Vol. 36 (2016)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

BL - 代数上的 $\odot$ - 导子

辛小龙, 冯 敏, 杨永伟
(西北大学数学系, 陕西 西安 710127)

摘 要: 本文引入了 BL - 代数的 $\odot$ - 导子并研究了 BL - 代数上 $\odot$ - 导子的相关问题. 利用导子的保序性, 不动点集和 BL - 代数的格理想, 讨论了 BL - 代数上的保序 $\wedge$ - 导子和保序 $\odot$ - 导子的关系, 并给出了 Gödel 代数和线性 Gödel 代数的刻画. 这些结果丰富了逻辑代数上的导子理论.

关键词: BL - 代数; $\odot$ - 导子; 格理想; Gödel 代数
MR(2010) **主题分类号**: 03G10 **中图分类号**: O141.1
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2016)03-0552-07

1 引言

导子的思想来源于分析理论, 将它引入到代数系统中有助于研究代数系统的结构和性质. 一些学者在环和近似环上研究了导子的性质 [1−3]. Jun 和 Xin[4], Zhan 和 Liu[5] 将环和近似环上的导子理论应用到 BCI - 代数中, 得到了一些重要的结果. 自从 Szász[4] 在格中引入了导子的概念之后, 许多学者在格上研究了导子的性质. Xin 等在 [7] 中给出了模格、分配格和具有最大元的格上的导子成为保序导子的等价条件, 并利用保序导子刻画了模格、分配格的特征. Çeven 等在文献 [7] 的基础上, 给出了 f - 导子的概念, 从而推广了导子的形式 [8]. 李毅君和辛小龙 [9] 将导子的概念引入到 λ - 格中, 并通过 λ - 格微分的弱正则性和正则性得到了 λ - 格导子的一些重要结果. 最近, Alshehri[10] 将导子理论应用到 MV - 代数中, 并使用保序导子给出了 MV - 代数的导子的若干性质. 在 MV - 代数上, Ghorbani 等 [11] 进一步定义了两类 MV - 代数的导子, 刻画了 $(\odot,\oplus)$ - 导子的特征, 并证明了 $(\ominus,\odot)$ - 导子是保序的.

本文将导子理论应用到 BL - 代数中, 给出了 BL - 代数 $\odot$ - 导子的概念, 利用 $\odot$ - 导子研究了 BL - 代数的相关性质. 重点讨论了 BL - 代数的强 $\odot$ - 导子的性质, 研究了格上的 $\wedge$ - 导子和 BL - 代数 $\odot$ - 导子的关系, 并借助保序导子刻画了 BL - 代数的特征. 在 BL - 代数 A 上定义集合 $F_d(A)=\{x\in A: dx=x\}$, 得到 $F_d(A)$ 是 A 的下集. 引入主 $\odot$ - 导子 $d_a(x)=a\odot x$, 证明了 $F_{d_a}(A)$ 是 A 的格理想. 并通过 $\odot$ - 导子的不动点集刻画了 Gödel 代数和线性 Gödel 代数.

2 预备知识

定义 2.1[12] 一个 $(2,2,2,2,0,0)$ 型代数 $(A,\wedge,\vee,\odot,\rightarrow,0,1)$, 若它满足下列公理: 对任意 $x,y,z\in A$,

(BL-1) $(A,\wedge,\vee,0,1)$ 是一个有界格;

*收稿日期: 2013-10-21 接收日期: 2013-11-19
基金项目: 西北大学研究生高水平成果资助项目 (YC13055).
作者简介: 辛小龙 (1955–), 男, 陕西西安, 教授, 主要研究方向: 逻辑代数、模糊代数和超代数.

(BL-2) $(A,\odot,1)$ 是可换的幺半群;

(BL-3) $x\le y\to z\Leftrightarrow x\odot y\le z$;

(BL-4) $x\wedge y=x\odot(x\to y)$;

(BL-5) $(x\to y)\vee(y\to x)=1$,

则称 $(A,\wedge,\vee,\odot,\to,0,1)$ 是一个 BL - 代数.

