Vol. 36 (2016)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一类非自治随机微分方程的均方渐近概周期解

姚慧丽, 王健伟
(哈尔滨理工大学应用科学学院数学系, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要: 本文研究了一类在可分 Hilbert 空间中的非自治随机微分方程的均方渐近概周期解. 利用“Acquistapace-Terreni”条件, 开方族和 Banach 不动点原理讨论了该类随机微分方程的均方渐近概周期解的存在唯一性, 推广了该类随机微分方程的均方概周期解的存在唯一性问题.

关键词: 均方渐近概周期解; 非自治随机微分方程; Banach 不动点原理

MR(2010) **主题分类号:** 34C27; 47H10 **中图分类号:** O211.63

文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2016)02-0319-09

1 引言

本文中 $(H, \|\cdot\|)$ 是一个实可分的 Hilbert 空间, 文献 [1, 2] 对一类非自治的半线性随机微分方程

$$dX(t) = A(t)X(t)dt + F(t, X(t))dt + G(t, X(t))dW(t) \tag{1.1}$$

均方概周期解的存在性和唯一性进行了讨论, $A(t)(t \in R)$ 是满足“Acquistapace-Terreni”[3] 条件的一族稠密的闭合线性算子, 存在常数 $\lambda_0 \geq 0$, $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $L, K \geq 0$, $\alpha, \beta \in (0, 1]$ 且 $\alpha + \beta > 1$, 有

$$\Sigma_\theta \cup \{0\} \subset \rho(A(t) - \lambda_0), \quad \|R(\lambda, A(t) - \lambda_0)\| \leq \frac{K}{1 + |\lambda|} \tag{1.2}$$

和

$$\|(A(t) - \lambda_0)R(\lambda, A(t) - \lambda_0)[R(\lambda_0, A(t)) - R(\lambda_0, A(s))]\| \leq L|t - s|^\alpha |\lambda|^\beta,$$

其中 $t, s \in R$, $\lambda \in \sum_\theta := \{\lambda \in C - \{0\} : |\arg \lambda| \leq \theta\}$, $F : R \times L^2(P, H) \to L^2(P, H)$ 和 $G : R \times L^2(P, H) \to L^2(P, L_2^0)$ 是满足一定条件的联合连续函数. $\{W(t), t \in R\}$ 是一个可测 Q-Winer 过程。

本文中的第二部分, 将给出均方概周期随机过程和均方渐近概周期随机过程的定义和一些基本性质以及算子开方族的定义. 类似方程 (1.1) 的一些方程的周期解、均方概周期解已有文献进行了讨论 [3–6], 但目前为止还没有文献对其均方渐近概周期解给予讨论. 本文的第三部分, 将对随机微分方程 (1.1) 的均方渐近概周期解的存在性和唯一性进行讨论, 这部分是本文的主要工作.

2 预备知识

*收稿日期: 2014-06-10 接收日期: 2015-03-23
基金项目: 黑龙江省教育厅科学技术研究项目 (12511110).
作者简介: 姚慧丽 (1970–), 女, 黑龙江哈尔滨, 教授, 主要研究方向: 应用泛函分析.

本文中 (Ω,F,P) 表示完备的概率空间. $(K,\|\cdot\|_K),(H,\|\cdot\|)$ 表示两个可分的 Hilbert 空间, $L_2(K,H)$ 是所有 $K\to H$ 上所有 Hilbert-Schmidt 算子的全体, 并赋予范数 $\|\cdot\|_2$. 另外由文献 [7] 可知 $L^2(P,H)$ 表示一类强可测的, 均方可积的随机过程的全体, 则 $L^2(P,H)$ 显然是一个 Banach 空间, 其中赋予的范数为 $\|X\|_{L^2(\Omega,H)}=(E\|X\|^2)^{1/2}$, 这里 $E(h)=\int_\Omega h(\omega)dP(\omega)$.

假定系统

$$\begin{aligned} &u'(t)=A(t)u(t)\quad t\geq s,\\ &u(s)=x\in L^2(P,H)\end{aligned}\tag{2.1}$$

有一个一致渐近稳定的算子开方族 $\{U(t,s):t,s\in R \text{ 且 } t\geq s\}$.

