

关于 Gorenstein 投射维数的一个注记

赵志兵¹, 江 戈²

(1. 安徽大学数学科学学院, 安徽 合肥 230601)

(2. 蚌埠学院数学与物理系, 安徽 蚌埠 233030)

摘要: 本文研究了 Gorenstein 投射维数的相关问题. 利用经典同调维数的研究方法, 给出了 Gorenstein 投射维数有限模的 Gorenstein 投射维数的一个刻画, 并利用这一结果证明了 Gorenstein 完全环和 Artin 环的 Gorenstein 整体维数分别由各自的循环模和单模的 Gorenstein 投射维数来确定. 这些结论丰富了 Gorenstein 同调代数理论.

关键词: Gorenstein 投射模; Gorenstein 投射维数; Gorenstein 整体维数

MR(2010) 主题分类号: 16E10; 16E65 中图分类号: O154.2

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2016)03-0627-06

1 引言

本文中环 R 均指的是有单位元的结合环, 用 $\text{Mod}R$ (或 $\text{mod}R$) 表示所有 (有限生成) 左 R -模构成的范畴. 用 $\text{pd}(M)$ 表示左 R -模 M 的投射维数.

对于双边 Noether 环上的有限生成模, Auslander 和 Bridger 在文 [1] 中定义了所谓的 G -维数为 0 的模, 并利用它定义有限生成模的 G -维数. 对于任意结合环上 Gorenstein 投射模的概念是由 Enochs 和 Jenda 在文 [2] 中提出的, 并对偶地定义了 Gorenstein 内射模. 不难证明, Noether 环上的有限生成模是 Gorenstein 投射模当且仅当它是 G -维数为 0 的模 (参见文 [3]). 随后, Gorenstein 同调模和相应的 Gorenstein 同调维数被广泛的研究, 成为了相对同调代数的热门问题之一, 许多经典的同调维数的概念和结果被加以推广和扩充.

回想一个左 R -模 M 称为 Gorenstein 投射模, 指的是存在 $\text{Mod}R$ 中一个投射模的正合列

$$\mathbf{P} : \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow \cdots$$

使得 $M \cong \text{Im}(P_0 \rightarrow P^0)$, 且对每个投射模 Q , $\text{Hom}_R(\mathbf{P}, Q)$ 仍是正合的, 其中正合复形 $\mathbf{P}$ 称为 M 的一个完全投射分解. Gorenstein 投射模简称 G -投射模, 用 $\mathcal{GP}(R)$ 表示 Gorenstein 投射模类.

一个左 R -模 M 的 Gorenstein 投射维数定义为

定义 1.1 [4] 设 $M \in \text{Mod}R$, 令 $G\text{pd}(M) = \inf\{n \mid \text{存在正合列}$

$$0 \rightarrow G_n \rightarrow \cdots \rightarrow G_1 \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

*收稿日期: 2014-08-15 接收日期: 2014-12-01

基金项目: 国家自然科学基金青年基金 (11401001) 安徽省高校优秀人才基金 (2013SQRL071ZD); 安徽大学博士启动基金 (33190141).

作者简介: 赵志兵 (1979-), 男, 安徽桐城, 讲师, 主要研究方向: 同调代数, 代数表示论.

其中对 $0 \leq i \leq n, G_i \in \mathcal{GP}(R)\}$, 称为 M 的 Gorenstein 投射维数. 若不存在这样的正合列, 则记 $Gpd(M) = \infty$.

令

$$l.Gpd(R) = \sup\{Gpd(M) | M \in \text{Mod}R\},$$

称为环 R 的左 Gorenstein 整体维数.

注 1 显然投射模均是 Gorenstein 投射模, 且对 $M \in \text{Mod}R$ 均有 $Gpd(M) \leq pd(M)$. 根据文 [4] 的定理 2.5, $\mathcal{GP}(R)$ 是 $\text{Mod}R$ 的一个投射预解子范畴, 但 $\mathcal{GP}(R)$ 的同调有限性仍是一个公开的问题. 在文 [4] 中 Holm 证明了如下的定理.