一个 BL - 代数 A 称为 Gödel 代数, 对任意的 $x\in A$, $x\odot x=x$ 成立.

在 BL - 代数 A 中定义序关系“$\le$”为 $x\le y$ 当且仅当 $x\to y=1$, 定义 $x^-=x\to 0$, 其中 $x,y\in A$. 另外, 称 $B(A)=\{x\in A:x\odot x=x\}$ 为 A 的布尔中心.

引理 2.2 [12−15] 设 A 是 BL - 代数, 则下列结论成立: $\forall x,y,z\in A$,

(1) $x\le y\Rightarrow x\odot z\le y\odot z$;

(2) $x\odot y=0\Leftrightarrow x\le y^-$;

(3) $x\le y\Rightarrow y^-\le x^-$;

(4) $1^-=0$，$0^-=1$, $x^{---}=x^-$;

(5) $x\odot y\le x\wedge y$, $x\odot x^-=0$, $x\odot 0=0$;

(6) $x\odot(y\vee z)=(x\odot y)\vee(x\odot z)$;

(7) $x\odot(y\wedge z)=(x\odot y)\wedge(x\odot z)$.

性质 2.3 [16] 每一个 BL - 代数都是一个分配格.

定理 2.4 [13] 设 A 是 BL - 代数. 对任意的 $a\in A$ 和 $e\in B(A)$, 则 $e\odot a=e\wedge a$, $a\to e=(a\odot e^-)^-$. 进而, 若 $e\le a\vee a^-$, 则 $e\odot a\in B(A)$.

定义 2.5 [18] 设 I 是 BL - 代数 A 的非空子集, 称 I 是 A 的格理想, 若 I 满足条件: $\forall x,y\in A$,

(1) 若 $x\le y$ 且 $y\in I$, 则 $x\in I$;

(2) 若 $x,y\in I$, 则 $x\vee y\in I$.

若 BL - 代数 A 的格理想 I 满足条件: (3) $\forall x,y\in A$, $x\wedge y\in A$ 有 $x\in A$ 或 $y\in A$, 则称 I 是 A 的格素理想. 对任意的 $a\in A$, $[a]=\{x\in A:x\le a\}$ 表示由 a 生成的格理想, 称为格主理想.

3 BL - 代数的 $\odot$ - 导子

定义 3.1 [7] 设 A 是一个格, $d:A\to A$ 是映射. 若 d 满足: $\forall x,y\in A$,

$$d(x\wedge y)=(d(x)\wedge y)\vee(x\wedge d(y)),$$

则称 d 是 A 的 $\wedge$ - 导子, 简记 $d(x)=dx$.

利用 BL - 代数上的 $\odot$ 和 $\vee$ 运算, 我们给出 $\odot$ - 导子的概念.

定义 3.2 设 A 是一个 BL - 代数, $d:A\to A$ 映射. 若 d 满足: $\forall x,y\in A$,

$$d(x\odot y)=(d(x)\odot y)\vee(x\odot d(y)),$$

则称 d 是 A 的 $\odot$ - 导子. 简记 $d(x)=dx$.

设 A 是一个 BL - 代数, 定义映射 $d:A\to A$ 为 $dx=0$, $\forall x\in A$, 则容易验证 d 为 $\odot$ - 导子, 称 d 为零 $\odot$ - 导子.

例 3.3 设 $A=\{0,a,b,1\}$, 二元运算 $\odot$ 和 $\to$ 如下表所示, $0<a<b<1$, 则容易验证 $(A,\wedge,\vee,\odot,\to,0,1)$ 是 BL - 代数. 映射 $d:A\to A$ 定义为 $d0=0$, $d1=a$, $da=0$, $db=a$, 则容易验证 d 是 A 的 $\odot$ - 导子. 定义 $d_1:A\to A$ 为 $d_10=0$, $d_11=b$, $d_1b=1$, $d_1a=0$, 由于 $d_1(a\odot b)=d_1a=0$, $(d_1a\odot b)\vee(a\odot d_1b)=0\vee a=a\neq 0$, 则 d_1 不是 A 的 $\odot$ - 导子.

