Vol. 35 (2015)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

棱形六面体的两两面叠合

王建军
(淮北师范大学数学科学学院, 安徽 淮北 235000)

摘 要: 本文研究了棱形六面体经两两面面叠合后所能得到几何体. 利用流形判别和基本群计算的基本方法, 获得了在可能叠合到的 476 种几何体中, 有 409 种不是流形, 而在是流形的情形时, 其基本群包括 $1, Z, Z_2, Z_3, Z_5, Z_7, Z_8$ 以及 5 种只能用关系表示的群.

关键词: 三维流形; 基本群; 棱形六面体叠合
MR(2010) **主题分类号**: 55M99 **中图分类号**: O189.21
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2015)06-1438-07

1 引言

就三维流形的构作而言, 到目前为止, 已有许多颇为有效的方法, 如利用 Heeggard 图式, Dehn 手术以及纽结理论等, 近年来应用双曲几何的方法来讨论三维流形也逐渐形成趋势, 成为研究三维流形不可或缺的重要方法 (见文献 [1–3]）.

在对曲面进行分类过程中, 许多好的曲面如球面, 环面, Klein 瓶等都可用一矩形面片经过边的两两叠合而得到, 这启发我们想到能否对空间中的体经过类似的线叠合和面叠合而得到三维流形.

本文试图对体的一种简单模型－－棱形六面体, 经过面面、线线叠合得到的多面体进行研究, 这种叠合的种类共 476 种. 在文献 [4] 中, 有关于该情况下判断多面体是否是流形以及如何计算其基本群的方法.

在文献 [5] 中, 可见到关于经四面体叠合的多面体的基本群的结论, 但计算方法却没有给出, 本人曾对这个模型进行了详尽计算, 得到了与之相同的结论（见文献 [6]）, 而在此基础上对另一种模型的研究, 则是本文的主要内容.

2 基本结论

引理 2.1 [4] 设 M 是由成对地叠合一个多面体的面而成的复合形, 则 M 是流形的充要条件是它的示性数为 0.

注 叠合时若有公共棱, 则定向的棱与它的定向的反向不能相互叠合, 因为此时其中间点找不到与之叠合的其它点, 这样叠合而成的多面体不是流形.

引理 2.2 [4] M 的一个单纯剖分有 a^i 个 i 维单纯形, 则 M 的示性数为

$$N = a^0 - a^1 + a^2 - a^3.$$

*收稿日期: 2013-09-15 接收日期:2014-02-12
基金项目: 安徽省高校自然科学研究基金 (KJ2013A236); 淮北师范大学基金资助 (800665).
作者简介: 王建军 (1978–), 男, 山西长治, 讲师, 主要研究方向: 几何与拓扑.

基本群的计算 如图 1, 给定复合形 M, 用 $a_1, a_2, \cdots$ 表示 M 上的定向棱, O 表示闭棱道的起点, P_1, P_2, $\cdots$ 表示 M 上棱的顶点. 用如下方法求出一组母元和关系, 进而确定其基本群.

① 由 O 到 M 的每一个顶点连接固定的棱道, 称为属于该点的辅助道路. 属于 O 点的辅助道路就只有 O 这一点.

② 相对于每一个定向棱 a_i, 恰有一条从 O 点起始的闭道 A_i: 从 O 起始, 沿着辅助道路到 a_i 的起点, 再沿着 a_i 到 a_i 的终点, 然后沿着终点的逆辅助道路回到 O. 用 $\varphi(a_\nu) = A_i$ 表示上述过程. 则这些 $A_1, A_2, \cdots$ 表示所有的棱道类, 它们恰好构成复合形 M 的一组母元.

③ 每一条从 O 起始的闭棱道 ω 能表示为上述棱道类的组合乘积. 若 $\omega = F(a_i) = a_l^{\varepsilon_l} a_m^{\varepsilon_m} \cdots a_z^{\varepsilon_z}$ 表示成一条棱道 (ε 表示方向), 那么 $W = F(A_i) = A_l^{\varepsilon_l} A_m^{\varepsilon_m} \cdots A_z^{\varepsilon_z}$ 一定与 ω 同伦. 于是, 将 $A_i = \varphi(a_\nu)$ 中的棱 a_ν 用它的闭棱道 A_ν 代替, 即有 $A_i = \varphi(A_\nu)$, 它确定一个关系.

