收敛横坐标公式可知 L-S 变换 (2.1) 的一致收敛横坐标是 $-\infty$. 因此 L-S 变换 (2.1) 在全平面上收敛.

定义 2.1 L-S 变换 (2.1) 的最大模、最大项、最大项指标和增长级可以分别定义为

$$\begin{aligned}&M_u(\sigma,F)=\sup_{0<x<\infty,-\infty<t<\infty}|\int_0^x e^{(\sigma+it)y}d\alpha(y)|,\\&\mu(\sigma,F)=\max_{n\in N}\{A_n^*e^{\lambda_n\sigma}\},\\&N(\sigma,F)=\max_k\{\lambda_k|\mu(\sigma,F)=A_k^*e^{\lambda_k\sigma}\},\\&\tau_u=\overline{\lim_{\sigma\to\infty}}\frac{\log^+\log^+M_u(\sigma,F)}{\sigma},\end{aligned}$$

这里 $\log^+x=\max\{0,\log x\}$, 当 $\tau_u=0$ 时称 L-S 变换 (2.1) 为零级的.

引理 2.1 [1,2] 设 $M_u(\sigma,F)$ 在 $[a,\infty)$ 上正值连续且趋于 ∞,

$$\overline{\lim_{\sigma\to\infty}}\tfrac{\log M_u(\sigma,F)}{\sigma}=\infty,\overline{\lim_{\sigma\to\infty}}\tfrac{\log\log M_u(\sigma,F)-\log\sigma}{\log\sigma}=\beta\ \ (0<\beta<\infty), \tag{2.5}$$

则存在连续可微函数 $U(\sigma)=\sigma^{\beta(\sigma)},\beta(\sigma)\to\beta\ \ (\sigma\to\infty)$. 满足如下条件:

(1) $\log M(\sigma)\le U(\sigma)\sigma$, 存在 $\sigma_n\uparrow\infty$, 使 $\log M(\sigma_n)=U(\sigma_n)\sigma_n$;

(2) $U(\sigma)$ 严格单调趋于 ∞;

(3) 对于任何常数 $\alpha>0,U(\alpha\sigma)=\alpha^{\beta+o(1)}(1+o(1))U(\sigma)$,

称 $U(\sigma)$ 为型函数.

定义 2.2 设 $U(\sigma),M_u(\sigma,F)$ 为引理 2.1 中的函数, 若 $\underline{\lim}_{\sigma\to\infty}\frac{\log^+\log^+M_u(\sigma,F)-\log\sigma}{\log U(\sigma)}=\tau$, 则称 $F(s)$ 关于 $U(\sigma)$ 的下级为 τ ; 若 $\overline{\lim}_{\sigma\to\infty}\frac{\log^+\log^+M_u(\sigma,F)-\log\sigma}{\log U(\sigma)}=\rho$, 则称 $F(s)$ 关于 $U(\sigma)$ 的级为 ρ .

当 L-S 变换 (2.1) 满足 (2.2), (2.3), (2.4) 式时, 在 oxy 直角坐标平面上作点列 $\{P_n=(\lambda_n,-\log A_n^*)\}_{n=1}^\infty$, 任取 $\sigma>0$, 过点 $P_n=(\lambda_n,-\log A_n^*)$, 作斜率是 σ 的直线 $L(\sigma):y-(-\log A_n^*)=\sigma(x-\lambda_n)$, 该直线的纵截距为 $y=-\log A_n^*-\lambda_n\sigma$, 即 $-y=\log A_n^*e^{\lambda_n\sigma}$, 故对任意固定的 $\sigma>0$, $L(\sigma)$ 与 x 轴的交点越低, 对应项的正对数值越大. 因此过最大项指标 $\lambda_{n(\sigma)}$ 决定的点 $P_{\lambda_{n(\sigma)}}=(\lambda_{\lambda_{n(\sigma)}},-\log A_{\lambda_{n(\sigma)}}^*)$, 斜率为 σ 的直线下方不会有集合 $\{P_n=(\lambda_n,-\log A_n^*)\}_{n=1}^\infty$ 中的点. 记所有最大项指标的集合为 $W(F)=\{\lambda_{n(\sigma)}|\sigma\in(-\infty,+\infty)\}$. 记最大项指标所决定的点集 $H(F)=\{P_n=(\lambda_n,-\log A_n^*)|\lambda_n\in W(F)\}$, 依次连接 $H(F)$ 中的点, 则可得到一个 Newton 多边形 $\pi(F)$.