定理 1.2 [4] 设 $M \in \text{Mod}R$, 若 $Gpd(M) \leq \infty$, 则存在正合列 $0 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0$, 使得 $G \rightarrow M \rightarrow 0$ 为 M 的一个满的右 $\mathcal{GP}(R)$ -逼近, 且 $pd(K) < \infty$.

利用上述定理容易证明下面关于 Gorenstein 投射维数有限的模的 Gorenstein 投射维数的等价刻画.

定理 1.3 [4] 设 $M \in \text{Mod}R$, n 为一个非负整数, 若 $Gpd(M) < \infty$, 则下列表述是等价的:

- (1) $Gpd(M) \leq n$;
- (2) 对于任意的投射模 $P, \forall i > n$, 有 $\text{Ext}_R^i(M, P) = 0$;
- (3) 对于任意的投射维数有限的左 R -模 $L, \forall i > n$, 有 $\text{Ext}_R^i(M, L) = 0$;
- (4) 对于任意的正合列

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_1 \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

其中对 $0 \leq i \leq n-1, G_i$ 为 Gorenstein 投射模, 则 K_n 也是 Gorenstein 投射模.

在经典的同调代数中, 一个熟知的结论由 Auslander 在 1955 年得到的.

定理 1.4 [5] 对于任意的环 $R, lD(R) = \sup\{pd(R/I) | I \text{ 为 } R \text{ 的左理想}\} = \sup\{pd(C) | C \text{ 为循环左 } R\text{-模, 即 } C = Rx\}$.

特别地, 对于 Artin (半) 准素环来说 $lD(R) = \sup\{pd(S) | S \text{ 为环 } R \text{ 的任意单左 } R\text{-模}\}$.

已经知道经典同调代数中很多的结果在 Gorenstein 同调代数中均有相应的结论, 鉴于此, 文章主要考虑上述定理在 Gorenstein 同调代数中的部分体现, 得到 Gorenstein 投射维数有限的模的 Gorenstein 投射维数的一种新的刻画 (定理 2.2), 并利用这一结论证明 Gorenstein (左) 完全环的 Gorenstein 整体维数是由循环模的 Gorenstein 投射维数来限制 (定理 2.3), 而 Artin 环的 Gorenstein 整体维数是由环上单模的 Gorenstein 投射维数来限制 (定理 2.9), 这些结论扩展了相对同调维数的内容, 其中后一个结论是一个已知的结果, 而本文方法是不同的 (见文 [6]).

2 主要结果

下面的结论是文 [5] 中命题 3 在 Gorenstein 同调代数中的体现, 首先给出一个已知的引理.

引理 2.1 [4] 设 $0 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0$ 为 $\text{Mod}R$ 中的一个短正合列, 其中 G 为 Gorenstein 投射模. 若 M 是 Gorenstein 投射的, 则 K 也是 Gorenstein 投射的; 若 M 非 Gorenstein 投射的, 则 $GpdM = GpdK + 1$.

定理 2.2 设 R 为环, A 是一个左 R -模且 $Gpd(A) < \infty$, $\{A_i\}_{i \in I}$ 为 A 的一类子模族, 其中 I 为一个非空的良序集, 对 $i, j \in I$, $i \leq j$ 当且仅当 $A_i \subseteq A_j$. 若 $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ 且每个投射左 R -模 P 均是纯内射的, 且对于 $\forall i \in I$, $Gpd(A_i/A'_i) \leq n$, 其中 $A'_i = \bigcup_{j < i, j \in I} A_j$, 则有 $Gpd(A) \leq n$.

证 对 n 利用归纳法.