④ 若 $a_l^{\varepsilon_l} a_m^{\varepsilon_m} \cdots a_z^{\varepsilon_z}$ 是面的边缘道, 则 $A_l^{\varepsilon_l} A_m^{\varepsilon_m} \cdots A_z^{\varepsilon_z}$ 就与 O 同伦, 所以

$$A_l^{\varepsilon_l} A_m^{\varepsilon_m} \cdots A_z^{\varepsilon_z} = 1.$$

根据上面的关系可以得到 M 的基本群.

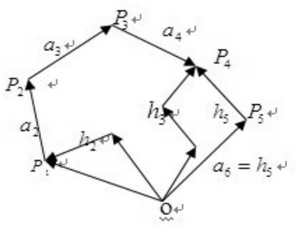

图 1

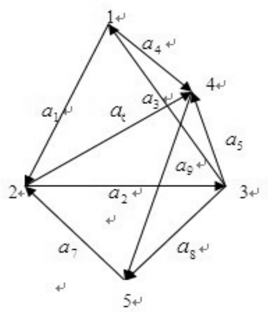

图 2

以下回到本文讨论的重点: 如图 2, 给定棱形六面体, 经两两对折后变成一复合形 M, 将讨论:

1) M 是否为流形;

2) 若 M 是流形, 其基本群为何者.

规定, 前面上下面分别为①②, 后右侧上下面分别为③④, 后左侧上下面分别为⑤⑥, 再规定, 顶点 1,2,3,4,5 如图 2, 各条棱 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ 也如图 2.

叠合后几何体 M 的零维 Betti 数恰为顶点的个数, 以下简写为"0 维", 一维 Betti 数为叠合后边的个数, 简写为"1 维", 二维 Betti 数位叠合后面的个数, 简写为"2 维", 三维 Betti 数位复合形的个数 1, 记为"3 维".

现将六个面两两对折, 使得顶点与顶点重合, 边线与边线重合, 这时中间的面将相应重合, 如①②对折, 有五种折法, 分别表示为

(123)~(523), (123）~(235), (123）~(352), (123)~(253), (123)~(325).

其它面的表示类似, 这样经过相互组合, 并排除可能重合的情形, 棱形六面体经过两两叠合后, 可以得到 476 种情形, 作者通过繁复详细的计算, 对这些情形进行了详细研究.

定理 2.3 棱形六面体经两两面叠合, 可以得到 476 种多面体, 其中有 409 种不是流形, 在流形情形时, 其基本群包括 $1, Z, Z_2, Z_3, Z_5, Z_7, Z_8$ 以及 5 类只能用关系表示的群.

3 棱形六面体的两两面叠合

总体而言, 从折法上看, 可以分成五类情况: 分别为折法一, ①②对折, ③④对折, ⑤⑥对折; 折法二, ①②对折, ③⑥对折, ④⑤对折; 折法三, ①②对折, ③⑤对折, ④⑥对折; 折法四, ①④对折, ③⑥对折, ⑤②对折; 折法五, ①③对折, ④⑥对折, ⑤②对折.

限于篇幅, 本文无法对 476 种情形一一阐述, 仅将上述 5 种折法中的典型情形各举一个例, 并把得到的结果以表格的形式给出 (见表 1–5).

- 折法一、①②对折, ③④对折, ⑤⑥对折

例 1 ①②折 $(123)\sim(523)$, ③④折 $(134)\sim(534)$, ⑤⑥折 $(142)\sim(542)$,

$$\begin{array}{llllll}
(123)\sim(523) & a_1=a_7 & a_2=a_2 & a_3=a_8 & & \\
(134)\sim(534) & a_3=a_8 & a_5=a_5 & a_4=-a_9 & \dim\ 0=4, & \dim 1=6 \\
(142)\sim(542) & a_4=-a_9 & a_6=a_6 & a_1=a_7 & \dim 2=3, & \dim 3=1
\end{array}$$

4+3=6+1 复合形 M 是流形.

以下求 M 的基本群:

I 取 1 做闭道的起点, 做到 2, 3, 4 的辅助道路 a_1, a_3^{-1}, a_4,

$$\left.\begin{array}{lll}
a_1=-a_7 & a_2=a_2 & a_3=a_8 \\
a_3=a_8 & a_5=a_5 & a_4=-a_9 \\
a_4=-a_9 & a_6=a_6 & a_1=a_7
\end{array}\right\}\Longrightarrow a_1=a_7, a_3=a_8, a_2=a_2, a_5=a_5, a_4=-a_9, a_6=a_6,$$

于是 $A_1=a_1a_1^{-1}$, $A_2=a_1a_2a_3, A_3=a_3^{-1}, A_4=a_4^{-1}, A_5=a_3^{-1}a_5a_4^{-1}, A_6=a_1a_6a_4^{-1}$, 得到 $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=a_6=1$.

