Vol. 36 (2016)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

有关不能全含于半球中的一些曲面的性质讨论

张文娟
(云南师范大学数学学院, 云南 昆明 650500)

摘 要: 本文主要研究了不能全含于开半球中的一些特殊曲面. 利用 L_r 算子的相关性质, 证明了对 S^{n+1} 中紧致 r - 极小超曲面, 如果第二基本形式的秩 $\mathrm{rank}(h_{ij})>r$, 则其不全含在 S^{n+1} 的一个开半球中.

关键词: 高阶极小超曲面; 常平均曲率; 高斯映射; 半球
MR(2010) **主题分类号**: 53A10; 53C42 **中图分类号**: O186
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2016)02-0403-06

1 准备知识

定义第 r 阶平均曲率

$$S_r=\frac{1}{r!}\varepsilon_{j_1\cdots j_r}^{i_1\cdots i_r}h_{i_1j_1}\cdots h_{i_rj_r},$$
$$H_r=\binom{n}{r}^{-1}S_r,$$

S_r 与基底的选取无关, S_r 不变. 事实上, 对基底作正交变换

$$\det(\lambda I-\bar{h})=\det(\lambda I-T^{-1}hT)=\det(T^{-1}(\lambda I-h)T)=\det(\lambda I-h).$$

若 $H_{r+1}=0$, 则称 $x:M^n\to S^{n+1}$ 是 r - 极小的.

第 r 个牛顿算子 $T_{rij}=\dfrac{1}{r!}\varepsilon_{j_1\cdots j_rj}^{i_1\cdots i_ri}h_{i_1j_1}\cdots h_{i_rj_r}$. 定义

$$T_r:T_pM\to T_pM,$$
$$T_r(e_i)=T_{rij}e_j.$$

记 $B=(h_{ij})$, 易有

$$\varepsilon_{j_1\cdots j_rj}^{i_1\cdots i_ri}=\begin{pmatrix}\delta_{i_1j_1} & \cdots & \delta_{i_1j_r} & \delta_{i_1j}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \delta_{i_rj_1} & \cdots & \delta_{i_rj_r} & \delta_{i_rj}\\ \delta_{ij_1} & \cdots & \delta_{ij_r} & \delta_{ij}\end{pmatrix}$$
$$=\delta_{ij}\varepsilon_{j_1\cdots j_r}^{i_1\cdots i_r}-\delta_{i_1j}\varepsilon_{j_1j_2\cdots j_r}^{ii_2\cdots i_r}-\delta_{i_2j}\varepsilon_{j_1j_2j_3\cdots j_r}^{i_1ii_3\cdots i_r}-\cdots-\delta_{i_rj}\varepsilon_{j_1\cdots j_{r-1}j_r}^{i_1\cdots i_{r-1}i},$$

*收稿日期: 2014-01-04 接收日期: 2014-05-08
作者简介: 张文娟 (1989–), 女, 江西九江, 硕士, 主要研究方向: 微分几何.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r!}\varepsilon^{i_1\cdots i_r i}_{j_1\cdots j_r j}h_{i_1j_1}\cdots h_{i_rj_r} =&\delta_{ij}S_r-\frac{1}{r!}\varepsilon^{ii_2\cdots i_r}_{j_1j_2\cdots j_r}h_{jj_1}h_{i_2j_2}\cdots h_{i_rj_r}-\frac{1}{r!}\varepsilon^{i_1ii_3\cdots i_r}_{j_1j_2j_3\cdots j_r}h_{i_1j_1}h_{jj_2}\cdots h_{i_rj_r}\\
&-\cdots-\frac{1}{r!}\varepsilon^{i_1\cdots i_{r-1}i}_{j_1\cdots j_{r-1}j_r}h_{i_1j_1}h_{i_2j_2}\cdots h_{jj_r}\\
=&\delta_{ij}S_r-\frac{(r-1)!}{r!}T_{(r-1)ij_1}h_{j_1j}-\frac{(r-1)!}{r!}T_{(r-1)ij_2}h_{j_2j}\\
&-\cdots-\frac{(r-1)!}{r!}T_{(r-1)ij_r}h_{j_rj}\\
=&\delta_{ij}S_r-T_{(r-1)ik}h_{kj},
\end{aligned}
$$

