

不完全偏好下的稳定婚配问题

吴威让, 陈金阳, 姜 囡

(湖北师范学院数学与统计学院, 湖北 黄石 435002)

摘 要: 本文研究了不完全偏好下的稳定婚配的匹配率, 满意度问题. 利用构造满意度函数的方法, 获得了在不完全偏好下的婚配市场的人均满意度不低于全偏好下的人均满意度的结果, 更好地阐释了当今社会的剩女(男)现象.

关键词: 稳定婚配; GS 算法; 匹配率; 满意度

MR(2010) 主题分类号: 91A40

中图分类号: O225; F224

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2016)03-0566-07

1 引言

1.1 经典稳定婚姻匹配问题

经典稳定婚配问题 (SM) 的定义是 Gale 和 Shapley^[1] 首次提出的: SM 的一个实例 $I_n = (M, W, P)$, 其中 $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ 表示未婚男士集合, $W = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ 表示未婚女士集合, P_i 为个体 i 的偏好序, $P = (P_i)_{i \in M \cup W}$ 为偏好断面. 对于任意的男士 $m_i \in M$, 定义他在 W 上的严格偏好关系: 如果 m_i 认为 w_j 比 w_k 好, 记作 $w_j \succ_{m_i} w_k$. 类似地, 对于任意的女士 $w_i \in W$, 定义 $m_j \succ_{w_i} m_k$ 表示 w_i 认为 m_j 比 m_k 好.

令 $E = M \times W$, 实例 I_n 中一个匹配 μ 是 E 的一个子集, 它把 M 和 W 中的人配成对, 且不允许重复. $\forall (m_i, w_j) \in \mu$, 记 $\mu(m_i) = w_j$, $\mu(w_j) = m_i$ 分别表示 m_i 和 w_j 在匹配 μ 下的匹配对象; I_n 中的匹配 μ 称为完美匹配, 若它把集合 M 和 W 配成 n 对, 使得每人有且仅有唯一配偶.

定义 1.1 ^[1] 设 I_n 为 SM 的一个实例, μ 为中 I_n 的一个匹配, 若存在 $(m_i, w_j) \in E \setminus \mu$, 满足:

(1) $w_j \succ_{m_i} \mu(m_i)$;

(2) $m_i \succ_{w_j} \mu(w_j)$;

则称 (m_i, w_j) 是匹配 μ 的一个阻止对. 即 m_i 和 w_j 可以各自离开原来的婚姻匹配 μ 的安排, 私自结婚. 若 μ 中无阻止对存在, 则称匹配 μ 是稳定的.

文献 [1] 中 Shapley 等已经证明了在完全严格偏好下婚配问题一定存在稳定的完美匹配, 并给出了求稳定完美匹配的 GS 算法, 得到的稳定匹配记为 μ . 当男士优先选择, 女士接受时, 称为男士优先的 GS 算法, 记为 MGS 算法, 得到的稳定匹配记为 μ_M . 类似地, 也有女士优先的 GS 算法, 记为 WGS 算法, 得到的稳定匹配记为 μ_W .

*收稿日期: 2013-12-14

接收日期: 2014-01-09

基金项目: 国家自然科学基金资助 (61304057); 湖北省教育厅重点项目资助 (D20122204); 湖北省教育厅青年项目资助 (Q20102508).

作者简介: 吴威让 (1990-), 男, 湖北洪湖, 硕士, 主要研究方向: 算法与博弈论.

例 1 设 $I_3 = \langle M, W, P \rangle$ 为某一 SM 的实例, 其中 $M = \{m_1, m_2, m_3\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, 偏好断面 P 如下:

$$\begin{aligned} m_1 : w_1 \succ w_2 \succ w_3 & \quad w_1 : m_2 \succ m_3 \succ m_1 \\ m_2 : w_2 \succ w_3 \succ w_1 & \quad w_2 : m_3 \succ m_1 \succ m_2 \\ m_3 : w_3 \succ w_1 \succ w_2 & \quad w_3 : m_1 \succ m_2 \succ m_3 \end{aligned}$$

采用 MGS 算法, 得男士优先完美婚姻匹配为 $\mu_M = \{(m_1, w_1), (m_2, w_2), (m_3, w_3)\}$.

采用 WGS 算法, 得女士优先完美婚姻匹配为 $\mu_W = \{(m_1, w_3), (m_2, w_1), (m_3, w_2)\}$.