II $a_1a_2a_3=1, a_3a_4a_5^{-1}=1, a_1a_6a_4^{-1}=1$, 有 $\pi_1(M)=1$.

其余情形见表 1:

表 1: ①②对折, ③④对折, ⑤⑥对折

	总数	非流形	1	Z_3
一、$(123)\sim(523)$, ③④, ⑤⑥	15	5	6	4
二、$(123)\sim(235)$, ③④, ⑤⑥	10	10	0	0
三、$(123)\sim(352)$, ③④, ⑤⑥	6	6	0	0
四、$(123)\sim(253)$, ③④, ⑤⑥	3	2	1	0
五、$(123)\sim(325)$, ③④, ⑤⑥	1	0	1	0
总计	35	23	8	4

- 折法二、①②对折, ③⑥对折, ④⑤对折

例 2 ①②折 $(123)\sim(523)$, ③④折 $(134)\sim(425)$, ⑤⑥折 $(142)\sim(453)$,

$$\begin{array}{llllll} (123)\sim(523) & a_1=a_7 & a_2=a_2 & a_3=a_8 & & \\ (134)\sim(425) & a_3=-a_6 & a_5=-a_7 & a_4=a_9 & \dim 0=2, & \dim 1=4 \\ (142)\sim(453) & a_4=a_9 & a_6=a_8 & a_1=-a_5 & \dim 2=3, & \dim 3=1 \end{array}$$

2+3=4+1 复合形 M 是流形.

以下求 M 的基本群:

I 取 1 做闭道的起点, 做到 2 的辅助道路 a_1,

$$\left.\begin{array}{lll} a_1=-a_7 & a_2=a_2 & a_3=a_8 \\ a_3=-a_6 & a_5=-a_7 & a_4=a_9 \\ a_4=a_9 & a_6=a_8 & a_1=-a_5 \end{array}\right\} \Longrightarrow a_1=a_7=-a_5, a_3=a_8=a_6=-a_3, a_2=a_2, a_4=a_9,$$

于是 $A_1=a_1a_1^{-1}=1$, $A_2=a_1a_2, A_3=a_3, A_4=a_4, a_3^2=1$.

II $a_1a_2a_3=1, a_3a_4a_5^{-1}=1 \Rightarrow a_3a_4=1, a_1a_6a_4^{-1}=1 \Rightarrow a_3a_4=1, a_3^2=1$, 有 $\pi_1(M)=Z_2$.

其余情形见表 2:

表 2: ①②对折, ③⑥对折, ④⑤对折

	总数	非流形	1	Z_2	关系
一、$(123)\sim(523)$, ③⑥, ④⑤	36	29	0	5	2
二、$(123)\sim(235)$, ③⑥, ④⑤	36	31	5	0	0
三、$(123)\sim(352)$, ③⑥, ④⑤	36	33	3	0	0
四、$(123)\sim(325)$, ③⑥, ④⑤	36	35	1	0	0
五、$(123)\sim(253)$, ③⑥, ④⑤	36	35	0	1	0
总计	180	163	9	6	2

- 折法三、①②对折, ③⑤对折, ④⑥对折

例 3 ①②折 $(123)\sim(523)$, ③⑤折 $(314)\sim(214)$, ④⑥折 $(254)\sim(543)$,

$$\begin{array}{llllll} (123)\sim(523) & a_1=a_7 & a_2=a_2 & a_3=a_8 & & \\ (314)\sim(214) & a_3=-a_1 & a_4=a_4 & a_5=a_6 & \dim 0=1, & \dim 1=3 \\ (254)\sim(543) & a_7=a_9 & a_9=a_5 & a_6=-a_8 & \dim 2=3, & \dim 3=1 \end{array}$$

1+3=3+1 复合形 M 是流形.

以下求 M 的基本群:

I 取 1 做闭道的起点, 且只有一个顶点,

$$\left.\begin{array}{lll} a_1=a_7 & a_2=a_2 & a_3=a_8 \\ a_3=-a_1 & a_4=a_4 & a_5=a_6 \\ a_7=a_9 & a_9=a_5 & a_6=-a_8 \end{array}\right\} \Longrightarrow a_1=a_7=a_9=a_5=a_6=-a_8=-a_3, a_2=a_2, a_4=a_4,$$

得到 $A_1=a_1, A_2=a_2, A_4=a_4$.

