

Suzuki 群 $Sz(q)$ 和线性空间的自同构群

李上钊

(常熟理工学院数学与统计学院, 江苏 常熟 215500)
(苏州大学数学科学学院, 江苏 苏州 215006)

摘要: 本文研究了线性空间的几乎单的线传递自同构群. 利用有限线性空间上线传递自同构群的经典结论, 以及 Suzuki 群 $Sz(q)$ 的性质, 获得了线性空间上线传递且点本原的自同构群的基柱不是 $Sz(q)$ 的结果, 推广了关于线传递性空间的已有结果.

关键词: 线传递; 点本原; 线性空间; 基柱

MR(2010) 主题分类号: 20B25

中图分类号: O152.1

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2016)02-0298-05

1 引言

本文是群和线传递线性空间分类课题的组成部分. 有限线性空间 $\mathcal{S}$ 是由点集合 $\mathcal{P}$ 和线集合 $\mathcal{L}$ 构成的关联结构, 满足任意的两点恰好在的一条线上. 通常地, 我们记 $|\mathcal{P}| = v$, $|\mathcal{L}| = b$, 它们分别表示 $\mathcal{S}$ 中 v 个点和 b 条线.

我们的兴趣在于自同构群 G 传递地作用在 $\mathcal{S}$ 的线集合上的情形. 设 G 是线传递地作用在 $\mathcal{S}$ 上的自同构群, 这意味着每一条线都包含着同样数目的点 (通常记作 k 个点), 称这样的线性空间为正则线性空间. 而且, 我们假设 $\mathcal{S}$ 是非退化的, 也就是说 $b > 1$, $k > 2$. 因为每条线上都有 k 个点, 所以过每个点的线的数目都相同, 即有 $r = (v - 1)/(k - 1)$ 条线. 因为 G 在线集合 $\mathcal{L}$ 上是传递的, 则 G 也是在点集合 $\mathcal{P}$ 上传递的, 这是 Block 定理的一个结果^[1]. 而 v, b, k, r 被称为线性空间 $\mathcal{S}$ 的参数.

显然, 如果要研究一个作用在线性空间上的有限群的结构, 那么描述它的基柱是很重要的一步. 1996 年 Camina 在文 [2] 证明了如果 G 是线性空间 $\mathcal{S}$ 上线传递, 点本原的自同构群, 那么 G 的基柱要么是初等交换群要么是单群. 随后, Camina 和 Praeger 在文 [3] 中推广了这一结果, 他们证明了如果 G 是线性空间 $\mathcal{S}$ 上线传递, 拟点本原的自同构群, 那么 G 是仿射的或是几乎单的. 于是根据点集上作用性质的不同, 线性空间上线传递自同构群的研究可约化为三种情形: G 是仿射型的, 也就是说 G 有初等交换的传递正规子群; G 有非传递的极小正规子群; G 是几乎单的, 即有正规的非交换单群 T 使得 T 在 G 中的中心化子是平凡的, 因此 $T \trianglelefteq G \leq \text{Aut}(T)$. Camina 和 Spiezia^[4] 证明了 T 不是零散单群. 2003 年 Camina, Neumann, 和 Praeger 证明了 T 不是交错群除非 $G = A_7$ 和 A_8 ^[5]. 韩广国, 在他的三篇文章 [6-8] 中考虑了 $T = E_6(q)$, $E_7(q)$ 和 $E_8(q)$ 的情形. 本文考虑基柱为 $Sz(q)$ 的几乎单群的情形.

*收稿日期: 2013-07-13

接收日期: 2014-01-07

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11172643; 11271208).

作者简介: 李上钊 (1982-), 男, 浙江仙居, 讲师, 主要研究方向: 有限群及代数组合.

主要定理 设 G 是线性空间 $\mathcal{S}$ 上线传递, 点本原的自同构群, $k_2 = (k, v-1)$, $q = 2^a$, 其中 $a = 2n+1$, $n \geq 1$ 是正整数. 如果 $q \geq 2(k_2k - k_2 + 1)a$, 那么 G 的基柱不是 $Sz(q)$.