注意最大项指标 $\lambda_{n(\sigma)}$ 是单调上升左连续的阶梯函数. 记 $\lambda_{n(\sigma)}$ 的所有间断点为 $\{\sigma_k\}_{k=1}^\infty$, 它满足

$$\begin{aligned}&\sigma_1<\sigma_2<\cdots<\uparrow\ +\infty;\lambda_{n(\sigma)}=\lambda_{N_k};\sigma\in[\sigma_k,\sigma_{k+1}),\\&\sigma_k=\frac{-\log A_{N_k}^*+\log A_{N_{k-1}}^*}{\lambda_{N_k}-\lambda_{N_{k-1}}}>0,k=1,2,\cdots.\end{aligned} \tag{2.6}$$

称 (2.6) 式中的 $\{\lambda_{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 为最大项指标序列. 对应的 $(\lambda_{N_k}, -\log A_{N_k}^*)$ 是 Newton 多边形 $\pi(F)$ 的顶点. σ_k 对 k 是严格单调上升的. 将不在 Newton 多边形 $\pi(F)$ 边上的点 P_n, 垂直下移至多边形的边上, 记为 $P_n^c = (\lambda_n, -\log A_n^{c^*})$. 若 P_n 是 $\pi(F)$ 的顶点或在其边上, 则 P_n 与 P_n^c 重合.

定义

$$f^c(s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{c^*} e^{\lambda_n s}.$$

则 L-S 变换 $F(s)$ 和级数 $F^c(s)$ 有相等的最大项及最大项指标 $N(\sigma, F)$.

引理 2.2 [5] 在以上规定下, 存在正整数 M, 使得当 $k \geq M$ 时有

(1) $T_k = \frac{-\log A_{N_k}^*}{\lambda_{N_k}} > 0$, 对 k 是严格单调上升的;

(2) $\frac{-\log A_{N_k}^* + \log A_{N_{k-1}}^*}{\lambda_{N_k} - \lambda_{N_{k-1}}} > \frac{-\log A_{N_k}^*}{\lambda_{N_k}}$.

引理 2.3 [6] 设 L-S 变换 (2.1) 满足 (2.2), (2.3) 和 (2.4) 式, 则有

$$\log \mu(\sigma, F) = \log \mu(\sigma_1, F) + \int_{\sigma_1}^{\sigma} N(\sigma, f) d\sigma \ \ (\sigma_1 > 0).$$

引理 2.4 [4,6] 设 L-S 变换 (2.1) 满足 (2.2), (2.3) 和 (2.4) 式, 则对于任意的 $\varepsilon \in (0,1)$ 和充分大的 σ 有

$$\frac{1}{2}\mu(\sigma, F) \leq M_u(\sigma, F) \leq C\mu((1+2\varepsilon)\sigma, F),$$

其中 C 是常数.

引理 2.5 设 L-S 变换 (2.1) 满足 (2.2), (2.3) 和 (2.4) 式, 则有

(1) $\overline{\lim\limits_{\sigma\to\infty}} \frac{\log^+\log^+ M_u(\sigma,F) - \log\sigma}{\log U(\sigma)} = \rho \Leftrightarrow \overline{\lim\limits_{\sigma\to\infty}} \frac{\log^+\log^+ \mu(\sigma,F) - \log\sigma}{\log U(\sigma)} = \rho \Leftrightarrow \overline{\lim\limits_{\sigma\to\infty}} \frac{\log^+ N(\sigma,F)}{\log U(\sigma)} = \rho$,

(2) $\underline{\lim\limits_{\sigma\to\infty}} \frac{\log^+\log^+ M_u(\sigma,F) - \log\sigma}{\log U(\sigma)} = \tau \Leftrightarrow \underline{\lim\limits_{\sigma\to\infty}} \frac{\log^+\log^+ \mu(\sigma,F) - \log\sigma}{\log U(\sigma)} = \tau \Leftrightarrow \underline{\lim\limits_{\sigma\to\infty}} \frac{\log^+ N(\sigma,F)}{\log U(\sigma)} = \tau$.