然而在实际生活中, 参与婚配的男女也许只愿意接受他(她)偏好排序顺序中的前几位, 对于在自己的偏好排序下的后几位异性发出的求婚信号不予理睬, 而宁愿保持单身. 即在经典婚配问题中的完全偏好变为不完全偏好. 本文主要研究在不完全偏好下: 稳定匹配的婚配率及婚配中的男女对各自婚配的满意程度等问题, 具有一定的实际意义.

1.2 不完全偏好下的稳定婚配问题

设 $I_n = (M, W, P)$ 是 SM 的一个实例, 假定每人只对其偏好序中前 $k(1 \leq k < n)$ 位进行偏好排列, 即在严格的偏好关系下进行部分排序, 用 P^k 表示不完全偏好下的偏好断面, 这种婚配问题为不完全偏好下的婚配问题 (PSM), PSM 的一个实例记为 I_n^k . 当 $k = n$ 时, 即为 SM, 称为完全偏好下的婚配问题.

类似地, PSM 的实例 I_n^k 中一个匹配 μ 是 $E = M \times W$ 的一个子集, 它把 M 和 W 中的人配成对, 且不允许重复. 则每个人 $x \in M \cup W$ 在匹配 μ 下的匹配对象 $\mu(x)$ 规定如下:

$$\mu(x) = \begin{cases} y, \exists y \in M \cup W, (x, y) \in \mu \text{ 或者 } (y, x) \in \mu, \\ x, \forall y \in M \cup W, (x, y) \notin \mu \text{ 和 } (y, x) \notin \mu, \end{cases}$$

其中 $\mu(x) = x$ 表示 x 单身. 同样利用 GS 算法, 可以求出不完全偏好下的婚配问题的稳定匹配, 记为 $\mu(I_n^k)$, 此时不一定是完美匹配.

例 2 设 $I_4 = (M, W, P)$ 为某一 SM 的实例, 偏好断面 P 如下:

$$\begin{aligned} m_1 : w_1 \succ w_2 \succ w_3 \succ w_4 & \quad w_1 : m_4 \succ m_3 \succ m_1 \succ m_2 \\ m_2 : w_1 \succ w_4 \succ w_3 \succ w_2 & \quad w_2 : m_2 \succ m_4 \succ m_1 \succ m_3 \\ m_3 : w_2 \succ w_1 \succ w_3 \succ w_4 & \quad w_3 : m_4 \succ m_1 \succ m_2 \succ m_3 \\ m_4 : w_4 \succ w_2 \succ w_3 \succ w_1 & \quad w_4 : m_3 \succ m_2 \succ m_1 \succ m_4 \end{aligned}$$

采用 GS 算法, 得唯一稳定完美婚姻匹配 (即采用 MGS 算法和 WGS 算法得到的结果相同):

$$\mu(I_4^4) = \{(m_1, w_3), (m_2, w_4), (m_3, w_1), (m_4, w_2)\}.$$

假定男女在婚配时只选择自己偏好序中的前 2 名 (即此时 $n = 4, k = 2$). 得到一个 PSM 的实例 $I_4^2 = (M, W, P^2)$, 不完全偏好断面 P^2 如下:

$$\begin{aligned} m_1 : w_1 \succ w_2 & \quad m_2 : w_1 \succ w_4 & m_3 : w_2 \succ w_1 & \quad m_4 : w_4 \succ w_2 \\ w_1 : m_4 \succ m_3 & \quad w_2 : m_2 \succ m_4 & w_3 : m_4 \succ m_1 & \quad w_4 : m_3 \succ m_2 \end{aligned}$$

采用 GS 算法, 得 I_4^2 的唯一稳定婚姻匹配: $\mu(I_4^2) = \{(m_2, w_4), (m_3, w_1), (m_4, w_2)\}$. 其中 m_1, w_3 仍然维持单身.

2 稳定婚配市场参数分析

2.1 稳定婚配市场刻画

定义 2.1 对于上述提到的完全偏好婚配问题 (SM) 和不完全偏好婚配问题 (PSM), 他们的某一个实例 $I_n^k (1 \leq k \leq n)$ 可以由一个三元组 (M, W, P^k) 完全确定, 以后统称之为婚配市场, 记为 $I = (M, W, P)$ (即 $I \in \bigcup_{k=1}^n I_n^k$).

在婚配市场的一个实例中, 完全偏好下得到的稳定婚配是完美匹配, 但是, 不完全偏好下得到的稳定婚配不一定是完美匹配 (即有人可能单身), 因此有必要研究稳定婚配的匹配率.