本文将采用下列符号. 设 X 和 Y 是任意有限群, 则 $X \cdot Y$ 表示群 X 对群 Y 的一个扩张. $X : Y$ 和 $X \cdot Y$ 分别表示可裂和非可裂扩张. 而符号 $X \times Y$ 表示 X 和 Y 的直积. 设 T 是群 G 的一个子群, 则符号 $|G : T|$ 表示子群 T 在 G 中的指数. 符号 $[m]$ 表示任意 m 阶群, 而 Z_m 或更简单的 m 表示阶为 m 的循环群. 在本文中, 群论的其他符号是标准的. 另外我们用 $\text{Fix}_\Omega(K)$ 表示 $\text{Sym}(\Omega)$ 的子群 K 稳定 Ω 中点的集合. 设 n 是一个正整数, 我们用记号 $p^i || n$ 表示 $p^i | n$ 但 $p^{i+1} \nmid n$. 记号 $|n|_p$ 表示 n 的 p -部分而 $|n|_{p'}$ 表示 n 的 p' -部分. 也就是说 $|n|_p = p^t$ 其中 $p^t || n$, 而 $|n|_{p'} = n / |n|_p$. 设 G 是作用在线性空间 $\mathcal{S}$ 上的群, 那么记号 G_α 和 G_L 分别表示 $\mathcal{P}$ 中点 α 的稳定子群和 $\mathcal{L}$ 中线 L 的稳定子群. 记号 $G_{(L)}$ 表示 G 中稳定 L 上所有点的元素集合. 此外记号 G^L 表示 G_L 在 L 的点上作用所诱导出的置换群, 于是 $G^L \cong G_L / G_{(L)}$.

本文第二部分介绍 Suzuki 群 $Sz(q)$ 及线性空间的有关性质及相关结论, 在第三部分我们给出定理的证明.

2 预备知识

Suzuki 群 $Sz(q)$ 形成一个 Lie 型单群的无限家族, 在文 [9, 10] 它被定义为 $SL(4, q)$ 的子群. $Sz(q)$ 的阶是 $q^2(q^2+1)(q-1)$, 其中 $q = 2^{2n+1}$, $n \geq 1$. 设 $a = 2n+1$, $t = 2^n$, $T = Sz(q)$. 由文 [11] 第 XI 章定理 3.10 知, T 有阶分别为 $q+2t+1$ 和 $q-2t+1$ 的循环子群 U_1 和 U_2 且 U_1 和 U_2 是 T 的 Hall 子群. 再由文 [11] 第 XI 章定理 3.1, G 有子群 F 和 H , 其中 F 是阶为 q^2 , 方次数为 4 的 2-群, 而 H 同构于 $GF(q)$ 的乘法群 $GF(q)^\times$. 下面介绍 $Sz(q)$ 的极大子群.

引理 2.1 ^[11] $T = Sz(q)$ 的每一个极大子群共轭于下列子群之一:

- (1) $Sz(l)$, $l^i = 2^{2n+1}$, i 是素数;
- (2) FH ;
- (3) $N_G(H)$;
- (3) $N_G(U_i)$, $i = 1, 2$.

引理 2.2 ^[12] 设 $T = Sz(q)$ 是 $GF(q)$ 上一个例外李型单群, G 是满足 $T \trianglelefteq G \leq \text{Aut}(T)$ 的群. 设 M 是 G 的不包含 T 的极大子群, 那么下列之一成立:

- (1) $|M| < q^2 |G : T|$;
- (2) $T \cap M$ 是 T 的抛物子群.

设 G 是线性空间 $\mathcal{S}$ 上的线传递自同构群, 回顾正则线性空间两个重要结论:

$$v = r(k-1) + 1, \quad (2.1)$$

$$v(v-1) = bk(k-1). \quad (2.2)$$

于是有 $r = (v-1)/(k-1)$. 可以证明, $b \geq v$, 从而 $k \leq r$. 如果 $k = r$ 则 $v = k^2 - k + 1$; 如果 $r \geq k+1$, 那么 $v \leq k^2$.

为使用方卫东和李慧陵的一个结果 ^[13], 我们定义以下常量

$$b_1 = (b, v), b_2 = (b, v-1), k_1 = (k, v), \text{ 及 } k_2 = (k, v-1).$$

根据等式 (2.1) 与 (2.2), 得到方 - 李参数

$$k = k_1 k_2, b = b_1 b_2, r = b_2 k_2, \text{ 及 } v = b_1 k_1.$$

下面将叙述本文重复用到的两个基本结果.

引理 2.3 ^[14] 设 $G = T : \langle x \rangle$ 且线传递作用在线性空间 $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ 上, 那么 T 传递地作用在点集 $\mathcal{P}$ 上.

引理 2.4 ^[15] 设 G 是线性空间上线传递的自同构群, 如果 G 是点本原的, 则

- (1) 存在一个素数 p 和正整数 n 使得 $v = p^n$;
- (2) 如果存在 $p^n - 1$ 的 p -本原素因子 r 满足 $r \mid |G|$, 那么 $G \leq \text{AGL}(1, p^n)$ 或者 $k \mid v$.

