

全空间上一类非齐次椭圆方程正解的衰减

杨 芬, 胡 松

(武汉科技大学理学院, 湖北 武汉 430065)

摘 要: 本文研究了非齐次椭圆方程不同衰减正解的存在性和衰减问题. 利用上下解方法, 得到了两个有着不同衰减的正解的存在性, 推广了文献 [2] 中非齐次方程正解的存在性.

关键词: 非齐次椭圆问题; 正解; 存在性; 衰减

MR(2010) 主题分类号: 35J15; 35J60

中图分类号: 0175.25

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2015)06-1469-06

1 引言

本文讨论了如下非齐次椭圆方程问题

$$\begin{cases} \Delta u + u^p + u^q + f(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ u > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 表示拉普拉斯算子; $p > q > 1$, $n \in \mathbb{N}$ 且 $n \geq 3$; $f \in C(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$ 且 $f \not\equiv 0$.

为了叙述方便, 我们首先引入以下记号

$$m_p = \frac{2}{p-1}, \quad m_q = \frac{2}{q-1}.$$

关于非齐次偏微分方程, 在文献 [1, 2] 中, Bae、Ni 和 Bernard 先后讨论了

$$\begin{cases} \Delta u + u^p + f(x) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \\ u > 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

解存在的必要条件和充分条件. 在此基础上, 很多数学家进行了更加深入的研究, 得到了解的更多性质, 参见文献 [2, 4, 5] 等. 关于方程 (1.2) 的齐次方程, 有很多很好的结果, 参见文献 [3, 6–10] 等. 尤其重要的结果是当 p 充分大时, 正解在无穷远处的衰减指数为 $-m_p$, 即在无穷远处, $u(|x|) \sim |x|^{-m_p}$. 在文献 [2] 中, 作者运用上下解方法得到了在无穷远处衰减指数为 $-m_p$ (慢速衰减) 和 $-(n-2)$ (快速衰减) 的两种正解的存在性.

*收稿日期: 2014-01-05

接收日期: 2014-05-29

基金项目: 国家自然科学基金资助 (10901126; 11201355); 湖北省教育厅基金资助 (D20131108); 国家教育部博士点基金资助 (20134219120003).

作者简介: 杨芬 (1978–), 女, 湖北鄂州, 副教授, 主要研究方向: 偏微分方程及其应用.

在文献 [11] 中, 我们讨论方程 (1.1) 正解存在的充要条件. 本文中, 我们不仅讨论方程 (1.1) 在无穷远处衰减指数为 $-(n-2)$ 的快速衰减正解的存在性. 我们还将证明介于快速衰减和慢速衰减之间的一类正解的存在性. 我们的主要定理为:

定理 1.1 如果 $n/(n-2) < q$ 且 $f(x) \leq C_1/|x|^{2+n}$, 则方程 (1.1) 有解且满足如下不等式

$$0 \leq u(x) \leq \frac{\theta_1}{(1+|x|^2)^{(n-2)/2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

其中 θ_1 为方程 $-n(n-2)+pt^{p-1}+qt^{q-1}=0$ 在 $(0, +\infty)$ 上的唯一解, $C_1 = n(n-2)\theta_1 - \theta_1^p - \theta_1^q$.

定理 1.2 如果 $n/(n-2) < q$ 且 $f(x) \leq C_2/|x|^\tau$, $2+m_q < \tau < n$, 则方程 (1.1) 有解且满足如下不等式

$$0 \leq u(x) \leq \frac{\theta_2}{(1+|x|^2)^{(\tau-2)/2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

其中 θ_2 为方程 $-(\tau-2)(n-\tau)+pt^{p-1}+qt^{q-1}=0$ 在 $(0, +\infty)$ 上的唯一解

$$C_2 = (\tau-2)(n-\tau)\theta_2 - \theta_2^p - \theta_2^q.$$

注 由定理 1.1 和定理 1.2, 如果非齐次项 f 满足一定的衰减条件, 则方程 (1.1) 会有快速衰减正解、慢速衰减正解和介于快速衰减和慢速衰减之间的正解.