定义 2.1 [1] $L^2(P,H)$ 的一族有界线性算子 $\{U(t,s):t,s\in R \text{ 且 } t\geq s\}$ 被称作是式 (2.1) 的算子开方族, 是指以下条件成立:

a) $U(t,s)U(s,r)=U(t,r)$, $r\leq s\leq t$.

b) 对于 $x\in X$ 函数 $(t,s)\to U(t,s)x$ 是连续的, 且有 $U(t,s)\in L(L^2(P,H),D)$, $t>s$.

c) 函数 $(s,t]\to L(L^2(P;H))$, $t\to U(t,s)$ 是可微的且有 $\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)=A(t)U(t,s)$.

定义 2.2 [1,2,8] 一个连续的随机过程 $X:R\to L^2(P,H)$ 被称作是均方概周期的是指如果对任意的 $\varepsilon>0$, 存在一个数 $l(\varepsilon)>0$ 使得任意长度为 $l(\varepsilon)$ 的区间至少包含一个 τ 有

$$\sup_{t\in R}E\|X(t+\tau)-X(t)\|^2<\varepsilon,$$

所有均方概周期随机过程的全体记为 $AP(R,L^2(P,H))$.

定义 2.3 一个连续的随机过程 $X:R\to L^2(P,H)$ 被称作是均方渐近概周期的是指如果 X 能写成 $X=g+\varphi$, $g\in AP(R,L^2(P,H))$, 且 $\varphi\in SMC_0$, 其中 $SMC_0=\{h:R\to L^2(P,H)|h$ 是连续的, 且 $\lim\limits_{t\to\infty}E\|h(t)\|^2=0\}$, 均方渐近概周期随机过程的全体记为 $AAP(R,L^2(P,H))$.

本文用 $SBC(R,L^2(P,H))$ 表示全体有界连续的随机过程. 赋予范数

$$\|X\|_\infty=\sup_{t\in R}(E\|x(t)\|^2)^{1/2},$$

显然 $SBC(R,L^2(P,H))$ 是一个 Banach 空间.

引理 2.4 [9,10] 对于一个随机过程 $X:R\to L^2(P,H)$, 有

(1) 映射: $t\to E\|X(t)\|^2$ 是一致连续的;

(2) $AP(R,L^2(P,H))\subset SBC(R,L^2(P,H))$ 是一个闭子空间;

(3) $(AP(R,L^2(P,H)),\|\cdot\|_\infty)$ 是一个 Banach 空间.

显然, $SMC_0(R,L^2(P,H))$ 是 $SBC(R,L^2(P,H))$ 的一个闭线性子空间, 定义无穷范数 $\|x\|_\infty=\sup\limits_{t\in R}(E\|x(t)\|^2)^{1/2}$, $SMC_0((R,L^2(P,H))$ 在无穷范数下是一个 Banach 空间.

定义 2.5 [1,2] 一个联合连续函数 $f:R\times L^2(P,H_1)\to L^2(P,H_2)$, $(t,y)\to F(t,y)$ 称作关于 $t\in R$ 是均方概周期的且对于 $y\in\Delta$ 一致成立 (这里 $\Delta\subset L^2(P,H_1)$ 是紧的), 是指如果对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在一个 $l(\varepsilon,\Delta)>0$, 使得任意长度为 $l(\varepsilon,\Delta)$ 的区间至少包含一个 τ, 有

$$\sup_{t\in R}E\|f(t+\tau,y)-f(t,y)\|_2^2<\varepsilon.$$

定义 2.6 一个联合连续函数 $f: R\times L^2(P,H_1)\to L^2(P,H_2)$, $(t,y)\to F(t,y)$ 称作关于 $t\in R$ 是均方渐近概周期的且对于 $y\in\Delta$ 一致成立 (这里 $\Delta\subset L^2(P,H_1)$ 是紧的), 如果有 $f=g+\varphi$, $g\in AP(R\times L^2(P,H_1),L^2(P,H_2))$, $\varphi\in SMC_0(R\times L^2(P,H_1),L^2(P,H_2))$.