证 (1) 由引理 2.4 并注意到型函数 $U(\sigma)$ 的性质易得

$$\overline{\lim_{\sigma\to\infty}} \frac{\log^+\log^+ M_u(\sigma,F) - \log\sigma}{\log U(\sigma)} = \rho \Leftrightarrow \overline{\lim_{\sigma\to\infty}} \frac{\log^+\log^+ \mu(\sigma,F) - \log\sigma}{\log U(\sigma)} = \rho.$$

下证

$$\overline{\lim_{\sigma\to\infty}} \frac{\log^+\log^+ \mu(\sigma,F) - \log\sigma}{\log U(\sigma)} = \rho \Leftrightarrow \overline{\lim_{\sigma\to\infty}} \frac{\log^+ N(\sigma,F)}{\log U(\sigma)} = \rho.$$

设 $\overline{\lim\limits_{\sigma\to\infty}} \frac{\log^+ N(\sigma,F)}{\log U(\sigma)} = \rho$, 则 $\forall \varepsilon \in (0, \rho)$, 当 σ 充分大时, 有 $N(\sigma, F) < U^{\rho+\varepsilon}(\sigma)$, 从而

$$\log \mu(\sigma, F) - \log \mu(\sigma_1, F) = \int_{\sigma_1}^{\sigma} N(\sigma, F) d\sigma \leq \int_{\sigma_1}^{\sigma} U^{\rho+\varepsilon}(\sigma) d\sigma \leq \sigma U^{\rho+\varepsilon}(\sigma),$$

不妨设 $\sigma_1 > 0$, 于是

$$\overline{\lim_{\sigma\to\infty}} \frac{\log^+\log^+ \mu(\sigma,F) - \log\sigma}{\log U(\sigma)} \leq \rho + \varepsilon,$$

由 ε 的任意性知

$$\overline{\lim_{\sigma\to\infty}} \frac{\log^+\log^+ \mu(\sigma,F) - \log\sigma}{\log U(\sigma)} \leq \rho.$$

另一方面由 $N(\sigma,F)$ 的单调性可得

$$\sigma N(\sigma,F)<\int_{\sigma}^{2\sigma}N(\sigma,F)d\sigma=\log\mu(2\sigma,F)-\log\mu(\sigma,F)\leq\log\mu(2\sigma,F).$$

取对数, 再同除以 $\log U(\sigma)$, 整理可得

$$\overline{\lim_{\sigma\to\infty}}\frac{\log^+ N(\sigma,F)}{\log U(\sigma)}\leq\overline{\lim_{\sigma\to\infty}}\frac{\log^+\log^+\mu(\sigma,F)-\log\sigma}{\log U(\sigma)}.$$

(1) 得证.

(2) 由引理 2.3 并注意到型函数 $U(\sigma)$ 的性质易得

$$\underline{\lim}_{\sigma\to\infty}\frac{\log^+\log^+ M_u(\sigma,F)-\log\sigma}{\log U(\sigma)}=\tau\Leftrightarrow\underline{\lim}_{\sigma\to\infty}\frac{\log^+\log^+\mu(\sigma,F)-\log\sigma}{\log U(\sigma)}=\tau.$$

下证

$$\underline{\lim}_{\sigma\to\infty}\frac{\log^+\log^+\mu(\sigma,F)-\log\sigma}{\log U(\sigma)}=\tau\Leftrightarrow\underline{\lim}_{\sigma\to\infty}\frac{\log^+ N(\sigma,F)}{\log U(\sigma)}=\tau.$$

设 $\underline{\lim}_{\sigma\to\infty}\frac{\log^+ N(\sigma,F)}{\log U(\sigma)}=\tau$, 则 $\forall\varepsilon\in(0,\tau)$, 当 σ 充分大时, $N(\sigma,F)>U^{\tau-\varepsilon}(\sigma)$, 从而

$$\log\mu(\sigma,F)-\log\mu(\sigma_1,F)=\int_{\sigma_1}^{\sigma}N(\sigma,f)d\sigma>\int_{\sigma_1}^{\sigma}U^{\tau-\varepsilon}(\sigma)d\sigma\geq\frac{\sigma}{2}U^{\tau-\varepsilon}(\sigma),$$

从而 $\underline{\lim}_{\sigma\to\infty}\frac{\log^+\log^+\mu(\sigma,F)-\log\sigma}{\log U(\sigma)}\geq\tau-\varepsilon$. 由 ε 的任意性知 $\underline{\lim}_{\sigma\to\infty}\frac{\log^+\log^+\mu(\sigma,F)-\log\sigma}{\log U(\sigma)}\geq\tau$.