$\odot$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	0	a	a
b	0	a	b	b
1	0	a	b	1

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	a	1	1	1
b	0	a	1	1
1	0	a	b	1

注 对于例 3.3 中的 $\odot$ - 导子 d, 由于 $d(a\wedge b)=da=0$, $(da\wedge b)\vee(a\wedge db)=0\vee a=a\neq 0$. 因此 d 不是 A 的 $\wedge$ - 导子, 即 d 是 $\odot$ - 导子, 但不是 $\wedge$ - 导子.

命题 3.4 设 d 是 BL - 代数 A 的 $\odot$ - 导子, 则下列结论成立: $\forall x\in A$,

(1) $d0=0$;

(2) $dx\odot x^-=x\odot dx^-=0$;

(3) $dx=dx\vee(x\odot d1)$;

(4) $x\odot d1\le dx\le x^{--}$, $dx^-\le x^-\le(dx)^-$.

证 (1) $d0=d(0\odot 0)=(d0\odot 0)\vee(0\odot d0)=0$.

(2) 由于 $0=d0=d(x\odot x^-)=(x\odot dx^-)\vee(dx\odot x^-)=0$, 则 $dx\odot x^-=0$. 同理可证 $x\odot dx^-=0$.

(3) $dx=d(x\odot 1)=(dx\odot 1)\vee(x\odot d1)=dx\vee(x\odot d1)$.

(4) 根据 (3) 知 $x\odot d1\le dx$. 由 (2) 和引理 2.2 知 $dx\le x^{--}$, $dx^-\le x^-$. 则 $x^-=x^{---}\le(dx)^-$, 故 $dx^-\le x^-\le(dx)^-$.

命题 3.5 设 d 是 BL - 代数 A 的 $\odot$ - 导子. $\forall x,y\in A$, 若 $x\odot y=0$, 则 (1) $dy\le x^-$; (2) $dx\odot dy=0$.

证 (1) 由于 $0=d(x\odot y)=(x\odot dy)\vee(dx\odot y)$, 则 $dx\odot y=x\odot dy=0$, 故 $dx\le y^-$, $dy\le x^-$.

(2) 通过 (1) 的证明过程可得, $dx\le y^-$. 根据引理 2.2 的 (3) 和命题 3.4 的 (2) 知, $dx\odot dy\le y^-\odot dy=0$, 因此 $dx\odot dy=0$.

定义 3.6 设 d 是 BL - 代数 A 的 $\odot$ - 导子. $\forall x\in A$, 若 $dx\le x$, 则称 d 为 A 的强 $\odot$ - 导子.

命题 3.7 设 d 是 BL - 代数 A 的强 $\odot$ - 导子, 则下列结论成立: $\forall x,y\in A$,

(1) 若 I 是 A 的格理想, 则 $dI\subseteq I$;

(2) $dx\odot dy\le d(x\odot y)\le dx\vee dy\le x\vee y$;

(3) $(dx)^n\le d(x^n)$, 其中 $n\in N^+$, $x^n=\underbrace{x\odot x\odot\cdots\odot x}_{n次}$;

(4) 若 $d1=1$, 则 $dx=x$.

证 (1) 设 $y\in dI$, 则存在 $x\in I$ 使得 $y=dx\le x$. 考虑到 I 是 A 的格理想, 有 $y\in I$, 从而 $dI\subseteq I$.

(2) 因为 $dx\odot dy\le x\odot dy$ 和 $dx\odot dy\le y\odot dx$, 所以 $dx\odot dy\le(dx\odot y)\vee(x\odot dy)=d(x\odot y)$. 又因为 $dx\odot y\le dx\le x$, $x\odot dy\le dy\le y$, 则 $(dx\odot y)\vee(x\odot dy)=d(x\odot y)\le dx\vee dy\le x\vee y$.