定理 2.7 [7] 设一个联合连续函数 $f: R\times L^2(P,H_1)\to L^2(P,H_2)$, $(t,y)\to F(t,y)$ 在 $t\in R$ 是均方概周期的且对于 $y\in\Delta$ 一致成立, 这里 $\Delta\subset L^2(P,H_1)$ 是紧的, 且 f 满足 Lipschitz 条件 $E\|f(t,y)-f(t,z)\|_2^2\le KE\|y-z\|_1^2$, $y,z\in L^2(P,H_1)$, $t\in R$, 常数 $K>0$. 则对于任意均方概周期随机过程 $\theta: R\to L^2(P,H_1)$, 都有 $t\to f(t,\theta(t))$ 是均方概周期随机过程.

3 主要结果

在这一部分, 首先给出几个假设:

(H0) 算子 $A(t)$, $U(r,s)$ 是可交换的, 开方族 $U(t,s)$ 是渐近稳定的, 即存在常数 $M,\delta>0$ 使得 $\|U(t,s)\|\le Me^{-\delta(t-s)}$, $t\ge s$.

此外, $R(\lambda_0,A(\cdot))\in AP(R;L(L^2(P,H)))$, 这里的 λ_0 同 (1.2) 中的 λ_0.

(H1) 联合连续函数 $F: R\times L^2(P,H_1)\to L^2(P,H_2)$, $(t,y)\to F(t,y)$ 关于 $t\in R$ 是均方渐近概周期的且对于 $y\in\Delta(\Delta\subset L^2(P,H_1)$ 是紧的) 是一致的, 并且有 $F=g+h$ 成立, 其中 $g\in AP(R\times L^2(P,H_1),L^2(P,H_2))$, $h\in SMC_0$, 并假设 F 和 g 满足 Lipschitz 条件

$$E\|F(t,y)-F(t,z)\|^2\le K_1E\|y-z\|^2,$$
$$E\|g(t,y)-g(t,z)\|^2\le K_3E\|y-z\|^2,$$

这里 $K_1,K_3>0$ 为常数, $y,z\in L^2(P,H_1)$ 且 $t\in R$.

(H2) 联合连续函数 $G: R\times L^2(P,H_1)\to L^2(P,L_2^0)$, $(t,y)\to F(t,y)$ 关于 $t\in R$ 是均方渐近概周期的且对于 $y\in\Delta(\Delta\subset L^2(P,H_1)$ 是紧的) 是一致的, 即有 $G=g_1+h_1$ 成立, 其中 $g_1\in AP(R\times L^2(P,H_1),L^2(P,H_2))$, $h_1\in SMC_0$, 并假设 G 和 g_1 满足 Lipschitz 条件

$$E\|G(t,y)-G(t,z)\|_{L_2^0}^2\le K_2E\|y-z\|^2,$$
$$E\|g_1(t,y)-g_1(t,z)\|_{L_2^0}^2\le K_4E\|y-z\|^2,$$

这里 $K_2,K_4>0$ 为常数, $y,z\in L^2(P,H_1)$ 且 $t\in R$.

(H3) $\Theta=M^2(\dfrac{2K_1}{\delta^2}+\dfrac{K_2\cdot TrQ}{\delta})<1$.

引理 3.1 [3,11] 假设 $A(t)$ 满足“Acquistapace-Terreni”条件, $U(t,s)$ 是渐近稳定的且有 $R(\lambda_0,A(\cdot))\in AP(R;L(L^2(P,H)))$. 令 $h>0$, 则对任意的 $\varepsilon>0$, 都存在 $l(\varepsilon)>0$ 使得任意一个长度为 l 的区间上都至少包含一个 τ 有 $\|U(t+\tau,s+\tau)-U(t,s)\|\le\varepsilon e^{-\frac{\delta}{2}(t-s)}$ 成立, 这里 $t-s\ge h$.

通过文献 [1], 可知方程 (1.1) 解的形式为

$$X(t)=U(t,s)X(s)+\int_s^t U(t,\sigma)F(\sigma,X(\sigma))d\sigma+\int_s^t U(t,\sigma)G(\sigma,X(\sigma))dW(\sigma),\tag{3.1}$$

这里 $t\ge s$, $s\in R$.

下面给出本文的主要结果.