另一方面由 $N(\sigma,F)$ 的单调性可得

$$\log\mu(\sigma,F)-\log\mu(\sigma_1,F)=\int_{\sigma_1}^{\sigma}N(\sigma,F)d\sigma\leq\sigma N(\sigma,F).$$

不妨设 $\sigma_1>0$, 由上式两边取对数, 再同除以 $\log U(\sigma)$, 整理可得

$$\underline{\lim}_{\sigma\to\infty}\frac{\log^+\log^+\mu(\sigma,F)-\log\sigma}{\log U(\sigma)}\leq\underline{\lim}_{\sigma\to\infty}\frac{\log^+ N(\sigma,F)}{\log U(\sigma)}.$$

至此, 引理 2.5 得证.

3 主要结果

定理 3.1 设 L-S 变换 (2.1) 满足条件 (2.2), (2.3), (2.4) 和 (2.5) 式, 则

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{\sigma\to\infty}\frac{\log^+\log^+ M_u(\sigma,F)-\log\sigma}{\log U(\sigma)}=\tau\quad&\Leftrightarrow\quad\max_{n_k}\underline{\lim}_{k\to\infty}\frac{\log\lambda_{n_{k-1}}}{\log U(\frac{-\log A^*_{n_k}}{\lambda_{n_k}})}=\tau\\&\Leftrightarrow\quad\underline{\lim}_{k\to\infty}\frac{\log\lambda_{N_{k-1}}}{\log U(\frac{-\log A^*_{N_k}}{\lambda_{N_k}})}=\tau,\end{aligned}$$

其中最大值是对所有上升的正整数 n_k 取的, 且最大值可以在最大项指标序列 $\{\lambda_{N_k}\}$ 上达到.

证 由于 $M_u(\sigma,F)$ 满足引理 2.1 中的 (2.5) 式, 则存在连续可微函数 $U(\sigma)$ 满足引理 2.1 中的结论. 任取上升的正整数序列 n_k, 设 $\varliminf\limits_{k\to\infty}\frac{\log\lambda_{n_{k-1}}}{\log U(\frac{-\log A^*_{n_k}}{\lambda_{n_k}})}=\tau_1>0$. 由条件, $\forall\varepsilon\in(0,\tau_1)$, 当 k 充分大时, $\frac{\log\lambda_{n_{k-1}}}{\log U(\frac{-\log A^*_{n_k}}{\lambda_{n_k}})}>\tau_1-\varepsilon$, 即 $\lambda_{n_{k-1}}^{\frac{1}{\tau_1-\varepsilon}}>U(\frac{-\log A^*_{n_k}}{\lambda_{n_k}})$.

设 $\nu=U(u)$ 与 $u=\phi(\nu)$ 是两个互为反函数的函数, 故当 $n>N$ 时, $\phi(\lambda_{n_{k-1}}^{\frac{1}{\tau_1-\varepsilon}})>\frac{-\log A^*_{n_k}}{\lambda_{n_k}}$. 取 σ_k 满足:$\sigma_k=2\phi(\lambda_{n_k}^{\frac{1}{\tau_1-\varepsilon}})$, 即 $\lambda_{n_k}=U^{\tau_1-\varepsilon}(\frac{\sigma_k}{2})$. 设 $0<\sigma_{k-1}<\sigma<\sigma_k$ 时, 有

$$\log^+\mu(\sigma,F)\geq\log^+\mu(\sigma_{k-1},F)\geq-\lambda_{n_k}\phi(\lambda_{n_{k-1}}^{\frac{1}{\tau_1-\varepsilon}})+\lambda_{n_k}\sigma_{k-1}=\lambda_{n_k}\phi(\lambda_{n_{k-1}}^{\frac{1}{\tau_1-\varepsilon}})=U^{\tau_1-\varepsilon}(\frac{\sigma_k}{2})\frac{\sigma_{k-1}}{2}.$$

由 (2.3) 式中的条件 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)<+\infty$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log\lambda_{n+1}}{\log\lambda_n}=1$, 从而 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\log\lambda_{n_{k+1}}}{\log\lambda_{n_k}}=1$. 又因为

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\log\lambda_{n_{k+1}}}{\log\lambda_{n_k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\log U^{\tau_1-\varepsilon}(\frac{\sigma_{k+1}}{2})}{\log U^{\tau_1-\varepsilon}(\frac{\sigma_k}{2})}=\lim_{k\to\infty}\frac{\log U(\frac{\sigma_{k+1}}{2})}{\log U(\frac{\sigma_k}{2})},$$