若 $n = 0$, 则对 $\forall i \in I$, A_i/A'_i 是 G -投射模, 考虑正合列 $0 \rightarrow A'_i \rightarrow A_i \rightarrow A_i/A'_i \rightarrow 0$, 根据文 [4] 的定理 2.5, 若 A'_i 与 A_i/A'_i 均是 Gorenstein 投射模, 则 A_i 是 Gorenstein 投射的. 由于 I 是良序集, 故有限步后 A'_i 是极小元, 根据假设 $A'_i \cong A'_i/0$ 是 Gorenstein 投射的, 从而得到对 $\forall i \in I$, A_i 是 Gorenstein 投射模. 这样对于任意的投射模 P , 根据假设是纯内射的, 于是由文 [7] 的定理 10.1, 对 $i > 1$, $\text{Ext}_R^i(\varinjlim A_i, P) \cong \varprojlim \text{Ext}_R^i(A_i, P) = 0$, 故利用定理 1.3, $A \cong \varinjlim A_i$ 是 Gorenstein 投射模.

假设 $n > 0$, 并假设结论对 $n - 1$ 时成立.

考虑对 $i \in I$, 都有 $l.Gpd(A_i/A'_i) \leq n$. 设 F 是由 A 的元素为生成元的自由 R -模, F_i 和 F'_i 分别以 A_i 和 A'_i 的元素为生成元的自由 R -模, 显然它们都是 Gorenstein 投射模. 考虑下面正合列 $0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow 0$, 令 $K_i = F_i \cap K$, $K'_i = F'_i \cap K$, 根据它们之间的关系,

$$A'_i \subseteq A_i, F'_i \subseteq F_i, K'_i \subseteq K_i$$

和正合列

$$0 \rightarrow K_i \rightarrow F_i \rightarrow A_i \rightarrow 0, 0 \rightarrow K'_i \rightarrow F'_i \rightarrow A'_i \rightarrow 0,$$

得到正合列 $0 \rightarrow K_i/K'_i \rightarrow F_i/F'_i \rightarrow A_i/A'_i \rightarrow 0$, 且对 $\forall i \in I$, F_i/F'_i 是一个自由 R -模 (这是因为 F'_i 是由 F_i 的生成元素的一个子集生成的). 于是根据引理 2.1 有 $Gpd(K_i/K'_i) \leq n - 1$ (对每个 $i \in I$).

根据上述 K, K_i, K'_i 的构造, 就有 $\{K_i\}_{i \in I}$ 是 K 的一个子模族, I 是一个良序集, $\forall i, j \in I$, $i \leq j$ 当且仅当 $K_i \subseteq K_j$, 且 $K'_i = \bigcup_{j < i, j \in I} K_j$, $K = \bigcup_{i \in I} K_i$. 这样利用归纳假设得到 $Gpd(K) = n - 1$, 再由正合列 $0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow 0$ 和引理 2.1, 得到 $Gpd(A) \leq n$.

注 1 对于 $\text{Mod} R$ 中的一个短正合列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, 若对任意的右 R -模 N 均有

$$0 \rightarrow N \otimes A \rightarrow N \otimes B \rightarrow N \otimes C \rightarrow 0$$

是正合的, 则称上述的正合列为一个纯的正合列. 若对于任一纯的正合列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, 均有

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(C, M) \rightarrow \text{Hom}_R(B, M) \rightarrow \text{Hom}_R(A, M) \rightarrow 0$$

是正合的, 则称 M 是一个纯内射模. 关于纯内射模的性质可参见文 [8-11]. 根据文 [10] 的定理 2.3.8, 知道每个左 R -模 M 都有一个纯内射包, 记为 $PE(M)$, 使得 $M \subseteq PE(M)$. 再利用文 [10] 中定理 3.1.6, 若 R 是一个右凝聚环, 则 F 若是平坦模, 那么 $PE(F)$ 和 $PE(F)/F$ 均为平坦模. 回想一个环 R 称为左完全环指的是每个平坦左 R -模都是投射的, 即平坦模与投射是等价的. 这样根据上面的讨论, 若环 R 是左完全右凝聚的 (事实上 Chase 证明了这样的环当且仅当投射模的直积是投射模), 那么环 R 上的每个投射模是纯内射的.