II $a_1a_2a_3 = 1 \Rightarrow a_2 = 1, a_3a_4a_5^{-1} = 1 \Rightarrow a_1^2 = a_4, a_5a_9a_8^{-1} = 1 \Rightarrow a_1^3 = 1$, 有 $\pi_1(M) = Z_3$.

其余情形见表 3:

表 3: ①②对折, ③⑤对折, ④⑥对折

	总数	非流形	1	Z	Z_3	关系
一、$(123) \sim (523)$, ③⑤, ④⑥	15	7	2	3	2	1
二、$(123) \sim (235)$, ③⑤, ④⑥	25	23	2	0	0	0
三、$(123) \sim (352)$, ③⑤, ④⑥	25	22	3	0	0	0
四、$(123) \sim (325)$, ③⑤, ④⑥	25	22	3	0	0	0
五、$(123) \sim (253)$, ③⑤, ④⑥	25	22	3	0	0	0
总计	115	96	13	3	2	1

- 折法四、①④对折, ③⑥对折, ⑤②对折

例 4 ①②折 $(123) \sim (345)$, ③④折 $(134) \sim (245)$, ⑤⑥折 $(142) \sim (253)$,

$$\begin{array}{lllll} (123) \sim (345) & a_1 = a_5 & a_2 = a_9 & a_3 = -a_8 & \\ (134) \sim (534) & a_3 = -a_6 & a_5 = a_9 & a_4 = -a_7 & \dim 0 = 1, \quad \dim 1 = 3 \\ (142) \sim (542) & a_4 = -a_7 & a_6 = a_8 & a_1 = a_2 & \dim 2 = 3, \quad \dim 3 = 1 \end{array}$$

1+3=3+1 复合形 M 是流形.

以下求 M 的基本群:

I 取 1 做闭道的起点, 做到 2,3,4 的辅助道路 a_1, a_3^{-1}, a_4,

$$\left.\begin{array}{lll} a_1 = a_5 & a_2 = a_9 & a_3 = -a_8 \\ a_3 = -a_6 & a_5 = a_9 & a_4 = -a_7 \\ a_4 = -a_7 & a_6 = a_8 & a_1 = a_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow a_1 = a_5 = a_9 = a_2, a_3 = -a_8 = -a_6, a_4 = -a_7,$$

得到 $A_1 = a_1, A_3 = a_3, A_4 = a_4$.

II $a_1a_2a_3 = 1, a_3a_4a_5^{-1} = 1 \Rightarrow a_3a_4 = a_1, a_1a_6a_4^{-1} = 1 \Rightarrow a_1a_3^{-1}a_4^{-1} = 1$, 有

$$\pi_1(M) = \{a_3, a_4 | a_4^2a_3^3 = 1\}.$$

其余情形见表 4:

表 4: ①④对折, ③⑥对折, ⑤②对折

	总数	非流形	Z	Z_3	关系
一、$(123) \sim (534)$, ③⑥, ⑤②	21	18	0	3	0
二、$(123) \sim (345)$, ③⑥, ⑤②	15	13	0	0	2
三、$(123) \sim (453)$, ③⑥, ⑤②	10	10	0	0	0
四、$(123) \sim (435)$, ③⑥, ⑤②	6	5	1	0	0
五、$(123) \sim (354)$, ③⑥, ⑤②	3	3	0	0	0
六、$(123) \sim (543)$, ③⑥, ⑤②	1	1	0	0	0
总计	56	50	1	3	2

- 折法五、①③对折, ④⑥对折, ⑤②对折

例 5 ①②折 $(123)\sim(431)$, ③④折 $(524)\sim(345)$, ⑤⑥折 $(523)\sim(214)$,

$$\begin{array}{llll} (123)\sim(431) & a_1=-a_5 & a_2=a_3 & a_3=a_4 \\ (524)\sim(345) & a_7=a_5 & a_6=a_9 & a_9=-a_8 \qquad \dim 0=1,\quad \dim 1=3 \\ (523)\sim(214) & a_7=-a_1 & a_2=a_4 & a_8=-a_6 \qquad \dim 2=3,\quad \dim 3=1 \end{array}$$

1+3=3+1 复合形 M 是流形.