3 定理的证明

引理 3.5 设 G 是作用在线性空间 $\mathcal{S}$ 上的线传递自同构群, $|T| = |\text{Soc}(G)|$ 是偶数, $T_\alpha = T \cap G_\alpha$, 其中 $\alpha \in \mathcal{P}$. 如果 G 是不可解的, 则下列结论成立:

- (1) $v = k_2(k-1)b_2 + 1$;
- (2) $\frac{|T|}{|T_\alpha|^2} < (k_2 k - k_2 + 1)|G : T|$;
- (3) $b_2 \mid |G_\alpha|$.

证 (1) 因为 $k(k-1)b = v(v-1)$ 且 $k = k_1 k_2, b = b_1 b_2$, 所以 $k_2(k-1)b_2 = v-1$, 从而 $v = 1 + k_2(k-1)b_2$.

(2) 设 L 是 $\mathcal{S}$ 的一条线. 因为 G 不可解, 所以 G^L 的结构, G 的秩及其子度不可能出现下列情形:

G^L 的结构	G 的秩	G 的子度
$\langle 1 \rangle$	$1 + k_2(k-1)$	$\overbrace{1, b_2, b_2, \dots, b_2}^{k_2(k-1)}$

否则, G^L 的阶是奇数, 因而 G 的阶也是奇数. 这与 $|T| = |\text{Soc}(G)|$ 是偶数矛盾. 于是 G 子轨道的最大长度不小于 $2b_2$. 设 λ 和 θ 分别是 G 和 T 的最大子轨道的长度. 那么有

$$\lambda \leq |G : T|\theta \leq |G : T||T_\alpha|.$$

这推出

$$v = \frac{|T|}{|T_\alpha|} = \frac{v}{\lambda} \cdot \lambda \leq \frac{v}{\lambda} |G : T||T_\alpha|.$$

因此得到

$$|T| \leq \frac{v}{\lambda} |T_\alpha|^2 |G : T|.$$

因为 $v = k_2(k-1)b_2 + 1$ 和 $\lambda \geq 2b_2$, 所以

$$\frac{|T|}{|T_\alpha|^2} \leq \frac{k_2 k - k_2 + 1}{2} |G : T|.$$

- (3) 因为 $rv = bk$, 所以 $b_2 |G_L| = k_1 |G_\alpha|$. 注意到 $(b_2, k_1) = 1$, 于是 b_2 整除 $|G_\alpha|$.

注 3.1 这个引理在本文中起到重要的作用. 引理的部分证明也可参照文献 [6].

推论 3.1 设 S 和 G 如引理 3.5 所定义, 那么 $b_2||T_\alpha|_{v'}|G:T|$ 且 $v \leq 1+k_2(k-1)|T_\alpha|_{v'}|G:T|$.

证 因为 $(b_2, v) = 1$ 且 $b_2||G_\alpha|$, 所以 $b_2||G_\alpha|_{v'}$, 从而 $b_2||T_\alpha|_{v'}|G:T|$. 结合引理 3.5, 此引理成立.

现在我们证明引言中的主要定理.

假设 $T = \text{Soc}(G) = Sz(q)$, 其中 $q = 2^a$. 于是我们有 $Sz(q) \trianglelefteq G \leq \text{Aut}(Sz(q))$. 从而 $G = T : \langle x \rangle$ 且 $|\text{Out}(T)| = a$, 其中 $x \in \text{Out}(T)$. 设 $o(x) = m$, 那么 $m|a$ 且 $|G| = q^2(q^2+1)(q-1)m$. 因为 G 是点本原的, 故对任何的 $\alpha \in \mathcal{P}$, G_α 是 G 的极大子群. 从而 $M = G_\alpha$ 是引理 2.2 的情形之一. 我们将考虑这些情形以证明主要定理.

情形 3.1 $|G_\alpha| < q^2|G:T|$.