2 辅助性结果

定义 2.1 如果 $u \in C(\mathbb{R}^n)$,

$$\bar{u} = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{|x|=r} u(x) dS, \quad r > 0$$

称为 u 的球面平均, 其中 ω_n 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的面积, dS 是表面测度.

引理 2.2 假设 $n/(n-2) < q$. 则在无穷远处, 方程 (1.1) 的任何解的球面平均 $\bar{u}$ 满足如下的估计不等式

$$\frac{C_3}{r^{n-2}} \leq \bar{u} \leq \frac{C_4}{r^{m_q}},$$

其中 $C_3 > 0, C_4 > 0$.

注 用标准的方法可以证明引理 2.2. 证明省略.

定义 2.3 如果 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的局部 hölder 连续函数,

$$N(x) = c_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy$$

称为 f 的牛顿位势, 其中 $c_n = [(n-2)\omega_n]^{-1}$, ω_n 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的面积.

下面我们给出 f 的牛顿位势的一些结论.

引理 2.4 [7] 如果在无穷远处 $f \leq C|x|^l$, $C > 0, l > -2$, 则在无穷远处,

$$N(x) \leq \begin{cases} C|x|^{2-n}, & l < -n, \\ C|x|^{2-n} \log |x|, & l = -n, \\ C|x|^{2+l}, & -n < l < -2. \end{cases}$$

引理 2.5 ^[7] 如果在无穷远处 $f \geq C|x|^l$, $C > 0, l > -2$, 则在无穷远处,

$$N(x) \geq \begin{cases} C|x|^{2-n}, & l < -n, \\ C|x|^{2-n} \log |x|, & l = -n, \\ C|x|^{2+l}, & -n < l < -2. \end{cases}$$

引理 2.5 和 2.5 中的各个 C 是互不相同的, 我们采用了同一记号.

3 存在性定理的证明

定理 3.1 方程 (1.1) 的解满足下面的不等式

$$u(x) \geq N(x).$$

定理 3.1 可由文献 [2] 中定理 2 类似的方法证明, 我们省略其证明.

定理 1.1 的证明 记

$$w(r) = \frac{\xi}{(1+r^2)^\alpha}, \quad r \geq 0, \quad (3.1)$$

$$Sw = w'' + \frac{n-1}{r}w' + w^p + w^q, \quad (3.2)$$

$\xi > 0$ 和 $\alpha > 0$ 将在后面的证明中给出. 把 (3.1) 式代入 (3.2) 式中直接计算得到

$$Sw = \frac{4r^2\alpha(\alpha+1)\xi}{(1+r^2)^{\alpha+2}} - \frac{2\alpha n\xi}{(1+r^2)^{\alpha+1}} + \frac{\xi^p}{(1+r^2)^{\alpha p}} + \frac{\xi^q}{(1+r^2)^{\alpha q}}.$$

取 $\alpha = \frac{n-2}{2}$, 运用上下解原理, 要使 $Sw \leq 0$ 成立, 必须 $\alpha q \geq (n+2)/2$, 即

$$q \geq \frac{n+2}{n-2}. \quad (3.3)$$

在式 (3.3) 的限制下, 有

$$Sw = \frac{-n(n-2)\xi}{(1+r^2)^{(n+2)/2}} + \frac{\xi^p}{(1+r^2)^{\alpha p}} + \frac{\xi^q}{(1+r^2)^{\alpha q}} \leq \frac{-n(n-2)\xi + \xi^p + \xi^q}{(1+r^2)^{(n+2)/2}}.$$

考虑函数

$$h_1(t) = -n(n-2)t + t^q + t^p,$$

很显然 $h_1(0) = 0$; 对充分小的 $\varepsilon > 0$, 有 $h_1(\varepsilon) < 0$, 而且

$$h_1''(t) = p(p-1)t^{p-2} + q(q-1)t^{q-2} > 0, \quad t > 0.$$

从而函数

$$h_1'(t) = 0$$

在 $(0, +\infty)$ 上有唯一解, 记为 ξ_1 (即定理 1.2 中的 θ_1). 故存在唯一的 ξ_1 使下式成立:

$$p\xi_1^{p-1} + q\xi_1^{q-1} = n(n-2),$$

而且 $h_1(\xi_1)$ 为 $h_1(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值, $h_1(\xi_1) < 0$. 因此

$$Sw \leq \frac{h_1(\xi_1)}{(1+r^2)^{(n+2)/2}}.$$

如果

$$0 \leq f \leq -\frac{h_1(\xi_1)}{(1+r^2)^{(n+2)/2}},$$

则 w 是方程 (1.1) 的一个上解. 既然 $f \geq 0$, 显然 0 是方程 (1.1) 的下解. 由上下解原理, 方程 (1.1) 存在一个解满足

$$0 \leq u \leq w, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

由极值原理, $u > 0$. 定理证毕.