定义 2.2 匹配率为某婚配市场 I 在匹配 μ 下配对成功的人数 $2a$ 与参与人数 $2n$ 比值, 即

$$\rho(P^k) = \frac{a}{n}.$$

如例 1(完全偏好下) 匹配率为 $\rho = 100\%$; 例 2(不完全偏好下) 匹配率为 $\rho = 75\%$. 虽然不完全偏好下的匹配率低于完全偏好下的匹配率, 是因为有人觉得宁可单身也不愿意选择自己不太喜欢的伴侣, 因此, 研究婚配市场中男女对稳定婚配结果的满意程度也是有必要的. 定义满意度函数如下:

定义 2.3 设 $I_n^k = (M, W, P^k) (1 \leq k \leq n)$ 为婚配市场的一个实例, $\text{rank}_x(y)$ 表示 y 在 x 偏好排序下排名数. 函数 $f_\mu : M \cup W \rightarrow R^+$ 称为满意度函数, 若满足: $\forall x \in M \cup W$,

(a) 在同一稳定匹配 μ 下:

(1) 若 $\mu(x) = x, \mu(y) = y$, 则 $f_\mu(x) = f_\mu(y)$;

(2) 若 $\mu(x) \neq x, \mu(y) = y$, 则 $f_\mu(x) > f_\mu(y)$;

(b) 在不同稳定匹配 μ_1, μ_2 下:

(1) 若 $\mu_i(x) = y_i \neq x (i = 1, 2)$, 则 $f_{\mu_1}(x) > f_{\mu_2}(x) \iff \text{rank}_x(y_1) < \text{rank}_x(y_2)$;

(2) 若 $\mu_i(x) = x (i = 1, 2)$, 则 $f_{\mu_1}(x) = f_{\mu_2}(x)$;

(3) 若 $\mu_1(x) = y \neq x, \mu_2(x) = x$, 则 $f_{\mu_1}(x) > f_{\mu_2}(x) \iff \text{rank}_x(y) < k, f_{\mu_1}(x) < f_{\mu_2}(x) \iff \text{rank}_x(y) > k$.

定义 2.4 设 $I_n^k = (M, W, P^k) (1 \leq k \leq n)$ 为婚配市场的一个实例, f_μ 为满意度函数, μ 为 I_n^k 的一个匹配, 对 μ 的满意度定义如下:

(1) 参与者平均满意度:

男士的平均满意度: $\Pi_\mu(M) = \frac{1}{n} \sum_{x \in M} (f_\mu(x))$;

女士的平均满意度: $\Pi_\mu(W) = \frac{1}{n} \sum_{x \in W} (f_\mu(x))$;

参与者平均满意度: $\Pi_\mu(n) = \frac{1}{2n} \sum_{x \in M \cup W} (f_\mu(x))$.

(2) 匹配成功者平均满意度: $\Pi_\mu(a) = \frac{1}{2a} \sum_{\mu(x) \neq x} (f_\mu(x))$, 其中 $2a$ 表示匹配成功的人数.

2.2 匹配率影响分析

设 $I_n^k = (M, W, P^k) (1 \leq k \leq n)$ 为婚配市场的一个实例, 不完全偏好下得到的稳定婚配不一定是完美匹配 (即有人可能单身), $\rho(P^k) \leq 1$. 显然, 稳定婚配的匹配率受偏好断面 P^k 影响.

例 3 设 $I_5^k = (M, W, P^k) (1 \leq k \leq 5)$, $II_5^k = (M, W, Q^k) (1 \leq k \leq 5)$ 为婚配市场的两个实例, 相应的偏好断面如下:

偏好断面 P :

$$\begin{array}{ll} m_1 : w_1 \succ w_3 \succ w_5 \succ w_2 \succ w_4 & w_1 : m_3 \succ m_2 \succ m_5 \succ m_4 \succ w_1 \\ m_2 : w_4 \succ w_2 \succ w_1 \succ w_3 \succ w_5 & w_2 : m_5 \succ m_3 \succ m_4 \succ m_1 \succ w_2 \\ m_3 : w_1 \succ w_4 \succ w_2 \succ w_3 \succ w_5 & w_3 : m_1 \succ m_4 \succ m_2 \succ m_3 \succ w_5 \\ m_4 : w_2 \succ w_1 \succ w_5 \succ w_4 \succ w_3 & w_4 : m_1 \succ m_5 \succ m_3 \succ m_2 \succ w_4 \\ m_5 : w_5 \succ w_2 \succ w_1 \succ w_3 \succ w_4 & w_5 : m_2 \succ m_1 \succ m_4 \succ m_5 \succ w_3 \end{array}$$