因为 G 是线传递, 由引理 2.3, T 是点传递的. 于是 $|G_\alpha| = |T_\alpha|m$, 从而 $|T_\alpha| < q^2$. 因此 $v = |T:T_\alpha|$ 不是素数的方幂, 再由引理 2.4 知 G 不可解. 那么根据引理 3.5 得到

$$|T| < (k_2k - k_2 + 1)|T_\alpha|^2|G:T| < (k_2k - k_2 + 1)q^4|G:T|. \quad (3.1)$$

但是

$$\frac{|T|}{q^4} = \frac{(q-1)(q^2+1)}{q^2} > q-1.$$

因为 $q > 2$, $q-1 > \frac{1}{2}q$ 且 $q \geq 2(k_2k - k_2 + 1)a$, 所以

$$\frac{|T|}{q^4} > \frac{1}{2}q \geq (k_2k - k_2 + 1)a \geq (k_2k - k_2 + 1)|G:T|,$$

这意味着

$$|T| > (k_2k - k_2 + 1)q^4|G:T|,$$

这个结论与 (3.1) 式产生矛盾, 从而排除这种情形.

情形 3.2 $G_\alpha \cap T$ 是 T 的抛物子群.

检查引理 2.1 中 $Sz(q)$ 的极大子群, 我们发现 $Sz(q)$ 的抛物子群共轭于 FH 且 $|FH| = q^2(q-1)$. 于是 $v = |T:T_\alpha| = q^2+1$. 由引理 3.5 得到 $q^2 = v-1 = k_2(k-1)b_2$, 也就是说, $k_2(k-1)|q^2$, 显然这是不可能的. 这样我们完成了主要定理的证明.

参 考 文 献

- [1] Block R E. On the orbits of collineation groups[J]. Math. Zeitschrift, 1967, 96(1): 33-49.
- [2] Camina A R. The socle of automorphism groups of linear spaces[J]. Bull London Math. Soc., 1996, 28(3): 269-272.
- [3] Camina A R, Praeger C E. Line-transitive, point quasiprimitive automorphism groups of finite linear spaces are affine or almost simple[J]. Aequationes Math., 2001, 61(3): 221-232.
- [4] Camina A R, Spiezia F. Sporadic groups and automorphisms of linear spaces[J]. J. Combin. Designs, 2000, 8(5): 353-362.
- [5] Camina A R, Neumann P M, Praeger C E. Alternating groups acting on finite linear spaces[J]. Proc. London Math. Soc., 2003, 87(3): 29-53.

- [6] 韩广国. 区传递的 $2-(v, k, 1)$ 设计与李型单群 $E_8(q)$ [J]. 高校应用数学学报, 2007, 22(4): 483–490.
- [7] Han G G, Zhou S L. Block-transitive $2-(v, k, 1)$ designs and the groups $E_7(q)$ [J]. Ars Combin., 2009, 93(10): 439–450.
- [8] Han G G. Block-transitive $2-(v, k, 1)$ designs and the groups $E_6(q)$ [J]. J. Math. Res. Exp., 2010, 30(4): 581–588.
- [9] Suzuki M. A new type of simple group of finite order[J]. Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A., 1960, 46(6): 868–870.
- [10] Suzuki M. On a class of doubly transitive groups[J]. Ann. Math., 1962, 75(1): 105–145.
- [11] Huppert B, Blackburn N. Finite groups iii[M]. New York: Springer-Verlag Press, 1982.
- [12] Liebeck M W, Saxl J. On the orders of maximal subgroups of the finite exceptional groups of Lie type[J]. Proc. London Math. Soc., 1987, 55(2): 299–330.
- [13] 方卫东, 李慧陵. Camina-Gagens 定理的推广 [J]. 数学杂志, 1993, 13(4): 437–441.
- [14] Liu W J, Li S Z, Gong L Z. Almost simple groups with socle $\text{Ree}(q)$ acting on finite linear spaces[J]. European J. Combin., 2006, 27(6): 788–800.
- [15] 刘伟俊, 李慧陵, 马传贵. $2-(v, 7, 1)$ 设计的可解区传递自同构群 [J]. 数学进展, 2001, 30(1): 56–62.

THE SUZUKI GROUPS $Sz(q)$ AND AUTOMORPHISMS OF LINEAR SPACES

LI Shang-zhao

(School of Mathematics and Statistics, Changshu Institute of Technology, Changshu 215500, China)

(School of Mathematics and Science, Soochow University, Suzhou 215006, China)

Abstract: In this paper, we investigate almost simple line-transitive groups of automorphisms of linear spaces. By using classical results about line-transitive groups of automorphisms of finite linear spaces and some properties of Suzuki groups $Sz(q)$, we obtain that the socle of the group of automorphisms of linear spaces which is line-transitive and point-primitive is not $Sz(q)$, which generalizes some known results about line-transitive linear spaces.

Keywords: line-transitive; point-primitive; linear space; socle

2010 MR Subject Classification: 20B25