推论 3.2 如果条件和定理 1.1 相同, 而且 $N(x) \leq \theta_1(1+|x|^2)^{-(2+n)/2}$, 则方程 (1.1) 有解满足

$$N(x) \leq u(x) \leq \frac{\theta_1}{(1+|x|^2)^{(n-2)/2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.4)$$

也就是说, 如果对某个较小的常数 $C_5 > 0$, 在无穷远处有 $f(x) \geq C_5/|x|^{2+n}$, 则方程 (1.1) 有在无穷远处衰减指数为 $-(n-2)$ 的解.

证 由定理 1.1 和定理 3.1, 很容易得到 (3.4) 式. 由 $f(x) \geq C_5/|x|^{2+n}$ 和引理 2.5, 我们可以得到, 存在 $\theta_1 > C_6 > 0$ 使得在无穷远处有下面的不等式成立:

$$N(x) \geq \frac{C_6}{|x|^{n-2}}.$$

故方程 (1.1) 的解在无穷远处的衰减指数为 $-(n-2)$.

定理 1.2 的证明 同定理 1.1 的证明一样, 取

$$\begin{aligned} w(r) &= \frac{\xi}{(1+r^2)^\alpha}, \quad r \geq 0, \\ Sw &= w'' + \frac{n-1}{r}w' + w^p + w^q, \end{aligned}$$

$\xi > 0$ 和 $\alpha > 0$ 将在后面的证明中给出. 直接计算得到

$$\begin{aligned} Sw &= \frac{4r^2\alpha(\alpha+1)\xi}{(1+r^2)^{\alpha+2}} - \frac{2\alpha n\xi}{(1+r^2)^{\alpha+1}} + \frac{\xi^p}{(1+r^2)^{\alpha p}} + \frac{\xi^q}{(1+r^2)^{\alpha q}} \\ &\leq -\frac{2\alpha n\xi[1-2(\alpha+1)/n]}{(1+r^2)^{\alpha+1}} + \frac{\xi^p}{(1+r^2)^{\alpha p}} + \frac{\xi^q}{(1+r^2)^{\alpha q}}. \end{aligned}$$

运用上下解原理, 我们知道要让 $Sw \leq 0$, 必须 $\alpha q \geq \alpha + 1$ 且 $1 - 2(\alpha + 1)/n > 0$, 即 $\frac{1}{q-1} \leq \alpha < \frac{n-2}{2}$. 取 $\alpha = \frac{\tau-2}{2}$, $2 + m_q \leq \tau < n$,

$$Sw \leq \frac{-(\tau-2)(n-\tau)\xi + \xi^p + \xi^q}{(1+r^2)^{\tau/2}}.$$

考虑函数 $h_2(t) = -(\tau-2)(n-\tau)t + t^q + t^p$, 很显然, $h_2(0) = 0$; 对充分小的 $\varepsilon > 0$, 有 $h_2(\varepsilon) < 0$. 而且

$$h_2''(t) = p(p-1)t^{p-2} + q(q-1)t^{q-2} > 0, \quad t > 0.$$

从而函数 $h_2'(t) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一解, 记为 ξ_2 (即定理 1.2 中的 θ_2). 故存在唯一的 $\xi_2 \in (0, +\infty)$ 使下式成立:

$$p\xi_2^{p-1} + q\xi_2^{q-1} = (\tau - 2)(n - \tau),$$

而且 $h_2(\xi_2)$ 为 $h_2(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值, $h_2(\xi_2) < 0$. 因此 $Sw \leq \frac{h_2(\xi_2)}{(1+r^2)^{\tau/2}}$. 如果

$$0 \leq f \leq -\frac{h_2(\xi_2)}{(1+r^2)^{\tau/2}},$$

则 w 是方程 (1.1) 的一个上解. 既然 $f \geq 0$, 显然 0 是方程 (1.1) 的下解. 由上下解原理, 方程 (1.1) 存在一个解满足 $0 \leq u \leq w$, $x \in \mathbb{R}^n$. 由极值原理, $u > 0$. 定理证毕.