故有 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\log U(\frac{\sigma_k}{2})}{\log U(\frac{\sigma_{k+1}}{2})}=1$. 注意到型函数 $U(\sigma)=\sigma^{\beta(\sigma)},\beta(\sigma)\to\beta\ (\sigma\to\infty)$ 以及引理 2.1 中的 (3) 有

$$\begin{aligned}\varliminf_{\sigma\to\infty}\frac{\log^+\log^+\mu(\sigma,F)-\log\sigma}{\log U(\sigma)}&\geq\varliminf_{\sigma\to\infty}\frac{\log^+U^{\tau_1-\varepsilon}(\frac{\sigma_k}{2})\frac{\sigma_{k-1}}{2}-\log\sigma}{\log U(\sigma)}\\&\geq\varliminf_{k\to\infty}\frac{\log^+U^{\tau_1-\varepsilon}(\frac{\sigma_k}{2})\frac{\sigma_{k-1}}{2}}{\log U(\sigma_k)}-\frac{1}{\beta}\\&\geq(\tau_1-\varepsilon)\varliminf_{k\to\infty}\frac{\log^+U(\frac{\sigma_k}{2})}{\log U(\sigma_k)}+\varliminf_{k\to\infty}\frac{\log\frac{\sigma_{k-1}}{2}}{\log U(\sigma_k)}-\frac{1}{\beta}\\&=\tau_1-\varepsilon+\varliminf_{k\to\infty}\frac{\log\frac{\sigma_{k-1}}{2}}{\log U(\frac{\sigma_{k-1}}{2})}\cdot\frac{\log^+U(\frac{\sigma_{k-1}}{2})}{\log U(\frac{\sigma_k}{2})}\cdot\frac{\log^+U(\frac{\sigma_k}{2})}{\log U(\sigma_k)}-\frac{1}{\beta}\\&=\tau_1-\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε 的任意性知 $\varliminf\limits_{\sigma\to\infty}\frac{\log^+\log^+\mu(\sigma,F)-\log\sigma}{\log U(\sigma)}\geq\tau_1$. 结合引理 2.5 知

$$\varliminf_{\sigma\to\infty}\frac{\log^+\log^+M_u(\sigma,F)-\log\sigma}{\log U(\sigma)}\geq\max_{n_k}\varliminf_{k\to\infty}\frac{\log\lambda_{n_{k-1}}}{\log U(\frac{-\log A^*_{n_k}}{\lambda_{n_k}})}\geq\varliminf_{k\to\infty}\frac{\log\lambda_{N_{k-1}}}{\log U(\frac{-\log A^*_{N_k}}{\lambda_{N_k}})}. \tag{3.1}$$

另一方面, 设 $\varliminf\limits_{\sigma\to\infty}\frac{\log^+\log^+M_u(\sigma,F)-\log\sigma}{\log U(\sigma)}=\tau$.

由引理 2.5 知 $\varliminf\limits_{\sigma\to\infty}\frac{\log^+N(\sigma,F)}{\log U(\sigma)}=\tau$. 设 $\{\lambda_{N_k}\}=\{N(\sigma,F),\sigma>0\}$ 为最大项指标集合, 它随 k 单调上升, 且有 $\sigma_k=\frac{-\log A^*_{N_k}+\log A^*_{N_{k-1}}}{\lambda_{N_k}-\lambda_{N_{k-1}}}>0,k=1,2,\cdots$. 对任意充分大的 $\sigma>0,\exists k$ 使得 $\sigma\in[\sigma_k,\sigma_{k+1})$, 此时 $N(\sigma,F)=\lambda_{N_{k-1}}$, 故有 $\varliminf\limits_{\sigma\to\infty}\frac{\log^+N(\sigma,F)}{\log U(\sigma)}=\varliminf\limits_{k\to\infty}\frac{\log\lambda_{N_{k-1}}}{\log U(\sigma_k)}=\tau$. 因此, $\forall\varepsilon\in(0,\tau)$, 存在正整数 p, 使当 $\sigma_k\geq\sigma_p$ 时, 有

$$\lambda_{N_{k-1}}\geq U^{\tau-\varepsilon}(\sigma_k)=U^{\tau-\varepsilon}(\frac{-\log A^*_{N_k}+\log A^*_{N_{k-1}}}{\lambda_{N_k}-\lambda_{N_{k-1}}}).$$