(3) 由 (2) 知 $dx \odot dx \leq d(x \odot x)$, 故 $dx \odot dx \odot dx \leq d(x \odot x) \odot dx \leq d(x \odot x \odot x)$. 以此类推, $(dx)^n \leq d(x^n)$ 成立.

(4) 注意到 $x \odot d1 \leq dx \leq x$, 若 $d1 = 1$, 则 $x = x \odot d1 \leq dx \leq x$, 故 $dx = x$.

推论 3.8 设 A 是 BL - 代数, d 是 A 的强 $\odot$ - 导子. 对任意的 $x, y \in A$, 若 $y \leq x$ 且 $dx = x$, 则 $dy = y$.

证 由于 $y \leq x$, 则 $y = y \wedge x$, 因此 $dy = d(x \wedge y) = d(x \odot (x \to y)) = (dx \odot (x \to y)) \vee (x \odot d(x \to y)) = (y \wedge x) \vee (x \odot d(x \to y)) = y \vee (x \odot d(x \to y))$, 从而 $dy \geq y$. 另一方面, 由强 $\odot$ - 导子定义知 $dy \leq y$, 故 $dy = y$.

命题 3.9 设 d 是 BL - 代数 A 的 $\odot$- 导子. 对于任意的 $x, y \in A$, 若 $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ 或者 $d(x \vee y) = dx \vee dy$, 则 d 是保序的.

证 对任意 $x, y \in A$, 设 $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ 成立. 若 $x \leq y$, 则 $dx = d(x \wedge y) = dx \wedge dy$, 故 $dx \leq dy$, 即 d 保序. 类似可证: 对任意 $x, y \in A$, 若 $d(x \vee y) = dx \vee dy$, 则 d 是保序的.

定理 3.10 设 d 是线性 BL - 代数 A 的 $\odot$ - 导子, 则下列结论等价: $\forall x, y \in A$,

(1) d 是保序的;

(2) $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$;

(3) $d(x \vee y) = dx \vee dy$.

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 由于 A 是线性的, $\forall x, y \in A$, 则有 $x \leq y$ 或者 $y \leq x$. 不妨设 $x \leq y$, 由于 d 是保序的, 因此 $dx \leq dy$, 故 $dx = dx \wedge dy$. 另一方面, $dx = d(x \wedge y)$, 从而 $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$.

(1) $\Rightarrow$ (3) 由于 A 是线性的, $\forall x, y \in A$, 则有 $x \leq y$ 或者 $y \leq x$. 不妨设 $x \leq y$, 由于 d 是保序的, 则 $dx \leq dy$, 因此 $dy = dx \vee dy$. 另一方面, $dy = d(x \vee y)$, 从而 $d(x \vee y) = dx \vee dy$.

(2) $\Rightarrow$ (1) 和 (3) $\Rightarrow$ (1) 类似于命题 3.9 的证明.

定理 3.11 设 d 是 BL - 代数 A 的强 $\odot$ - 导子. 若 $d1 \in B(A)$, 则下列结论等价: $\forall x, y \in A$,

(1) d 是保序的;

(2) $dx \leq d1$;

(3) $dx = d1 \odot x$;

(4) $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$;

(5) $d(x \vee y) = dx \vee dy$;

(6) $d(x \odot y) = dx \odot dy$.

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 显然.

(2) $\Rightarrow$ (3) 由于 $dx \leq x$, 故 $dx \odot d1 \leq x \odot d1$. 又因为 $d1 \in B(A)$, 所以 $d1 \odot dx = d1 \wedge dx = dx$, 故 $dx \leq x \odot d1$. 另一方面, 由命题 3.4 知, $dx \geq x \odot d1$. 因此 $dx = x \odot d1$.