定理 3.2 在 (H0)–(H3) 的假设条件下, 方程 (1.1) 有唯一的均方渐近概周期解

$$X(t)=\int_{-\infty}^{t}U(t,\sigma)F(\sigma,X(\sigma))d\sigma+\int_{-\infty}^{t}U(t,\sigma)G(\sigma,X(\sigma))dW(\sigma) \tag{3.2}$$

证 首先, 根据文献 [1] 中的定理 3.3, 我们知道解 (3.2) 式是定义好的, 且满足式 (3.1). 定义

$$(\Phi X)(t)=\int_{-\infty}^{t}U(t,s)F(s,X(s))ds,\qquad X\in AAP(R,L^2(P,H_1)), \tag{3.3}$$

$$(\Psi X)(t)=\int_{-\infty}^{t}U(t,s)G(s,X(s))dW(s),\qquad X\in AAP(R,L^2(P,H_1)). \tag{3.4}$$

先证明 $(\Phi X)(t)$ 部分是均方渐近概周期的, 因为 $F,X\in AAP(R,L^2(P,H))$, 所以令

$$\begin{aligned}&F=g+h,\quad g\in AP(R,L^2(P,H)),\quad h\in SMC_0,\\&X=x_1+x_2,\quad x_1\in AP(R,L^2(P,H)),\quad x_2\in SMC_0.\end{aligned}$$

通过变换得到

$$\begin{aligned}F(s,X(s))&=g(s,x_1(s))+F(s,X(s))-g(s,x_1(s))\\&=g(s,x_1(s))+F(s,X(s))-F(s,x_1(s))+h(s,x_1(s)).\end{aligned}$$

考虑 $h(s,x_1(s))$, 令 $A=\overline{x_1(R)}$, 则 A 是紧的, 因此存在 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m\in A$ 使得 $x_1(R)\subset\bigcup\limits_{i=1}^{m}(\theta_i,\varepsilon)$, 再考虑开集

$$B_i=\{t\in R,x_1(t)\in B(\theta_i),\varepsilon)\},\quad 1\le i\le m,$$

于是可得到

$$F(s,X(s))=g(s,x_1(s))+F(s,X(s))-F(s,x_1(s))+h(s,x_1(s))-h(s,\theta_i)+h(s,\theta_i).$$

显然, $g(s,x_1(s))$ 是均方概周期的, 再由文献 [1] 可知 $\int_{-\infty}^{t}U(t,s)g(s,x_1(s))ds$ 是均方概周期的. 故只须证明

$$\int_{-\infty}^{t}U(t,s)[F(s,X(s))-F(s,x_1(s))+h(s,x_1(s))-h(s,\theta_i)+h(s,\theta_i)]ds$$

是 SMC_0 分量即可.

由不等式 $(a+b+c)^2\le 3a^2+3b^2+3c^2$ 得到

$$\begin{aligned}&E\|\int_{-\infty}^{t}U(t,s)[F(s,X(s))-F(s,x_1(s))+h(s,x_1(s))-h(s,\theta_i)+h(s,\theta_i)]ds\|^2\\&\le 3E\|\int_{-\infty}^{t}U(t,s)[F(s,X(s))-F(s,x_1(s))]ds\|^2\\&\quad+3\sum_{i=1}^{m}E\|\int_{-\infty}^{t}U(t,s)[h(s,x_1(s))-h(s,\theta_i)]ds\|^2\\&\quad+3\sum_{i=1}^{m}E\|\int_{-\infty}^{t}U(t,s)h(s,\theta_i)ds\|^2\\&=I_1+I_2+I_3,\end{aligned} \tag{3.5}$$

只需分别证明 $I_1, I_2, I_3 \in SMC_0$.

通过 (H0)、(H1)、Holder 不等式、Fubini 定理有

$$\begin{aligned}
I_1 &= 3E\|\int_{-\infty}^{t} U(t,s)[F(s,X(s))-F(s,x_1(s))]\|^2 \\
&= 3E\|\int_{0}^{\infty} U(t,t-s)[F(t-s,X(t-s))-F(t-s,x_1(t-s))]\|^2 \\
&\leq 3M^2(\int_0^\infty e^{-\delta s}ds)\times(\int_0^\infty e^{-\delta s}K_1E\|x_2(t-s)\|^2ds) \\
&\leq \frac{3K_1M^2}{\delta}(\int_0^\infty e^{-\delta s}E\|x_2(t-s)\|^2ds),
\end{aligned}$$