因此有 $T_r=S_rI-T_{r-1}B$. 此外

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(T_{r-1}B)=T_{(r-1)ij}h_{ij}&=\frac{1}{(r-1)!}\varepsilon^{i_1\cdots i_{r-1}i}_{j_1\cdots j_{r-1}j}h_{i_1j_1}\cdots h_{i_{r-1}j_{r-1}}h_{ij}\\
&=\frac{r!}{(r-1)!}\cdot\frac{1}{r!}\varepsilon^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}h_{i_1j_1}\cdots h_{i_rj_r}=rS_r.
\end{aligned}
$$

即 $rS_r=\mathrm{tr}(T_{r-1}B)$. 当 $r=1$ 时, 记 $T_{1ij}=T_{ij}$.

定义算子

$$
\begin{aligned}
&L_r:C^\infty(M)\to C^\infty(M),\\
&L_r(f):=\sum_{i,j}T_{rij}f_{i,j},\forall f\in C^\infty(M).
\end{aligned}
$$

特别地,

$$
L_0(f)=\sum_{i,j}T_{0ij}f_{i,j}=\sum_{i,j}\delta_{ij}f_{i,j}=\triangle f.
$$

即 $L_0=\triangle$.

易知此算子为 $\triangle$ 算子的推广. 当 $r=1$ 时, 记 $L_1=L$.

经计算有 $L_rx=(r+1)S_{r+1}e_{n+1}-c(n-r)S_rx$, 当 $r=0$ 时, 就是 Takahashi 定理 $\Delta x=nHe_{n+1}-ncx$.

最近, 有作者用高阶平均曲率给出了球面的一些特征 (如文献 [1, 2]), 本文研究高阶极小超曲面及其高斯映射的进一步性质.

2 r - 极小超曲面及其 Gauss 映射

2.1 r - 极小曲面

设 $x:M^n\to S^{n+1}$ 为紧致的极小 (0 - 极小) 超曲面, $\Delta x=-nx$ (此时$H=0,c=1$).

若 $x(M^n)$ 包含在 S^{n+1} 的闭半球中, 则有常向量 $\vec{a}$, 使 $\langle x,\vec{a}\rangle\geq 0$. 故

$$
\langle\Delta x,\vec{a}\rangle=\langle -nx,\vec{a}\rangle=-n\langle x,\vec{a}\rangle\leq 0.
$$

令

$$
\begin{aligned}
&E_A=(0,\cdots,1_A,0,\cdots,0),1\leq A\leq n+2,\\
&x=x^AE_A=(x^1,\cdots,x^{n+2})\in R^{n+2},
\end{aligned}
$$

x^A 是定义在上 M^n 的函数, 且

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \sum_{A=1}^{n+2}(x^A)^2 = 1, \\
\Delta x = (\Delta x^1, \Delta x^2, \cdots \Delta x^{n+2}) &= \sum_{A=1}^{n+2} \Delta x^A E_A, \quad \vec{a} = \sum_{A=1}^{n+2} a^A E_A, \\
\langle \Delta x, \vec{a} \rangle &= \langle \sum_{A=1}^{n+2} \Delta x^A E_A, \vec{a} \rangle = \sum_{A=1}^{n+2} \Delta x^A \langle E_A, \vec{a} \rangle \\
&= \sum_{A=1}^{n+2} \Delta x^A a^A = \sum_{A=1}^{n+2} \Delta(x^A a^A) \\
&= \Delta \sum_{A=1}^{n+2}(x^A a^A) = \Delta \langle x, \vec{a} \rangle.
\end{aligned}$$

故 $\Delta\langle x, \vec{a}\rangle = \langle \Delta x, \vec{a}\rangle \leq 0$, 即 $\langle x, \vec{a}\rangle$ 为下调和函数. 由 Hopf 引理, 及 $\Delta\langle x, \vec{a}\rangle = 0$ 知 $\langle x, \vec{a}\rangle = 0$, 则 $x(M^n) = S^n \subset S^{n+1}$. 而 S^n 在 S^{n+1} 中是全测地的, 也就下述经典定理:

定理 A S^{n+1} 中紧致极小超曲面不全含在 S^{n+1} 中的一个开半球中.