由引理 2.2 得 $\lambda_{N_{k-1}} \geq U^{\tau-\varepsilon}(\sigma_k) > U^{\tau-\varepsilon}(\frac{-\log A^*_{N_k}}{\lambda_{N_k}})$. 所以 $\underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\log \lambda_{N_{k-1}}}{\log U(\frac{-\log A^*_{N_k}}{\lambda_{N_k}})} \geq \tau$, 即

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\log \lambda_{N_{k-1}}}{\log U(\frac{-\log A^*_{N_k}}{\lambda_{N_k}})} \geq \underline{\lim}_{\sigma\to\infty} \frac{\log^+\log^+ M_u(\sigma,F)-\log\sigma}{\log U(\sigma)}. \tag{3.2}$$

结合 (3.1), (3.2) 两式知定理 3.1 证毕.

定理 3.2 设 L-S 变换 (2.1) 满足条件 (2.2), (2.3), (2.4) 和 (2.5) 式, 则 $A_1 = A_2 = A_3$, 其中

$$A_1 = \overline{\lim_{\sigma\to\infty}} \frac{\log^+\log^+ M_u(\sigma,F)-\log\sigma}{\log U(\sigma)}, A_2 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log\lambda_n}{\log U(\frac{-\log A^*_n}{\lambda_n})}, A_3 = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{\log\lambda_{N_k}}{\log U(\frac{-\log A^*_{N_k}}{\lambda_{N_k}})}.$$

证 1) 首先 $A_3 \leq A_2$ 是显然的.

2) $A_2 \leq A_1$, 用反证法, 假设 $A_1 < A_2$, 因为

$$\overline{\lim_{\sigma\to\infty}} \frac{\log^+\log^+ M_u(\sigma,F)-\log\sigma}{\log U(\sigma)} = A_1,$$

于是可选择 $\varepsilon > 0$, 使 $A_1 + 2\varepsilon < A_2$. $\exists\sigma_0$, 当 $\sigma > \sigma_0$ 时有 $\log^+ M_u(\sigma,F) < U^{A_1+\varepsilon}(\sigma)\sigma$, 从而对于充分大的 σ, $\forall n$ 有

$$\log A^*_n + \lambda_n\sigma < U^{A_1+\varepsilon}(\sigma)\sigma, \tag{3.3}$$

对于固定的充分大的 n, 取 σ 满足 $U^{A_1+\varepsilon}(\sigma) = \frac{1}{2}\lambda_n$, 由 (3.3) 式知 $\log A^*_n + \lambda_n\sigma < \frac{1}{2}\lambda_n\sigma$, 故 $U(\frac{1}{2}\sigma) < U(-\frac{\log A^*_n}{\lambda_n})$. 由引理 2.1 中的 (3) 知 $U(\sigma) < CU(-\frac{\log A^*_n}{\lambda_n})$ 从而

$$\lambda_n = 2U^{A_1+\varepsilon}(\sigma) < CU^{A_1+\varepsilon}(-\frac{\log A^*_n}{\lambda_n}),$$

其中 C 是常数, 每次出现不一定相同. 所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log\lambda_n}{\log U(\frac{-\log A^*_n}{\lambda_n})} \leq A_1 + \varepsilon < A_2 - \varepsilon,$$

这与已知 $A_2 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log\lambda_n}{\log U(\frac{-\log A^*_n}{\lambda_n})}$ 矛盾! 因此 $A_2 \leq A_1$.

3) 最后证 $A_1 \leq A_3$. 由于 $\overline{\lim_{\sigma\to\infty}} \frac{\log\lambda_{N_k}}{\log U(\frac{-\log A^*_{N_k}}{\lambda_{N_k}})} = A_3$, 则 $\forall\varepsilon \in (0, A_3)$, 对充分大的 k 有 $\lambda_{N_k} < U^{A_3+\varepsilon}(\frac{-\log A^*_{N_k}}{\lambda_{N_k}})$. 设 $\nu = U(u)$ 与 $u = \phi(\nu)$ 是两个互为反函数的函数, 则 $\phi(\lambda_{N_k}^{\frac{1}{A_3+\varepsilon}}) < \frac{-\log A^*_{N_k}}{\lambda_{N_k}}$. 故有

$$\log A^*_{N_k} e^{\lambda_{N_k}\sigma} \leq \lambda_{N_k}(\sigma - \phi(\lambda_{N_k}^{\frac{1}{A_3+\varepsilon}})). \tag{3.4}$$