又因为 $x_2(\cdot)\in SMC_0$, 所以对于任意的 $\varepsilon>0$ 存在 $N_1>0$, 当 $t\in R\backslash[-N_1,N_1]$ 时, $E\|x_2(t)\|^2\leq\varepsilon$ 成立. 另外, 因为 $\|U(t,s)\|\leq Me^{-\delta(t-s)}$, 所以对于上述的 $\varepsilon>0$ 存在 $N_2>0$, 当 $t-s\geq N_2$ 时 $Me^{-\delta(t-s)}\leq\varepsilon$ 成立. 从而, 当 $|t|>N_1+N_2$ 时, 必有

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \frac{3K_1M^2}{\delta}(\int_0^\infty e^{-\delta s}E\|x_2(t-s)\|^2ds) \\
&\leq \frac{3K_1M^2}{\delta}(\int_0^{N_2} e^{-\delta s}E\|x_2(t-s)\|^2ds+\int_{N_2}^\infty e^{-\delta s}E\|x_2(t-s)\|^2ds) \\
&\leq \frac{3K_1M^2}{\delta}(\frac{\varepsilon-\varepsilon^2}{\delta}+\varepsilon\sup_{t\in R}E\|x_2(t-s)\|^2).
\end{aligned}$$

由 ε 的任意性, 得到 $\lim\limits_{t\to\infty} I_1=0$ 成立, 即 $I_1\in SMC_0$.

其次, 证明 $I_2\in SMC_0$, 由 (H1) 易知

$$E\|h(t,y)-h(t,z)\|^2\leq 2(K_1+K_3)E\|y-z\|^2,$$

由此得到

$$\begin{aligned}
I_2 &= 3\sum_{i=1}^m E\|\int_{-\infty}^t U(t,s)[h(s,x_1(s))-h(s,\theta_i)]ds\|^2 \\
&= 3\sum_{i=1}^m E\|\int_0^\infty U(t,t-s)[h(t-s,x_1(t-s))-h(t-s,\theta_i)]ds\|^2 \\
&\leq 3M^2(\int_0^\infty e^{-\delta s}ds)\times\sum_{i=1}^m(\int_0^\infty e^{-\delta s}K_3E\|x_2(t-s)-\theta_i\|^2ds) \\
&\leq \frac{6(K_1+K_3)M^2}{\delta}\sum_{i=1}^m(\int_0^\infty e^{-\delta s}E\|x_2(t-s)-\theta_i\|^2ds) \\
&\leq \frac{6(K_1+K_3)M^2m}{\delta^2}\varepsilon.
\end{aligned}$$

由 ε 的任意性, 得到 $\lim\limits_{t\to\infty} I_2=0$, 即 $I_2\in SMC_0$.

最后证明 I_3 是 SMC_0 分量, 由 (3.5) 式有

$$\begin{aligned}
I_3 &= 3\sum_{i=1}^{m} E\|\int_{-\infty}^{t} U(t,s)h(s,\theta_i)ds\|^2 \\
&= 3\sum_{i=1}^{m} E\|\int_{0}^{\infty} U(t,t-s)h(t-s,\theta_i)ds\|^2 \\
&\leq 3M^2(\int_0^{\infty} e^{-\delta s}ds)\times\sum_{i=1}^{m}(\int_0^{\infty} e^{-\delta s}E\|h(t-s,\theta_i)\|^2 ds) \\
&\leq \frac{3M^2}{\delta}\sum_{i=1}^{m}(\int_0^{\infty} e^{-\delta s}E\|h(t-s,\theta_i)\|^2 ds) \\
&\leq \frac{3M^2 m}{\delta^2}\varepsilon,
\end{aligned}$$

由此得到 $\lim\limits_{t\to\infty} I_3 = 0$ 成立, 即 $I_3 \in SMC_0$.