推广上面定理有

引理 1 对 S^{n+1} 中紧致 r - 极小超曲面, 若 T_r 有定, 则其不全含在 S^{n+1} 的一个开半球中.

证 假设若能全含在 S^{n+1} 的一个开半球中, 则存在常向量 $\vec{a}$, 使

$$\begin{aligned}
&\langle x, \vec{a} \rangle > 0, \\
&L_r x = (r+1)S_{r+1}e_{n+1} - c(n-r)S_r x = -(n-r)S_r x,
\end{aligned}$$

此时 $S_{r+1} = \binom{n}{r+1} H_{r+1} = 0, c = 1$. 令 $\varphi(x) = \langle x, \vec{a}\rangle$, 类似 Δ 算子的证明有

$$L_r(\varphi) = \langle L_r x, \vec{a} \rangle = -(n-r)S_r\langle x, \vec{a} \rangle = -(n-r)S_r\varphi.$$

由于 $T_r = S_r I - T_{r-1}B, rS_r = \mathrm{tr}(T_{r-1}B)$, 则

$$\mathrm{tr}(T_r) = \mathrm{tr}(S_r I - T_{r-1}B) = nS_r - rS_r = (n-r)S_r.$$

若 (T_{rij}) 正定的, 则 $S_r = \frac{1}{n-r}\mathrm{tr}(T_r) > 0$. 由于易有 L_r 关于 L^2 - 内积是自伴的, 则有 $\int_M L_r(\varphi) d_M = 0$. 故

$$\int_M -(n-r)S_r\varphi d_M = 0 \Rightarrow \int_M S_r\varphi d_M = 0 (S_r > 0) \Rightarrow \varphi = 0,$$

即 $\langle x, \vec{a}\rangle = 0$, 与假设矛盾.

引理 2 [2] 对于球中 r - 极小超曲面, L_r 是椭圆算子的充要条件为 $\mathrm{rank}(h_{ij}) > r$.

从此引理及引理 1 就有

定理 1 对于 S^{n+1} 中紧致 r - 极小超曲面, 如果 $\mathrm{rank}(h_{ij}) > r$, 则其不全含在 S^{n+1} 的一个开半球中.

2.2 紧致超曲面 $x : M^n \to S^{n+1}(c)$ 的 Gauss 像

有类似 Hopf 引理如下

定理 * 若 (T_{ij}) 有定, $L(f) = 0$(或 $L(f) \geq 0$ 或 $L(f) \leq 0$), 则 $f =$const.

证

$$\begin{aligned} L(\frac{1}{2}f^2) &= \frac{1}{2}T_{ij}(f^2)_{i,j} = \frac{1}{2}(2T_{ij}(ff_i)_j) \\ &= T_{ij}f_if_j + fT_{ij}f_{i,j} = T_{ij}f_if_j + fL(f). \end{aligned}$$

由于 $\int_M gL(f)d_M = \int_M fL(g)d_M$, 则有 $\int_M L(f)d_M = 0$. 若 $L(f) = 0$, (T_{ij}) 正定, 则

$$0 = \int_M L(\frac{1}{2}f^2)d_M = \int_M T_{ij}f_if_jd_M \geq 0.$$

故 $\int_M T_{ij}f_if_jd_M = 0$. 又因 $T_{ij}f_if_j \geq 0$ ((T_{ij}) 正定), 则 $T_{ij}f_if_j = 0$. 故 $f_i = 0$ 即 $f =$const.

若 $L(f) \geq 0$, 且 $\int_M L(f)d_M = 0$, 则 $L(f) = 0$. 故 $f =$const, 对于 $L(f) \leq 0$, 亦成立.