(3) $\Rightarrow$ (4) $d(x \wedge y) = d1 \odot (x \wedge y) = d1 \wedge (x \wedge y) = (d1 \wedge x) \wedge (d1 \wedge y) = (d1 \odot x) \wedge (d1 \odot y) = dx \wedge dy$.

(4) $\Rightarrow$ (1) 根据命题 3.9 可得.

(3) $\Rightarrow$ (5) $d(x \vee y) = d1 \odot (x \vee y) = d1 \wedge (x \vee y) = (d1 \wedge x) \vee (d1 \wedge y) = (d1 \odot x) \vee (d1 \odot y) = dx \vee dy$.

(5) $\Rightarrow$ (1) 根据命题 3.9 可得.

(3) $\Rightarrow$ (6) $d(x \odot y) = d1 \odot (x \odot y) = (d1 \odot x) \odot (d1 \odot y) = dx \odot dy$.

(6) $\Rightarrow$ (2) 由于 $dx = d(x \odot 1) = dx \odot d1 = dx \wedge d1$, 故 $dx \leq d1$.

定理 3.12 设 A 是 BL - 代数和 $a\in A$, 定义 $d_a:A\to A$ 为 $d_a(x)=a\odot x$, 其中 $x\in A$, 则 d_a 是 A 的 $\odot$ - 导子.

证 对于任意的 $x,y\in A$, 由于 $d_a(x\odot y)=a\odot x\odot y=(a\odot x\odot y)\vee(a\odot x\odot y)=(d_ax\odot y)\vee(x\odot d_ay)$, 故 d_a 是 A 的 $\odot$ - 导子.

注 称定理 3.12 所定义的 d_a 为主 $\odot$ - 导子. 主 $\odot$ - 导子一定是保序的. 事实上, 若 $x\le y$, 则 $d_a(x)=a\odot x\le a\odot y=d_a(y)$, 从而 d_a 保序. 设 d_a 为主 $\odot$ - 导子, 对于任意的 $x\in A$, 由于 $d_a(x)=a\odot x\le x$, 因此主 $\odot$ - 导子 d_a 是强 $\odot$ - 导子, 但反之不成立.

例 3.13 设 A 是例 3.3 中所定义的 BL - 代数, 定义映射 $d:A\to A$ 为 $d0=0$, $d1=a$, $da=a$, $db=a$, 容易验证 d 是 A 的强 $\odot$ - 导子, 但却不是 A 的主 $\odot$ - 导子.

命题 3.14 设 $(A,\wedge,\vee,\odot,\to,0,1)$ 是 BL - 代数, d 是 A 的保序 $\wedge$ - 导子, 且 $d1\in B(A)$, 则 d 是 A 的保序 $\odot$ - 导子.

证 对于任意的 $x\in A$, 注意到 d 是保序 $\wedge$ - 导子, 有 $dx\le d1$. 由于 $\wedge$- 导子满足 $dx\le x$, 则 $d1\odot dx\le x\odot d1$. 又 $d1\in B(A)$, 故 $d1\odot dx=d1\wedge dx=dx$, 从而 $dx\le x\odot d1$. 另一方面, 由于 $dx=d(x\wedge 1)=(dx\wedge 1)\vee(x\wedge d1)=dx\vee(x\wedge d1)$, 则 $x\odot d1=x\wedge d1\le dx$. 因此 $dx=x\odot d1$. 根据定理 3.12 知, d 是 BL - 代数 A 的保序 $\odot$ - 导子.

定理 3.15 设 A 是 BL - 代数, d 是 A 的一个强 $\odot$ - 导子, 定义 $F_d(A)=\{x\in A:dx=x\}$, 则 $F_d(A)$ 是 A 的下集. 称 $F_d(A)$ 为 d 的不动点集.

证 对于任意的 $x\in F_d(A)$, 有 $dx=x$. 任取 $y\in A$, 若 $y\le x$, 由于 d 是 A 的一个强 $\odot$ - 导子, 根据推论 3.8 知 $dy=y$. 从而 $y\in F_d(A)$, 因此 $F_d(A)$ 是 A 的下集.