综上所述 $I_1, I_2, I_3 \in SMC_0$, 由此得到 $(\Phi X)(t)$ 是均方渐近概周期的. 类似的, 我们将给出 $(\Psi X)(t)$ 部分的证明. 显然, 这一部分比 $(\Phi X)(t)$ 部分复杂, 因为这其中包括 Winer 过程 W. 根据文献 [1,6], 概周期方面的证明利用 $\tilde{W}(s) := W(s+\tau) - W(\tau)$ 性质来解决. $\tilde{W}$ 同样也是一个 Winer 过程且是 W 的广义函数. $(\Psi X)(t) = \int_{-\infty}^{t} U(t,s)G(s,X(s))dW(s)$, 其中 $G \in AAP(R\times L^2(P,H_1), L^2(P,H_2))$. 令

$$\begin{aligned}
&G = g_1 + h_1, g_1 \in AP(R\times L^2(P,H_1), L^2(P,H_2)), \qquad h_1 \in SMC_0, \\
&X = x_1 + x_2, x_1 \in AP(R, L^2(P,H_1)), \qquad x_2 \in SMC_0.
\end{aligned}$$

类似的, 可以得到

$$G(s,X(s)) = g_1(s,x_1(s)) + G(s,X(s)) - G(s,x_1(s)) + h_1(s,x_1(s)) - h(s,\theta_i) + h_1(s,\theta_i).$$

显然 $g_1(s,x_1(s))$ 是均方概周期的, 通过文献 [1] 可知 $\int_{-\infty}^{t} U(t,s)g_1(s,x_1(s))dW(s)$ 是均方概周期的. 以下证明函数

$$\int_{-\infty}^{t} U(t,s)[G(s,X(s)) - G(s,x_1(s)) + h_1(s,x_1(s)) - h(s,\theta_i) + h_1(s,\theta_i)]dW(s) \tag{3.6}$$

属于 SMC_0.

类似之前的证明, 有

$$\begin{aligned}
&E\|\int_{-\infty}^{t} U(t,s)[G(s,X(s)) - G(s,x_1(s)) + h_1(s,x_1(s)) - h(s,\theta_i) + h_1(s,\theta_i)]dW(s)\|^2 \\
&\leq 3E\|\int_{-\infty}^{t} U(t,s)[G(s,X(s)) - G(s,x_1(s))]dW(s)\|^2 \\
&\quad +3\sum_{i=1}^{m} E\|\int_{-\infty}^{t} U(t,s)[h_1(s,x_1(s)) - h_1(s,\theta_i)]dW(s)\|^2 \\
&\quad +3\sum_{i=1}^{m} E\|\int_{-\infty}^{t} U(t,s)h(s,\theta_i)dW(s)\|^2 \\
&= J_1 + J_2 + J_3.
\end{aligned}$$

通过 (H0)、(H2)、Holder 不等式、Fubini 定理有

$$\begin{aligned}
J_1 &= 3E\|\int_{-\infty}^{t} U(t,s)[G(s,X(s))-G(s,x_1(s))]dW(s)\|^2 \\
&= 3E\|\int_{0}^{\infty} U(t,t-s)[G(t-s,X(t-s))-G(t-s,x_1(t-s))]dW(s)\|^2 \\
&\leq 3TrQM^2(\int_0^\infty e^{-\delta s}ds)\times(\int_0^\infty e^{-\delta s}K_2E\|x_2(t-s)\|^2_{L_2^0}ds) \\
&\leq \frac{3TrQK_2M^2}{\delta}(\int_0^\infty e^{-\delta s}E\|x_2(t-s)\|^2_{L_2^0}ds).
\end{aligned}$$

类似 I_1 的讨论过程, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N_1>0$, 在 $R\backslash[-N_1,N_1]$ 范围内, $E\|x_2(\cdot)\|\leq\varepsilon$ 成立. 另外, 因 $\|U(t,s)\|\leq Me^{-\delta(t-s)}$, 所以上述的 $\varepsilon>0$, 存在 $N_2>0$, 必有当 $t-s\geq N_2$ 时, $Me^{-\delta(t-s)}\leq\varepsilon$ 成立. 因此, 当 $|t|>N_1+N_2$ 时, 必有

$$J_1\leq\frac{3TrQK_2M^2}{\delta}(\frac{\varepsilon-\varepsilon^2}{\delta}+\varepsilon\sup_{t\in R}E\|x_2(t-s)\|^2),$$

由此我们可知 $J_1\in SMC_0$.