回想一个双边 Noether 环 R 是一个 Gorenstein 环, 指的是环 R 作为正则模的左、右内射维数均有限. Gorenstein 环上的每个模的 Gorenstein 投射维数均是有限的, 于是根据上面的讨论有如下的定理.

定理 2.3 设 R 是一个 Gorenstein 完全环, 则有

$$l.Ggld(R) = \sup\{Gpd(C) \mid \text{其中 } C \text{ 为任意的循环左 } R\text{-模}\}.$$

证 显然 $l.Ggld(R) \geq \sup\{Gpd(C) \mid \text{其中 } C \text{ 为任意的循环左 } R\text{-模}\}.$

另一方面, 若 $\sup\{Gpd(C) \mid C \text{ 为任意的循环左 } R\text{-模}\} = n$. 对任意的左 R -模 M , 下证 $Gpd(M) \leq n$, 对 M 中元素 $x_i (i \in I)$ 良序化, 分别记 M_i (或 M'_i) 为由 M 的所有 $j \leq i$ (或 $j < i$) 的元素 x_j 生成的 A 的子模, 这样 M_i/M'_i 或是 0 或是由一个元素 x_i 生成的循环模, 根据假设有 $\forall i \in I, l.Gpd(M_i/M'_i) \leq n$. 由于 M 的子模族 $\{M_i\}_{i \in I}$ 满足定理 2.2 的条件, 故得到 $Gpd(M) \leq n$. 根据 M 的任意性得到 $l.Ggld(R) \leq n$, 又由 $l.Ggld(R)$ 的定义有 $l.Ggld(R) = n$.

推论 2.4 若 R 是一个 Gorenstein 完全环, 则 $l.id_R R = r.id_R R = \sup\{Gpd(C) \mid \text{其中 } C \text{ 为任意的循环左 } R\text{-模}\}.$

下面考虑 Artin 环的情形.

引理 2.5 设 R 是一个 Gorenstein 环, 且每个左投射 R -模均是纯内射的, 则 $Gpd\{\varinjlim M_i\} = \sup\{Gpd(M_i)\}_{i \in I}$, 其中 $\{M_i\}_{i \in I}$ 为一个直系统.

证 设 $\sup\{Gpd(M_i)\}_{i \in I} = n < \infty$, 于是对 $\forall i \in I, Gpd(M_i) \leq n$, 则存在某个 $j \in I$, 使得 $Gpd(M_j) = n$. 根据定理 1.3, 对于任意的投射模 (根据假设是纯内射的) 和 $\forall i \in I, s > n$, 有 $\text{Ext}_R^s(M_i, P) = 0$ 且对 $j \in I, \text{Ext}_R^n(M_j, R) \neq 0$. 于是 $\forall s > n, \text{Ext}_R^s(\varinjlim M_i, P) \cong \varinjlim \text{Ext}_R^s(M_i, P) = 0$ 且 $\text{Ext}_R^n(\varinjlim M_i, P) \neq 0$. 再根据定理 1.3 有 $Gpd\{\varinjlim M_i\} = n$.

注 2 显然在满足引理 2.5 条件下, Gorenstein 投射模是保持正向极限的. 一般情形, 关于 Gorenstein 投射模的正向极限尚没有很好的刻画.

注意一个 Artin 环是完全环也是 Noether 环, 当然是凝聚环, 故由前面的讨论 Artin 环上的每个投射模都是纯内射的, 于是利用上述引理可以证明如下的命题.