偏好断面 Q :

$$\begin{array}{ll} m_1 : w_2 \succ w_5 \succ w_3 \succ w_4 \succ w_1 & w_1 : m_1 \succ m_4 \succ m_2 \succ m_5 \succ w_3 \\ m_2 : w_3 \succ w_1 \succ w_4 \succ w_2 \succ w_5 & w_2 : m_3 \succ m_1 \succ m_4 \succ m_2 \succ w_5 \\ m_3 : w_5 \succ w_3 \succ w_2 \succ w_4 \succ w_1 & w_3 : m_1 \succ m_2 \succ m_5 \succ m_3 \succ w_4 \\ m_4 : w_2 \succ w_1 \succ w_5 \succ w_3 \succ w_4 & w_4 : m_2 \succ m_4 \succ m_1 \succ m_5 \succ w_3 \\ m_5 : w_2 \succ w_4 \succ w_3 \succ w_5 \succ w_1 & w_5 : m_3 \succ m_5 \succ m_4 \succ m_1 \succ w_2 \end{array}$$

在不完全偏好 P^2 下, 实例 I_5^2 的稳定匹配: $\mu(I_5^2) = \{(m_1, w_3), (m_3, w_1), (m_5, w_2)\}$, 匹配率为 $\rho(P^2) = 60\%$.

在不完全偏好 Q^2 下, 实例 II_5^2 的稳定匹配: $\mu(II_5^2) = \{(m_1, w_2), (m_2, w_3), (m_3, w_5), (m_4, w_1)\}$, 匹配率为 $\rho(Q^2) = 80\%$.

上例说明: 当参与婚配的人数, 不完全偏好下参与排名的人数均相同时 ($n = 5, k = 2$), 不同的偏好断面直接影响着不完全偏好下的匹配率.

对例 3 的实例 $I_5^k = (M, W, P^k) (1 \leq k \leq 5)$, 利用 GS(MGS 或 WGS) 算法分别算出 I_5^k 的稳定匹配如下:

$$\begin{array}{lll} \mu_M(I_5^1) = \mu_W(I_5^1) : & \{(m_3, w_1)\} & \rho(P^1) = 20\% \\ \mu_M(I_5^2) = \mu_W(I_5^2) : & \{(m_1, w_3), (m_3, w_1), (m_5, w_2)\} & \rho(P^2) = 60\% \\ \mu_M(I_5^3) = \mu_W(I_5^3) : & \{(m_1, w_3), (m_3, w_1), (m_4, w_5), (m_5, w_2)\} & \rho(P^3) = 80\% \\ \mu_M(I_5^4) : & \{(m_1, w_3), (m_2, w_4), (m_3, w_1), (m_4, w_2), (m_5, w_5)\} & \rho(P^4) = 100\% \\ \mu_W(I_5^4) : & \{(m_1, w_3), (m_2, w_4), (m_3, w_1), (m_4, w_5), (m_5, w_2)\} & \rho(P^4) = 100\% \\ \mu_M(I_5^5) : & \{(m_1, w_3), (m_2, w_4), (m_3, w_1), (m_4, w_2), (m_5, w_5)\} & \rho(P^5) = 100\% \\ \mu_W(I_5^5) : & \{(m_1, w_3), (m_2, w_4), (m_3, w_1), (m_4, w_5), (m_5, w_2)\} & \rho(P^5) = 100\% \end{array}$$

从上面的实例, 可以看出匹配率随 k 值增大而增大, 但得到稳定匹配不完全相同, 有以下结果.

定理 2.5 设 $I_n^k = (M, W, P^k) (1 \leq k \leq n)$, $II_n^k = (M, W, Q^k) (1 \leq k \leq n)$ 为婚配市场的两个实例, 则有

- (1) 一般有 $\rho(P^k) \neq \rho(Q^k)$, $1 \leq k < n$;
- (2) $1 \leq k < n$, $\rho(P^k) \leq \rho(P^{k+1})$, 但是不一定有

$$\mu(I_n^k) \subseteq \mu(I_n^{k+1}).$$

证 (1) 显然成立.