下面给出 J_2,J_3 的证明, 根据 (H2) 得到 $E\|h_1(t,y)-h_1(t,z)\|^2_{L_2^0}\leq 2(K_2+K_4)E\|y-z\|^2$,

$$\begin{aligned}
J_2 &= 3\sum_{i=1}^m E\|\int_{-\infty}^t U(t,s)[h_1(s,x_1(s))-h_1(s,\theta_i)]dW(s)\|^2 \\
&\leq 6TrQ(K_2+K_4)M^2(\int_0^\infty e^{-\delta s}ds)\times\sum_{i=1}^m(\int_0^\infty e^{-\delta s}E\|x_1(t-s)-\theta_i\|^2_{L_2^0}ds) \\
&\leq \frac{6TrQ(K_2+K_4)M^2}{\delta}\sum_{i=1}^m(\int_0^\infty e^{-\delta s}E\|x_1(t-s)-\theta_i\|^2_{L_2^0}ds) \\
&\leq \frac{6TrQ(K_2+K_4)M^2m}{\delta^2}\varepsilon, \\
J_3 &= 3\sum_{i=1}^m E\|\int_{-\infty}^t U(t,s)h_1(s,\theta_i)dW(s)\|^2 \\
&\leq 3TrQM^2(\int_0^\infty e^{-\delta s}ds)\times\sum_{i=1}^m(\int_0^\infty e^{-\delta s}E\|h_1(t-s,\theta_i)\|^2_{L_2^0}ds) \\
&\leq \frac{3TrQM^2}{\delta}\sum_{i=1}^m(\int_0^\infty e^{-\delta s}E\|h_1(t-s,\theta_i)\|^2_{L_2^0}ds) \\
&\leq \frac{3TrQM^2m}{\delta^2}\varepsilon,
\end{aligned}$$

由此得到 $J_1,J_2,J_3\in SMC_0$, 从而由 (3.6) 式定义的函数属于 SMC_0. 综上所述, 得到 (3.2) 式是方程的均方渐近概周期解.

最后通过 Banach 不动点原理证明方程均方渐近概周期解的唯一性.

令 $Y, Z \in AAP(R, L^2(P, H))$, 定义映射

$$(\Gamma Y)(t) = \int_{-\infty}^{t} U(t,s)F(s,Y(s))ds + \int_{-\infty}^{t} U(t,s)G(s,Y(s))dW(s), \tag{3.7}$$

$$(\Gamma Z)(t) = \int_{-\infty}^{t} U(t,s)F(s,Z(s))ds + \int_{-\infty}^{t} U(t,s)G(s,Z(s))dW(s). \tag{3.8}$$

由上面的证明, 知 Γ 是 $AAP(R, L^2(P, H))$ 上的自映射. 为了完成证明, 需证 Γ 是一个压缩映射. 由 (3.7) 和 (3.8) 式可得

$$\begin{aligned} E\|\Gamma Y(t) - \Gamma Z(t)\|^2 \;\;=\;\; & E\|\int_{-\infty}^{t} U(t,s)F(s,Y(s))ds + \int_{-\infty}^{t} U(t,s)G(s,Y(s))dW(s) \\ & - \int_{-\infty}^{t} U(t,s)F(s,Z(s))ds + \int_{-\infty}^{t} U(t,s)G(s,Z(s))dW(s)\|^2. \end{aligned}$$

利用不等式 $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$, 得到

$$\begin{aligned} E\|\Gamma Y(t) - \Gamma Z(t)\|^2 \;\;\le\;\; & 2M^2 E(\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}\|F(s,Y(s)) - F(s,Z(s))\|ds)^2 \\ & +2E(\|\int_{-\infty}^{t} U(t,s)[G(s,Y(s)) - G(s,Z(s))]dW(s)\|)^2. \end{aligned}$$

通过文献 [1]、(H1)、(H2), 得到

$$\begin{aligned} & E(\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}\|F(s,Y(s)) - F(s,Z(s))\|ds)^2 \\ \le\; & K_1(\int_{-\infty}^{t} e^{-\delta(t-s)}ds)^2 \sup_{t\in R} E\|Y(t) - Z(t)\|^2 \\ \le\; & \frac{K_1}{\delta^2}\|Y - Z\|_\infty. \end{aligned}$$