命题 2.6 设环 R 是一个 Gorenstein Artin 环, 则有

$$l.Ggld(R) = \sup\{Gpd(S) \mid \text{其中 } S \text{ 为任意的单左 } R\text{-模}\}.$$

证 首先, 考虑对任意的有限生成 R -模 M , 由于 R 是 Artin 环, 于是存在 M 的合成列

$$0 = M_n \leq M_{n-1} \leq \cdots \leq M_1 \leq M_0 = M,$$

使得对 $0 \leq i < n-1, M_i/M_{i+1}$ 是一个单模. 考虑 M 的一个子模族 $\{M_i\}_{0 \leq i \leq n}$, 容易看出它满足定理 2.2 的条件, 这样 $Gpd(M) \leq \sup\{Gpd(S) \mid S \text{ 是任意的单左 } R\text{-模}\}.$

对任意的 $M \in \text{Mod } R$, 由文 [12] 的练习 2.32, $M = \varinjlim M_i$, 其中 $\{M_i\}_{i \in I}$ 为 M 的所有有限生成子模构成的子模族. 于是由引理 2.5 得到

$$Gpd(M) = \sup\{Gpd(M_i)\}_{i \in I} \leq \sup\{Gpd(S) \mid S \text{ 为任意的单左 } R\text{-模}\},$$

于是 $l.Ggld(R) = \sup\{Gpd(M) \mid M \text{ 为任意的左 } R\text{-模}\} \leq \sup\{Gpd(N) \mid N \text{ 为任意有限生成的左 } R\text{-模}\} \leq \sup\{Gpd(S) \mid S \text{ 为任意的单左 } R\text{-模}\} \leq l.Ggld(R).$

故 $l.Ggld(R) = \sup\{Gpd(S) \mid \text{其中 } S \text{ 为任意的单左 } R\text{-模}\}.$

下面将上述定理中的“Gorenstein”条件去掉. 易知, 对于双边 Noether 环上的有限生成模, 它是 G -维数为 0 的当且仅当它是 Gorenstein 投射模, 于是由文 [13] 有如下的定理.

定理 2.7 (见文 [13] 中定理 3.6) 设 R 是一个 Artin 环, k 为一个非负整数, 下列条件等价:

- (1) $l.id_R R = r.id_R R = k$, 即 R 是 Gorenstein 环;
- (2) 每个 $\text{mod} R$ 中的模都有不超过 k 的 Gorenstein 投射维数.

为了证明下面的定理, 下述引理是需要的.

引理 2.8 ^[4] 设 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ 为一个短正合列, 如果 A, B, C 中有两个具有有限的 Gorenstein 投射维数, 则第三个模也有有限的 Gorenstein 投射维数.

定理 2.9 设 R 为一个 Artin 环, 则

$$l.Ggld(R) = \sup\{Gpd(S) \mid \text{其中 } S \text{ 为任意的单左 } R\text{-模}\} = l.Gpd(R/J).$$

证 若 $\sup\{Gpd(S) \mid \text{其中 } S \text{ 为任意的单左 } R\text{-模}\} = \infty$, 根据 $l.Ggld(R)$ 的定义, 显然有 $l.Ggld(R) = \infty$.

假设 $\sup\{Gpd(S) \mid \text{其中 } S \text{ 为任意的单左 } R\text{-模}\} = n < \infty$. 对任意的有限生成左 R -模 M , 存在 M 的合成列

$$0 = M_n \leq M_{n-1} \leq \cdots \leq M_1 \leq M_0 = M,$$

使得对 $0 \leq i < n-1$, M_i/M_{i+1} 是一个单模. 考虑正合列

$$0 \rightarrow M_{n-1} \rightarrow M_{n-2} \rightarrow M_{n-2}/M_{n-1} \rightarrow 0,$$