同理, 当 (T_{ij}) 负定时, 类似证明.

定义 $f := \langle x, A\rangle$, A 为常向量, 则

$$df = \langle dx, A\rangle = \langle w_ie_i, A\rangle = \langle e_i, A\rangle w_i, df = f_iw_i,$$

故有 $f_i = \langle e_i, A\rangle$. 由于

$$de_i = w_{ij}e_j + h_{ij}w_je_{n+1} - cw_ix = w_{ij}e_j + h_{ij}w_je_{n+1} - c\delta_{ij}xw_j,$$

则

$$\begin{aligned} f_{i,j}w_j &= df_i + f_jw_{ji} \\ &= d\langle e_i, A\rangle + \langle e_j, A\rangle w_{ji} = \langle de_i + e_jw_{ji}, A\rangle \\ &= h_{ij}\langle e_{n+1}, A\rangle w_j + \langle -c\delta_{ij}xw_j, A\rangle \\ &= h_{ij}\langle e_{n+1}, A\rangle w_j - c\langle x, A\rangle \delta_{ij}w_j. \end{aligned}$$

故有

$$f_{i,j} = h_{ij}\langle e_{n+1}, A\rangle - c\langle x, A\rangle\delta_{ij}, x^A = \langle x, E_A\rangle \in C^\infty(M^n),$$

则有

$$\begin{aligned}
x^A_{,ij} &= h_{ij}\langle e_{n+1}, E_A\rangle - c\langle x, E_A\rangle\delta_{ij},\\
L(x^A) &= T_{ij}x^A_{,ij} = T_{ij}h_{ij}\langle e_{n+1}, E_A\rangle - cT_{ij}\langle x, E_A\rangle\delta_{ij}\\
&= T_{ij}h_{ij}\langle e_{n+1}, E_A\rangle - cT_{ii}\langle x, E_A\rangle,\\
L(x) &= L(x^A)E_A = T_{ij}h_{ij}\langle e_{n+1}, E_A\rangle E_A - cT_{ii}\langle x, E_A\rangle E_A\\
&= \langle T_{ij}h_{ij}e_{n+1}, E_A\rangle E_A - cT_{ii}\langle x, E_A\rangle E_A\\
&= T_{ij}h_{ij}e_{n+1} - cT_{ii}x,
\end{aligned}$$

即

$$L(x) = (\sum_{i,j} h_{ij}T_{ij})e_{n+1} - c\sum_i T_{ii}x,$$

$$L\langle x, \vec{a}\rangle = \langle L(x), \vec{a}\rangle = (\sum_{i,j} h_{ij}T_{ij})\langle e_{n+1}, \vec{a}\rangle - c\sum_i T_{ii}\langle x, \vec{a}\rangle.$$

由于 $T_{ij} = nH\delta_{ij} - h_{ij} \Rightarrow T_{ii} = nH - h_{ii}$, 则有

$$\sum_i T_{ii} = \sum_i (nH - h_{ii}) = n^2H - nH = n(n-1)H,$$

$$\sum_{i,j} h_{ij}T_{ij} = \sum_{i,j} h_{ij}(nH\delta_{ij} - h_{ij}) = n^2H^2 - S,$$

在 $S^{n+1}(c)$ 中, 纯量曲率 $R = n^2H^2 - S + n(n-1)c$, 其中 $S = \sum_{i,j}(h_{ij})^2$, 则

$$L\langle x, \vec{a}\rangle = (R - n(n-1)c)\langle e_{n+1}, \vec{a}\rangle - cn(n-1)H\langle x, \vec{a}\rangle. \qquad (**)$$

若 $H = 0$ 即极小时, $R \neq n(n-1)c \Leftrightarrow n^2H^2 \neq S \Leftrightarrow S_2 \neq 0$, $\langle e_{n+1}, \vec{a}\rangle \geq 0$ 即 x 的 Gauss 映射像包含在一个闭半球中, 则当 (T_{ij}) 有定时, 利用定理 * 有 $\langle e_{n+1}, \vec{a}\rangle = 0$.