同样, 利用 Ito 积分, 可以得到

$$\begin{aligned} & E(\|\int_{-\infty}^{t} U(t,s)[G(s,Y(s)) - G(s,Z(s))]dW(s)\|)^2 \\ \le\; & TrQ \cdot M^2 K_2(\int_{-\infty}^{t} e^{-2\delta(t-s)}) \sup_{t\in R} E\|Y(t) - Z(t)\|^2 \\ \le\; & TrQ \cdot \frac{M^2 K_2}{2\delta}\|Y - Z\|_\infty. \end{aligned}$$

综上, 得到 $E\|\Gamma Y(t) - \Gamma Z(t)\|^2 \le M^2(\frac{2K_1}{\delta^2} + \frac{K_2 \cdot TrQ}{\delta})\|Y - Z\|_\infty$. 由 (H3) 得知 $M^2(\frac{2K_1}{\delta^2} + \frac{K_2 \cdot TrQ}{\delta}) < 1$, 从而得到 Γ 是压缩映射. 由 Banach 不动点原理可知 Γ 在 $AAP(R, L^2(P, H))$ 上有唯一的不动点. 此不动点即为 (3.2) 式定义的 $X(t)$.

综上所述, (3.3) 式是方程 (1.1) 的唯一的均方渐近概周期解.

参 考 文 献

[1] Paul H Bezandry, Toka Diagana. Square-mean almost periodic solutions nonautonomous stochastic differential equations[J]. Elec. J. Differ. Equ., 2007, 2007(117): 1–15.

[2] Paul H Bezandry. Existence of quadratic-mean almost periodic solutions to some stochastic hyperbolic differential equations[J]. Elec. J. Differ. Equ., 2009, 2009(111): 1–14.

[3] Acquistapace P, Terreni B. A unified approach to abstract linear parabolic equations[J]. Tend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1987, 78: 47–107.

[4] Ya A Dorogovtsev, Ortega O A. On the existence of periodic solutions of a stochastic evolution equations[J]. Visnik Kiiv. Univ. Ser. Mekh. 1988, 115(30): 21–30.

[5] Tudor C. Almost periodic solution of affine stochastic evolutions equations[J]. Stochasics and Stochastics Report, 1992, 38(4): 251–266.

[6] 汪家义, 许明浩. 随机微分 - 积分方程解的存在唯一性 [J]. 数学杂志, 1999, 19(3): 333–338.

[7] L W G, L J W. Existence of almost periodic solutions to some semi-linear stochastic integro-differential equations[J]. Ann. of Diff. Eqs. 2013, 29(1): 34–43.

[8] Paul H. Bezandry, Toka Diagana. Almost periodic stochastic processes[M]. New York: Springer. 2011.

[9] Farouk Chérif. Quadratic-mean pseudo almost periodic solutions to some stochastic differential equations in a Hilbert space[J]. J. Appl Math. Comput. 2012, 40(1-2): 427–443.

[10] Farouk Chérif. A various types of almost periodic functions on Banach spaces[J]. Int. Math. Forum. 2011, 19(6): 921–952.

[11] Caraballo T, Real J, Taniguchi T. The exponential stability of neutral stochastic delay partial differential equations[J]. Discrete Contin. Dyn. Syst. 2007, 18(2-3) : 295–313.

SQUARE-MEAN ASYMPTOTICALLY ALMOST PERIODIC SOLUTION ON A CLASS OF NONAUTONOMOUS STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

YAO Hui-li, WANG Jian-wei

(*Department of Mathematics, School of Application and Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China*)

Abstract: In this papre, the square-mean asymptotically almost periodic solution is studied on a class of nonautonomous stochastic differential equations in a separable Hilbert space. By using the “Acquistapace-Terreni” conditions, evolution families and Banach fixed point theorem, the existence and uniqueness of square-mean asymptotically almost periodic solution on this kind of nonautonomous stochastic differential equations are discussed. The problems on the existence and uniqueness of square-mean almost periodic solutions on this kind of equation are generalized.

Keywords: square-mean asymptotically almost periodic solution; nonautonomous stochastic differential equations; Banach fixed point theory

2010 MR Subject Classification: 34C27; 47H10