其中 $M_{n-1}, M_{n-2}/M_{n-1}$ 为单模. 由假设 $Gpd(M_{n-1}) \leq n$, $Gpd(M_{n-2}/M_{n-1}) \leq n$, 这样利用引理 2.8, 则有 $Gpd(M_{n-2}) < \infty$. 由定理 1.3 对 $\forall i > n$ 和任意的投射 P , 有

$$\text{Ext}_R^i(M_{n-1}, P) = 0 = \text{Ext}_R^i(M_{n-2}/M_{n-1}, P).$$

于是根据长正合列定理, 对 $\forall i > n$ 和任意的投射模 P , 有 $\text{Ext}_R^i(M_{n-2}, P) = 0$, 再由定理 1.3, 得到 $Gpd(M_{n-2}) \leq n$. 重复上面的过程得到 $Gpd(M) \leq n$, 利用 M 的任意性和定理 2.7, R 是一个 Gorenstein 环, 于是由命题 2.6 得到

$$l.Ggld(R) = \sup\{Gpd(S) \mid \text{其中 } S \text{ 为任意的单左 } R\text{-模}\}.$$

综上, $l.Ggld(R) = \sup\{Gpd(S) \mid \text{其中 } S \text{ 为任意的单左 } R\text{-模}\}.$

由于 R 是 Artin 环, R/J 是半单的, 且是一些单左 R -模的直和. 利用文 [4] 的定理 2.19 容易得到第二个等式成立.

参 考 文 献

- [1] Auslander M, Bridger M. Stable modules theory[M]. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1969.
- [2] Enochs E, Jenda O. Gorenstein injective and projective modules[J]. Math. Z., 1995, 220(3): 611–633.
- [3] Christensen L. Gorenstein dimension[M]. Lecture Note Math., Berlin: Springer-Verlag, 1747.
- [4] Holm H. Gorenstein homological dimension[J]. J. Pure Appl. Algebra, 2004, 189(3): 167–193.
- [5] Auslander M. On the dimension of modules and algebras(III), global dimension[J]. Nagoya Math. J., 1955, 9(1): 67–77.
- [6] Tamekkante M. Gorenstein global dimension of semi-primary rings[J]. Arabian J. Sci. Engin., 2010, 35(1D): 87–91.

- [7] Auslander M. Functors and morphisms determined by objects[A]. Gordon R. Representation theory of algebra[C]. New York: Dekker, 1978, 37: 1–244.
- [8] Ebrahimi M. On pure-injective modules over pullback rings[J]. Comm. Algebra, 2000, 28(9): 4037–4069.
- [9] Mantese F, Ruzicka P, Tonolo A. Cotilting versus pure-injective modules[J]. Pacific J. Math., 2003, 212(2): 321–332.
- [10] Xu Jinzhong. Flat covers of modules[M]. Berlin: Springer, 1996.
- [11] 班秀和. 投射根和亚投射模 [J]. 数学杂志, 2012(5): 867–870.
- [12] Rotman J. An introduction to homological algebra[M]. New York: Acedemic Press, 1979.
- [13] Zhao Guoqiang, Yin Lirong. Wakamatsu tilting modules with finite injective dimesion[J]. Czechoslovak Math. J., 2013, 63(138): 865–876.

A NOTE ON GORENSTEIN PROJECTIVE DIMESION

ZHAO Zhi-Bing¹, JIANG Ge²

(1.School of Math. Sci., Anhui University, Hefei 230601, China)

(2.Department of Math. and Phy., Bengbu University, Bengbu 233030, China)

Abstract: In this paper, we consider some questions related to Gorenstein projective dimension. By using the method which study the classical homological dimension, we give a sufficient condition of Gorenstein projective dimension of a module smaller than or equal to n when it is finite. As an application, we prove that the Gorenstein global dimension of a Goresntein perfect ring or an artinian ring is completed determined by the Gorenstein projective dimensions of the cyclic modules and simple modules over it respectively, which extended the theory of Gorenstein homological algebra.

Keywords: Gorenstein projective modules; Gorenstein projective dimension; Gorenstein global dimension

2010 MR Subject Classification: 16E10; 16E65