以下求 M 的基本群:

I 取 1 做闭道的起点, 做到 2,3,4 的辅助道路 a_1, a_3^{-1}, a_4,

$$\left.\begin{array}{lll} a_1=-a_5 & a_2=a_3 & a_3=a_4 \\ a_7=a_5 & a_6=a_9 & a_9=-a_8 \\ a_7=-a_1 & a_2=a_4 & a_8=-a_6 \end{array}\right\} \Longrightarrow a_1=-a_5=-a_7, a_2=a_3=a_4, a_6=a_9=-a_8,$$

得到 $A_1=a_1, A_2=a_2, A_6=a_6$.

II $a_1a_2a_3=1 \Rightarrow a_1a_2^2=1, a_7a_6a_9=1 \Rightarrow a_1=a_6^2, a_7a_2a_8=1 \Rightarrow a_2=a_1a_6$, 有

$$\pi_1(M)=Z_8.$$

其余情形见表 5:

表 5: ①③对折, ④⑥对折, ⑤②对折

	总数	非流形	1	Z_2	Z_5	Z_7	Z_8
一、$(123)\sim(143)$, ④⑥, ⑤②	30	20	8	2	0	0	0
二、$(123)\sim(431)$, ④⑥, ⑤②	24	22	0	0	0	1	1
三、$(123)\sim(314)$, ④⑥, ⑤②	18	17	0	0	1	0	0
四、$(123)\sim(134)$, ④⑥, ⑤②	12	12	0	0	0	0	0
五、$(123)\sim(413)$, ④⑥, ⑤②	6	6	0	0	0	0	0
总计	90	77	8	2	1	1	1

总之, 将本节所得各结论综合, 棱形六面体经过两两面叠合后, 在同胚的意义下, 总计 476 种叠法中, 可以得到为数不多的几种情形, 其基本群包括 $1, Z, Z_2, Z_3, Z_5, Z_7, Z_8$ 以及只能用关系表示的群, 详细的结果见表 6:

表 6: 棱形六面体的两两面叠合

	总数	非流形	1	Z	Z_2	Z_3	Z_5	Z_7	Z_8	关系
情形一	35	23	8	0	0	4	0	0	0	0
情形二	180	163	9	0	6	0	0	0	0	2
情形三	115	96	13	3	0	2	0	0	0	1
情形四	56	50	0	1	0	3	0	0	0	2
情形五	90	77	8	0	2	0	1	1	1	0
总计	476	409	38	4	8	9	1	1	1	5

注 在只能用关系表示基本群的五类情形中, 其中有两类基本群为 $\pi_1(M)=\{a,b|a^2b=1\}$, 一类基本群为 $\pi_1(M)=\{a,b|ab^3=1\}$, 一类基本群为 $\pi_1(M)=\{a,b|a^2b^2=1\}$, 还有一类基本群为 $\pi_1(M)=\{a,b|a^2b^3=1\}$.

参 考 文 献

[1] 干丹岩. 代数拓扑和微分拓扑简史 [M]. 长沙: 湖南教育出版社, 2004.

[2] Scott P. The classification of compact 3-manifolds[A]. Thickstun T L. Low dimentional topology[C]. London: Cambridge University Press, 1982: 3–8.

[3] William Jaco. 0-efficient triangultions of 3-manifolds[J]. Journal of Differential Geometry , 2003, 65: 61–168.

[4] Seifert H, Threfall W. 拓扑学 (江泽涵译)[M]. 北京: 人民教育出版社, 1954.

[5] William Jaco. Introduction to the homeomorphism Problem[J/OL]. http: //www.math.okstate.edu/jaco, 2005.

[6] 王建军. 四面体的两两面叠合 [J]. 吉林师范大学学报 (自然科学版), 2013, 34(2): 131–134.

THE IDENTIFICATION OF HEXAHEDRON BY SIDES AND SIDES

WANG Jian-jun

(*School of Mathematics Science, Huaibei Normal University, Huaibei 235000, China*)

Abstract: In this paper, we study the bodies which obtained from the hexahedron by sides and sides in detail. By using the methods of manifold's judgement and fundamental group's calculation, after amount of computation, we can obtain 476 bodies, but 409 of them are not manifold. And when they are manifold, their fundamental groups will include $1, Z, Z_2, Z_3, Z_5, Z_7, Z_8$ and 5 cases which only be indicated by relationship.

Keywords: 3-manifold; fundamental group; the identification of hexahedron

2010 MR Subject Classification: 55M99