定理 3.16 BL - 代数 A 的每一个主 $\odot$ - 导子的不动点集都是 A 的格理想.

证 $\forall a\in A$, 则主 $\odot$ - 导子 d_a 是保序的强 $\odot$ - 导子. 根据定理 3.15 得 d_a 的不动点集 F_{d_a} 是 A 的下集, 从而对任意的 $x,y\in A$, 当 $x\le y$ 和 $y\in F_{d_a}$ 时有 $x\in F_{d_a}$. 另一方面, $\forall x,y\in A$, 若 $x,y\in F_{d_a}(A)$, 则 $d_ax=x$, $d_ay=y$. 从而 $d_a(x\vee y)=a\odot(x\vee y)=(a\odot x)\vee(a\odot y)=d_ax\vee d_ay=x\vee y$, 故 $x\vee y\in F_{d_a}(A)$, 因此 $F_{d_a}(A)$ 是 A 的格理想.

定理 3.17 设 A 是 BL - 代数, d 是 A 的强 $\odot$ - 导子. 若 $d1\in B(A)$, 则下列结论成立:

(1) $d1\in F_d(A)$;

(2) 若 d 是保序 $\odot$ - 导子, 则对于任意的 $x\in A$ 有 $d^n(x)=dx$.

证 (1) 由于 $d(d1)=d(1\odot d1)=(d1\odot d1)\vee(1\odot dd1)=d1\vee dd1=d1$, 故 $d1\in F_d(A)$.

(2) 设 d 是保序的强 $\odot$ - 导子, 且 $d1\in B(A)$, 由定理 3.11 知, 对于任意的 $x\in A$, $dx=d1\odot x$ 成立, 从而 $d(dx)=d1\odot dx=d1\odot d1\odot x=d1\odot x=dx$. 由归纳法可得 $d^n(x)=dx$.

接下来用 BL - 代数的 $\odot$ - 导子的不动点集来刻画 Gödel 代数.

定理 3.18 设 A 是 BL - 代数, 则以下结论等价:

(1) $\forall a\in A$, 主 $\odot$ - 导子 d_a 满足 $F_{d_a}(A)=[a]$;

(2) A 是一个 Gödel 代数.

证 (1) $\Rightarrow$ (2) $\forall a\in A$, 设 $F_{d_a}(A)=[a]$. 由于 $a\in[a]$, 则 $a\in F_{d_a}(A)$, 从而有 $a\odot a=d_a(a)=a$ 成立, 故 A 是一个 Gödel 代数.

(2) $\Rightarrow$ (1) 设 A 是一个 Gödel 代数, 对任意 $x\in A$, 则 $x\odot x=x$ 成立. 注意到 $d_a(a)=a\odot a=a$, 则有 $a\in F_{d_a}(A)$, 并且 d_a 是保序的强 $\odot$ - 导子. 根据定理 3.15 得, $F_{d_a}(A)$ 是 A 的下集. 因此, 对于任意的 $x\in A$, 当 $x\le a$ 时, 有 $x\in F_{d_a}(A)$, 从而 $[a]\subseteq F_{d_a}(A)$. 下证

$F_{d_a}(A) \subseteq [a]$. 任取 $x \in F_{d_a}(A)$, 则 $d_a(x) = x = a \odot x \leq a \wedge x$. 从而 $x = a \wedge x$, 即 $x \leq a$. 这就证明了 $x \in [a]$. 因此 $F_{d_a}(A) = [a]$.

定理 3.19 设 A 是一个 BL - 代数, I 是 A 的有限格理想且 $I \subseteq B(A)$, 则在 A 上存在一个 $\odot$ - 导子 d, 使得 $F_d(A) = I$.