推论 3.3 如果条件和定理 1.2 相同, 而且 $N(x) \leq \theta_2(1 + |x|^2)^{(-2+\tau)/2}$, 则方程 (1.1) 有解满足

$$N(x) \leq u(x) \leq \frac{\theta_2}{(1 + |x|^2)^{(\tau-2)/2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.5)$$

也就是说, 如果对某个较小的常数 $C_7 > 0$, 在无穷远处有 $f(x) \geq C_7/|x|^\tau$, 则方程 (1.1) 有在无穷远处衰减指数为 $-(\tau - 2)$ 的解.

证 由定理 1.3 和定理 3.1, 很容易得到 (3.5) 式. 由 $f(x) \geq C_7/|x|^\tau$ 和引理 2.5, 我们可以得到, 存在 $\theta_2 > C_8 > 0$ 使得在无穷远处有下面的不等式成立:

$$N(x) \geq \frac{C_8}{|x|^{\tau-2}}.$$

故方程 (1.1) 的解在无穷远处的衰减指数为 $-(\tau - 2)$.

参 考 文 献

- [1] Bae S, Ni W M. Existence and infinite multiplicity for an inhomogeneous semilinear elliptic equation on $\mathbb{R}^n$ [J]. Math. Ann, 2001, 320: 191–210.
- [2] Bernard G. An inhomogeneous semilinear equation in entire space[J]. J. Diff. Equations, 1996, 125: 184–214.
- [3] Chen S H, Lu G Z. Asymptotic behavior of radial solutions for a class of semilinear elliptic equations[J]. J. Diff. Equations, 1997, 133: 340–354.
- [4] Deng Y, Li Y, Yang F. On the stability of the positive radial steady states for a nonhomogeneous semilinear Cauchy problem[J]. J. Diff. Equations, 2006, 228: 507–529.
- [5] Deng Y, Yang F. Existence and asymptotic behavior of positive solutions for an inhomogeneous semilinear elliptic equation[J]. Nonlinear Analysis TMA, 2008, 68: 246–272.
- [6] Li Y, Ni W M. On the asymptotic behavior and radial symmetry of positive solutions of semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$. I. Asymptotic behavior[J]. Arch. Rational Mech. Anal, 1992, 118: 195–222.
- [7] Li Y, Ni W M. On conformal scalar curvature equations in $\mathbb{R}^n$ [J]. Duke Math. J., 1988, 57(3): 895–924.
- [8] Gidas B, Spruck J. Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations [J]. Comm. Pure Appl. Math., 1981, 23: 525–598.

- [9] Gui C F, Ni W M, Wang X F. On the stability and instability of positive steady state of a semilinear heat equation in $\mathbb{R}^n$ [J]. Comm. Pure Appl. Math., 1992, 1153–1181.
- [10] Yang F, Zhang D. Separation property of positive radial solutions for a general semilinear elliptic equation[J]. Acta Math. Sci., 2011, 31B(1): 181–193.
- [11] 杨芬, 胡松. 全空间上一类非齐次椭圆方程正解存在的必要条件 [J]. 华中师范大学学报 (自然科学版), 已接收.

DECAY RATE OF POSITIVE SOLUTIONS FOR AN INHOMOGENEROUS ELLIPTIC EQUATION IN ENTIRE SPACE

YANG Fen, HU Song

(College of Science, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430065, China)

Abstract: In this paper, we discuss the existence and decay rate of positive solutions for the elliptic problem. By super and subsolutions method, we establish two existence theorems of positive solutions with different decay rate, which is a generation of the existence in [2].

Keywords: inhomogeneous elliptic problem; positive solutions; existence; decay rate

2010 MR Subject Classification: 35J15; 35J60