故得到

定理 2 对 $S^{n+1}(c)$ 中的紧致极小超曲面, 若 (T_{ij}) 有定且 $S_2 \neq 0$, 则其 Gauss 映射像不全含在 $S^{n+1}(c)$ 的一个开半球中.

3 常平均曲率子流形的法化平均曲率的 Gauss 映射像

设 $x : M^n \to R^{n+p}$ $(p \geq 2)$ 为紧致常平均曲率 (H=const) 子流形, e_{n+1} 为法化平均曲率, 则 $\Delta x = nHe_{n+1} - ncx = nHe_{n+1}$ (此时$c = 0$). 若 $\langle e_{n+1}, \vec{a}\rangle \geq 0$, 即 x 的法化平均曲率的 Gauss 映射 $(e_{n+1} : M^n \to S^{n+p-1})$ 像包含在的一个闭半球中. 因为

$$\Delta\langle x, \vec{a}\rangle = \langle \Delta x, \vec{a}\rangle = nH\langle e_{n+1}, \vec{a}\rangle \geq 0,$$

所以 $\langle x, \vec{a}\rangle$ 为上调和函数. 故 $\langle e_{n+1}, \vec{a}\rangle = 0$. x 的法化平均曲率的 Gauss 映射像落在 $S^{n+p-2}(\subset S^{n+p-1})$ 中, 进而 $\langle x, \vec{a}\rangle = 0, x(M^n) \subset R^{n+p-1}$.

当 $p = 1$ 时, $e_{n+1} : M^n \to S^n$. 易证 e_{n+1} 为一满射, 即此时覆盖了球至少一次.

事实上, 设 $n_0 \in S^n$ 是一个固定点, 考虑函数 $f = \langle x, n_0 \rangle : M^n \to R$. 由于 M^n 是紧致的, 则 f 在 M^n 上有最大值, 即存在 $x_0 \in M^n$, 使得

$$df|_{x_0} = 0,\ \ d^2 f|_{x_0} \leq 0,$$

即

$$\langle dx|_{x_0}, n_0 \rangle = 0,\ \ \langle d^2 x|_{x_0}, n_0 \rangle \leq 0,$$

亦即 n_0 是 M^n 在 x_0 的法向量, 则存在 x_0, 使 $e_{n+1}(x_0) = n_0$, 即 e_{n+1} 是满射. 故对于 $p = 1$ 时相关的假设不成立.

故得到

定理 3 R^{n+p} 中常平均曲率子流形 M^n 的法化平均曲率的 Gauss 映射像若含在 S^{n+p-1} $(p \geq 2)$ 的一个开半球中, 则 M^n 必为 R^{n+p-1} 中子流形.

参 考 文 献

[1] 王琪. 正曲率空间形式中超曲面的全脐性质与高阶平均曲率 [J]. 数学学报, 2014, (1): 47–50.

[2] Hounie J, Leite M L. Two-ended hypersurfaces with zero scalar curvature[J]. Indiana Univ. Math. J., 1999, 48: 867–882.

[3] Hounie J, Leite M L. The maximum principle for hypersurface with vanishing curvature functions[J]. J. Diff. Geom., 1995, 41: 247–258.

[4] 陈维恒. 微分流形 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.

[5] 陈省身, 陈维恒. 微分几何讲义 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1983.

THE DISCUSSION OF SOME SURFACES WHICH ARE NOT ALL CONTAINED IN A HEMISPHERE

ZHANG Wen-juan

(*School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming 650500, China*)

Abstract: In this paper, we mainly study some special surfaces which are not all contained in an open hemisphere. By using properties of L_r operator, we prove that for a compact r-minimal hypersurface in S^{n+1}, if the rank of the second fundamental form $\mathrm{rank}(h_{ij}) > r$ then the hypersurface can not be contained in an open hemisphere of S^{n+1}.

Keywords: higher order minimal hypersurface; constant mean curvature; Gauss map; hemisphere

2010 MR Subject Classification: 53A10; 53C42