证 由于 I 是 A 的有限格理想, 则 $\bigvee_{b\in I} b = a \in I$. 设映射 $d : A \to A$ 为 $dx = x \odot a$, $\forall x \in A$. 根据定理 3.12 知, d 是 A 的一个 $\odot$ - 导子. 下证 $F_d(A) = I$. 任取 $x \in I \subseteq B(A)$, 则 $dx = a \odot x = a \wedge x = x$, 即 $x \in F_d(A)$, 则 $I \subseteq F_d(A)$. 另一方面, 对于任意的 $x \in F_d(A)$, 则有 $x = dx = a \odot x \leq a$. 由于 I 是 A 的格理想, 则 $x \in I$, 从而 $F_d(A) \subseteq I$. 因此 $F_d(A) = I$.

定理 3.20 设 A 是一个线性 BL - 代数. 若 d 是 A 的保序强 $\odot$ - 导子, 则 $F_d(A)$ 是 A 的格素理想.

证 注意到 d 是线性 BL - 代数 A 的保序强 $\odot$ - 导子, 根据定理 3.10 知, 对于任意的 $x, y \in A$, 有 $d(x \vee y) = dx \vee dy$. 若 $x, y \in F_d(A)$, 则 $dx = x$, $dy = y$. 从而 $d(x \vee y) = dx \vee dy = x \vee y$, 故 $x \vee y \in F_d(A)$. 又由定理 3.15 知 $F_d(A)$ 是 A 的下集, 因此 $F_d(A)$ 是 A 的格理想. 设 $x \wedge y \in F_d(A)$. 由于 A 是线性的, 则 $x \leq y$ 或者 $y \leq x$. 不妨设 $x \leq y$, 由 d 是保序的可知 $dx \leq dy$. 根据定理 3.10 知 $dx = dx \wedge dy = d(x \wedge y) = x \wedge y = x$, 即 $x \in F_d(A)$. 因此 $F_d(A)$ 是 A 的格素理想.

上述定理的逆命题是否成立还未给出肯定的解答, 但加上一定的条件后, 上述定理的逆命题成立.

定理 3.21 设 A 是一个 BL - 代数, 则下列结论等价:

(1) A 是一个线性 Gödel 代数;

(2) 每一个主 $\odot$ - 导子 d_a 满足 $F_{d_a}(A) = [a]$ 且 $F_{d_a}(A)$ 是 A 的格素理想.

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 对任意 $a \in A$, 根据定理 3.18 可得, $F_{d_a}(A) = [a]$. 由于任一主 $\odot$ - 导子都是保序的强 $\odot$ - 导子, 由定理 3.20 可知, $F_{d_a}(A)$ 是 A 的格素理想.

(2) $\Rightarrow$ (1) 根据定理 3.18 可得 A 是一个 Gödel 代数, 下证 A 是线性的. 设 $x, y \in A$. 考虑主 $\odot$ - 导子 $d_{x\wedge y}$, 有 $d_{x\wedge y}(t) = t \odot (x \wedge y)$, 则 $d_{x\wedge y}$ 是一个保序强 $\odot$ - 导子. 由于 $d_{x\wedge y}(x \wedge y) = (x \wedge y) \odot (x \wedge y) = x \wedge y$, 即 $x \wedge y \in F_{d_{x\wedge y}}(A)$. 根据假设 $F_{d_{x\wedge y}}(A)$ 是 A 的格素理想, 从而有 $x \in F_{d_{x\wedge y}}(A)$ 或 $y \in F_{d_{x\wedge y}}(A)$. 不妨设 $x \in F_{d_{x\wedge y}}(A)$, 则 $x = d_{x\wedge y}x = x \odot (x \wedge y) \leq x \wedge y \Rightarrow x = x \wedge y$, 因此 $x \leq y$, 即 A 是一个线性 Gödel 代数.