(2) 不失一般性, 假定在 MGS 算法下, 令 $A_k(x)$ 表示男士 x 在 I_n^k 中可接受异性匹配集合, 显然 $A_1(x) \subset A_2(x) \subset \cdots \subset A_{n-1}(x) \subset A_n(x)$. 设 $x \in M$ 在 I_n^k 下是匹配成功者, 即存在 $(x, y) \in \mu(I_n^k)$ 且 $\text{rank}_x(y) \leq k, \text{rank}_y(x) \leq k$. 则在 I_n^{k+1} 下: 若 x 仍是匹配成功者, 则

$$|\mu(I_n^k)| \leq |\mu(I_n^{k+1})|,$$

即结论成立. 现在证明若 x 单身, 则会导致一个新的男士 x' (x' 在 I_n^k 下单身), 使 $(x', y) \in \mu(I_n^{k+1})$. 即仍有

$$|\mu(I_n^k)| \leq |\mu(I_n^{k+1})|.$$

断言 (i) 若 x 在 I_n^{k+1} 下单身, 则 y 一定不是单身. 否则 (x, y) 就是一个阻止对, 矛盾; 即有 $(x', y) \in \mu(I_n^{k+1})$.

断言 (ii) $\text{rank}_y(x') < \text{rank}_y(x) \leq k$, 即 y 和一个优于 x 的男士 x' 匹配, 且 $\text{rank}_{x'}(y) = k + 1$. 否则 (x', y) 在 I_n^k 下就是一个阻止对, 矛盾.

断言 (iii) x' 在 I_n^k 下单身. 否则存在 $(x', y') \in \mu(I_n^k)$, 且 $\text{rank}_{x'}(y') \leq k$; 而 $\text{rank}_{x'}(y) = k + 1$, 这样 (x', y') 在 I_n^{k+1} 就是一个阻止对, 矛盾.

综上所述, 有 $1 \leq k < n, \rho(P^k) \leq \rho(P^{k+1})$.

从上述例 3 发现 $\mu(I_5^1) \subseteq \mu(I_5^2) \subseteq \mu(I_5^3) \subseteq \mu_w(I_5^4)$, 但是 $\mu(I_5^3) \not\subseteq \mu_M(I_5^4)$, 故不一定有 $\mu(I_n^k) \subseteq \mu(I_n^{k+1})$.

2.3 满意度影响分析

根据满意度函数的定义, 下面给出一个具体的满意度函数来刻画上述的婚配市场.

设 I_n^k 为一个婚配市场, μ 为 I_n^k 的一个匹配. 定义参与人 $x \in M \cup W$ 对匹配 μ 的满意度函数:

$$f_\mu(x) = \begin{cases} \frac{1}{\text{rank}_x(y)}, & \mu(x) = y \neq x; \\ \frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}), & \mu(x) = x. \end{cases}$$

下面分析例 3 中实例 $I_5^k = (M, W, P^k) (1 \leq k \leq 5)$ 的满意度, 首先根据上述满意度函数的定义, 得到满意度函数表如下

$I_5 : (f(m_i), f(w_j))$	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
m_1	$(1, \frac{1}{5})$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	$(\frac{1}{2}, 1)$	$(\frac{1}{5}, 1)$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$
m_2	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{5})$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$	$(1, \frac{1}{4})$	$(\frac{1}{5}, 1)$
m_3	$(1, 1)$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$
m_4	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$	$(1, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{5}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{5})$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
m_5	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{2}, 1)$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{5})$	$(\frac{1}{5}, \frac{1}{2})$	$(1, \frac{1}{4})$

根据满意度函数表计算实例 $I_5^k = (M, W, P^k) (1 \leq k \leq 5)$ 的满意度如下 (均保留小数点

后 4 位有效数字)

NO.	μ	ρ	$\Pi_\mu(M)$	$\Pi_\mu(W)$	$\Pi_a(\mu)$	$\Pi_n(\mu)$
1(1')	$\mu_M(I_5^1) = \mu_W(I_5^1)$	20%	0.8000	0.8000	1.0000	0.8000
2(2')	$\mu_M(I_5^2) = \mu_W(I_5^2)$	60%	0.5667	0.7667	0.8333	0.6667
3(3')	$\mu_M(I_5^3) = \mu_W(I_5^3)$	80%	0.5250	0.7250	0.7083	0.6250
4	$\mu_M(I_5^4)$	100%	0.9000	0.5667	0.7333	0.7333
4'	$\mu_W(I_5^4)$	100%	0.6667	0.7167	0.6917	0.6917
5	$\mu_M(I_5^5)$	100%	0.9000	0.5667	0.7333	0.7333
5'	$\mu_W(I_5^5)$	100%	0.6667	0.7167	0.6917	0.6917

从上表可以发现如下规律

(1) 在任意实例下, 匹配成功者的平均满意度均不低于参与者的平均满意度, 即

$$\Pi_a(\mu) \geq \Pi_n(\mu).$$

这样才会激励剩男剩女们积极参与婚配. 而 $\Pi_a(\mu)$ 和 $\Pi_n(\mu)$ 对 k 的增加没有严格的递增 (或递减) 关系.