对任意固定的充分大的 $\sigma > 0$, 取 $K = K(\sigma)$ 使

$$\frac{K(\sigma)}{\sigma} = U^{A_3+\varepsilon}(\sigma + \frac{\sigma}{\log(\frac{-\log A^*_{N_k}}{\lambda_{N_k}})}), \phi[(\frac{K(\sigma)}{\sigma})^{\frac{1}{A_3+\varepsilon}}] = \sigma + \frac{\sigma}{\log(\frac{-\log A^*_{N_k}}{\lambda_{N_k}})}. \tag{3.5}$$

(i) 当 $\lambda_{N_k}\sigma \le K$ 时, 由 (3.4), (3.5) 两式及型函数的定义得

$$\log A_{N_k}^* e^{\lambda_{N_k}\sigma} \le \lambda_{N_k}\sigma \le K = \sigma U^{A_3+\varepsilon}(\sigma + \frac{\sigma}{\log(\frac{-\log A_{N_k}^*}{\lambda_{N_k}})}) \le \sigma U^{A_3+\varepsilon}(\sigma+\sigma) \le \sigma U^{A_3+2\varepsilon}(\sigma).$$

(ii) 当 $\lambda_{N_k}\sigma > K$ 时, 结合 (3.4), (3.5) 两式得

$$\log A_{N_k}^* e^{\lambda_{N_k}\sigma} \le \lambda_{N_k}(\sigma - \phi(\lambda_{N_k}^{\frac{1}{A_3+\varepsilon}})) \le \lambda_{N_k}(\sigma - \phi((\frac{K(\sigma)}{\sigma})^{\frac{1}{A_3+\varepsilon}})) < 0.$$

因此由 (i), (ii) 知, 对充分大的 k 有 $\log \mu(\sigma, F) \le \sigma U^{A_3+2\varepsilon}(\sigma)$, 由 ε 的任意性, 结合引理 2.5 有 $A_1 \le A_3$. 综上所述知定理 3.2 成立.

定理 3.3 设 L-S 变换 (2.1) 满足条件 (2.2), (2.3), (2.4) 和 (2.5) 式, 则下列条件等价:

(1) L-S 变换 (2.1) 关于 $U(\sigma)$ 的正规增长级为 ρ, 即 $\lim\limits_{\sigma\to+\infty} \frac{\log^+\log^+ M_u(\sigma,F)-\log\sigma}{\log U(\sigma)} = \rho$.

(2) L-S 变换 (2.1) 满足

(i) $\overline{\lim\limits_{\sigma\to\infty}} \frac{\log^+\log^+ M_u(\sigma,F)-\log\sigma}{\log U(\sigma)} = \rho$;

(ii) 存在上升的正整数列 $\{n_k\}$, 使

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\log\lambda_{n_{k-1}}}{\log\lambda_{n_k}} = 1, \lim_{k\to\infty}\frac{\log\lambda_{n_k}}{\log U(\frac{-\log A_{n_k}^*}{\lambda_{n_k}})} = \rho;$$

(3) $\overline{\lim\limits_{\sigma\to\infty}}\frac{\log\lambda_{N_k}}{\log U(\frac{-\log A_{N_k}^*}{\lambda_{N_k}})} = \underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\frac{\log\lambda_{N_{k-1}}}{\log U(\frac{-\log A_{N_k}^*}{\lambda_{N_k}})} = \rho$,

其中 $\{\lambda_{N_k}\}$ 是最大项指标序列.

证 先证 (1) 与 (2) 等价

设 (2) 成立, 则由 (ii)

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\log\lambda_{n_{k-1}}}{\log U(\frac{-\log A_{n_k}^*}{\lambda_{n_k}})} = \lim_{k\to\infty}\frac{\log\lambda_{n_k}}{\log U(\frac{-\log A_{n_k}^*}{\lambda_{n_k}})}\frac{\log\lambda_{n_{k-1}}}{\log\lambda_{n_k}} = \rho.$$