4 结束语

本文将导子理论应用到 BL - 代数上, 引入了 BL - 代数的 $\odot$ - 导子的概念. 通过 BL - 代数的 $\odot$ - 导子讨论了 BL - 代数的相关性质. 进而定义了强 $\odot$ - 导子, 重点讨论了强 $\odot$ - 导子的性质. 研究了 BL - 代数上的 $\wedge$ - 导子和 BL - 代数 $\odot$ - 导子的关系. 对 BL - 代数上的 $\odot$ - 导子 d, 通过定义集合 $F_d(A) = \{x \in A : dx = x\}$, 证明了 $F_d(A)$ 是 A 的下集. 引入了主 $\odot$ - 导子 d_a 为 $d_a x = a \odot x$, 得到以下结果

(1) 一个 BL - 代数 A 是 Gödel 代数的充要条件是, 每一个主 $\odot$ - 导子 d_a 满足 $F_{d_a}(A) = [a]$.

(2) 一个 BL - 代数是线性 Gödel 代数的充要条件是, 每一个主 $\odot$ - 导子 d_a 满足 $F_{d_a}(A) = [a]$ 且 $F_{d_a}(A)$ 是 A 的格素理想.

参 考 文 献

[1] Posner E. Derivations in prime rings [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8(6): 1093–1100.

[2] Bell H E, Mason G. On derivations in near-rings and rings [J]. Math. J. Okayama Univ., 1992, 34: 135–144.

[3] 徐晓伟, 马晶, 牛凤文. 广义导子幂中心化子条件 [J]. 数学进展, 2012, 41(1): 113–119.

[4] Jun Y B, Xin X L. On derivations of BCI-algebras [J]. Inform. Sci., 2004, 159: 167-176.

[5] Zhan J, Liu Y L. On f-derivations of BCI-algebras [J]. Int. J. Math. Math. Sci., 2005, 25(11): 1675–1684.

[6] Szász G. Derivations of lattices [J]. Acta Sci. Math. (Szeged), 1975, 37: 149–154.

[7] Xin X L, Li T Y, Lu J H. On derivations of lattices [J]. Inform. Sci., 2008, 178(2): 307–316.

[8] Çeven Y, Öztürk M A. On f-derivations of lattices [J]. Bull. Korean Math. Soc., 2008, 45(4): 701-707.

[9] 李毅君, 辛小龙. λ - 格的微分 [J]. 计算机工程与应用, 2010, 46(6): 46–47.

[10] Alshehri N O. Derivations of MV-Algebras [J]. Int. J. Math. Math. Sci., 2010, doi: 10.1155/2010/312027.

[11] Ghorbani S, Torkzadeh L, Motamed S. ($\odot$, $\oplus$)-derivations and ($\ominus$, $\odot$)-derivations on MV-algebras [J]. Iran. J. Math. Sci. Inform., 2013, 8(1): 75–90.

[12] Hájek P. Metamathematics of fuzzy logic[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.

[13] Turunen E. Mathematics behind fuzzy logic [M]. Heidelberg: Physica-Verlag, 1999.

[14] Haveshki M, Saeid A B, Eslami E. Some type of filter in BL-algebras[J]. Soft Comput., 2006, 10(8): 657–664.

[15] Yang Y W, Xin X L, He P F. ($\in_r$, $\in_r$, $\vee$, q_δ)-intuitionistic fuzzy (soft) filter of BL-algebras [J]. Chinese Quart. J. Math., to appear.

[16] Turunen E. BL-algebras of basic fuzzy logic [J]. Mathware Soft Comput., 1999, 6(1): 49–61.

[17] Birkhoof G. Lattice theory [M]. Providence RI: AMS, 1967.

ON $\odot$-DERIVATIONS OF BL-ALGEBRAS

XIN Xiao-long, FENG Min, YANG Yong-wei

(*Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China*)

Abstract: In the paper, the $\odot$-derivations of BL-algebras is introduced and investigated. By using the isotone property, the fixed set and lattice ideal, the relationship between an isotone $\wedge$-derivation and an isotone $\odot$-derivation is discussed, and the characterizations of Gödel algebras and liner Gödel algebras are given, which extends the derivation theory of logic algebras.

Keywords: BL-algebra; $\odot$-derivation; lattice ideal; Gödel algebra

2010 MR Subject Classification: 03G10