(2) 同一婚配市场实例 I 中, 在男士优先情况下 (MGS 算法) 男士的平均满意度不低于女士优先情况下 (WGS 算法) 男士的平均满意度, 即 $\Pi_{\mu_M}(M) \geq \Pi_{\mu_W}(M)$; 类似的, 在女士优先情况下 (WGS 算法) 女士的平均满意度不低于男士优先情况下 (MGS 算法) 女士的平均满意度, 即 $\Pi_{\mu_W}(W) \geq \Pi_{\mu_M}(W)$. 这进一步说明, 男士优先算法当然对男性有利, 女士优先算法当然对女士有利.

由上述分析得到如下的定理.

定理 2.6 设 $I_n^k = (M, W, P^k) (1 \leq k \leq n)$ 为婚配市场的任意一个实例, μ 为一稳定匹配, 在任意给定的满意度函数下, 有

- (1) $\Pi_a(\mu) \geq \Pi_n(\mu)$;
- (2) $\Pi_{\mu_M}(M) \geq \Pi_{\mu_W}(M), \Pi_{\mu_W}(W) \geq \Pi_{\mu_M}(W)$.

证 (1) 设 μ 的匹配率为 $\rho = \frac{a}{n}$; 当 $\mu(x) = x$ 时, 令 $f_\mu(x) = f_k$, 由定义 2.3 的 (a)(2) 知 $\Pi_a(\mu) > f_k$, 则有

$$\begin{aligned}
 & \Pi_a(\mu) - \Pi_n(\mu) \\
 &= \frac{1}{2a} \sum_{\mu(x) \neq x} (f_\mu(x)) - \frac{1}{2n} \sum_{x \in M \cup W} (f_\mu(x)) \\
 &= \frac{1}{2an} (n \sum_{\mu(x) \neq x} (f_\mu(x)) - a (\sum_{\mu(x) \neq x} (f_\mu(x)) + \sum_{\mu(x) = x} (f_\mu(x)))) \\
 &= \frac{1}{2an} ((n-a) \sum_{\mu(x) \neq x} (f_\mu(x)) - a \sum_{\mu(x) = x} (f_\mu(x))) \\
 &= \frac{1}{2an} ((n-a)2a\Pi_a(\mu) - a \cdot 2(n-a)f_k) \geq 0.
 \end{aligned}$$

故有 $\Pi_a(\mu) \geq \Pi_n(\mu)$ 成立.

(2) 由 MGS 算法和 WGS 算法, 易证 (参见文献 [1]).

参 考 文 献

- [1] Gale D, Shapley L S. College admissions and the stability of marriage[J]. Amer. Math. Mon., 1962, 69(1): 9–15.
- [2] Huang C C. Cheating by men in the Gale-Shapley stable matching algorithm[J]. Lecture Notes Comp. Sci., 2006, 4168(5): 418–425.
- [3] David F. Manlove. Algorithmics of matching under preferences[M]. London: World Sci. Publ. Co. Pte. Ltd., 2013.
- [4] Noam Nisan et al.. Algorithmic game theory[M]. New York: Cambridge University Press, 2007.
- [5] 宋旭东, 纪秀花. 稳定婚姻问题的研究 [J]. 计算机与应用进程, 2008, 36(5): 968–972.
- [6] 郭东亮, 张立臣. 用回跳法求解稳定婚姻问题 [J]. 计算机应用研究, 2005, 22(1): 90–92.

STABLE MARRIAGE PROBLEM UNDER PARTIAL
PREFERENCES

WU Wei-rang, CHEN Jin-yang, JIANG Nan

(School of Mathematics and Statistics, Hubei Normal University, Huangshi 435002, China)

Abstract: In this paper, the matching-rate and the matching satisfaction of stable-matching with partial preference have been considered. Based on the research of the satisfaction function, it was theoretically explained that the satisfaction of stable-matching with partial preference was no less than the satisfaction of stable-matching with all preference. It is better to interpret the 3S lady (man) phenomenon in today's society.

Keywords: stable marriage-matching; GS-algorithm; matching-rate; matching satisfaction.

2010 MR Subject Classification: 91A40