从而 $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\frac{\log\lambda_{n_{k-1}}}{\log U(\frac{-\log A_{n_k}^*}{\lambda_{n_k}})} = \rho$, 故 $\max\limits_{n_k}\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\frac{\log\lambda_{n_{k-1}}}{\log U(\frac{-\log A_{n_k}^*}{\lambda_{n_k}})} \ge \rho$, 由定理 3.1 知从而 $F(s)$ 关于 $U(r)$ 的下级 $\ge\rho$, 由 (i) 及定理 3.2 知 $F(s)$ 的关于 $U(r)$ 的级 $=\rho$, 结合正规增长级的定义就得到 (1). 反之, 若 (1) 成立, 则说明 $F(s)$ 关于 $U(r)$ 的下级与级相等. 由定理 3.2 知 (i) 成立, 对最大项指标序列 $\{\lambda_{N_k}\}$, 有

$$1 = \frac{\rho}{\rho} = \frac{\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\frac{\log\lambda_{N_{k-1}}}{\log U(\frac{-\log A_{N_k}^*}{\lambda_{N_k}})}}{\overline{\lim\limits_{\sigma\to\infty}}\frac{\log\lambda_{N_k}}{\log U(\frac{-\log A_{N_k}^*}{\lambda_{N_k}})}} \le \underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\log\lambda_{N_{k-1}}}{\log\lambda_{N_k}} \le 1.$$

这说明对最大项指标序列 (ii) 的前一等式成立. 注意到上式在第二个等号右边, 上面的下极限和下面的上极限相等, 即

$$\rho = \underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\log\lambda_{N_{k-1}}}{\log U(\frac{-\log A_{N_k}^*}{\lambda_{N_k}})} = \overline{\lim_{\sigma\to\infty}}\frac{\log\lambda_{N_k}}{\log U(\frac{-\log A_{N_k}^*}{\lambda_{N_k}})}.$$

由最大项指标序列的单调递增性和下极限的保不等式性知

$$\rho=\varliminf_{k\to\infty}\frac{\log\lambda_{N_{k-1}}}{\log U(\frac{-\log A^*_{N_k}}{\lambda_{N_k}})}\le\varliminf_{k\to\infty}\frac{\log\lambda_{N_k}}{\log U(\frac{-\log A^*_{N_k}}{\lambda_{N_k}})}\le\varlimsup_{\sigma\to\infty}\frac{\log\lambda_{N_k}}{\log U(\frac{-\log A^*_{N_k}}{\lambda_{N_k}})}=\rho.$$

故 (ii) 的后一等式成立. 最后由定理 3.1 及定理 3.2 可看出 (1) 与 (3) 等价. 综上所述知定理 3.3 成立.

参 考 文 献

[1] 高宗升. 零级随机狄里克莱级数的增长性 [J]. 武汉大学学报, 1994, (2): 1–8.

[2] 高宗升. Dirichlet 级数表示整函数的增长性 [J]. 数学学报, 1999, 42(4): 741–748.

[3] 杨祺, 曹月波, 田宏根. 一类零级 Dirichlet 级数的增长性 [J]. 数学杂志, 2013, 33(5), 916–922.

[4] 余家荣. Laplace-Stieltjes 变换所定义的整函数的 Borel 线 [J]. 数学学报, 1963, 13(3): 471–484.

[5] 杨祺, 曹月波, 田宏根. 全平面上一类解析的零级和有限级 Laplace-Stieltjes 变换 [J]. 数学物理学报, 2014, 34A(2): 454–462.

[6] 罗茜, 孔荫莹. 全平面上慢增长的 Laplace-Stieltjes 变换的级与型 [J]. 数学物理学报, 2012, 32A(3): 601–607.

[7] 尚丽娜, 高宗升. Laplace-Stieltjes 变换所表示的解析函数的值分布 [J]. 数学学报, 2008, 51(5): 993–1000.

[8] 孔荫莹. 半平面解析的无穷级 Laplace-Stieltjes 变换 [J]. 数学学报, 2012, 55(1): 141–148.

[9] 杨祺, 曹月波, 田宏根. 一类解析的零级 Laplace-Stieltjes 变换 [J]. 数学杂志, 2015, 35(4): 987–994.

THE GROWTH OF ZERO ORDER LAPLACE-STIELTJES TRANSFORM ON THE PLANE

YANG Qi, LU Wei-na, TIAN Hong-gen

(*School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi 830054, China*)

Abstract: The growth of entire function of zero order defined by Laplace-Stieltjes transform is studied in this paper. By using Type-function, sufficient and necessary conditions about the growth and the regular growth of this entire function are obtained, which extend some results of Dirichlet series.

Keywords: Laplace-Stieltjes transform; order; Newton polygon; type-function

2010 MR Subject Classification: 30D99; 60F99