

全纯 $\mathcal{A}_\mu$ 空间中 K - 泛函和光滑模的等价性

陈英伟, 王占京, 王志军
(河北经贸大学数统学院, 河北 石家庄 050061)

摘要: 本文研究了 $\mathbb{C}^n$ 中星型圆形域 D 上的全纯 $\mathcal{A}_\mu$ 空间中两个逼近工具光滑模与 K-泛函的关系问题, 通过得到 $\mathcal{A}_\mu$ 空间中的 Bernstein 不等式, 获得了利用径向导数定义新的 K-泛函与光滑模与 K-泛函的等价性以及 Marchaud 不等式, 推广了实函数空间中的结果.

关键词: $\mathcal{A}_\mu$ 空间; K-泛函; 光滑模; Bernstein 不等式

MR(2010) 主题分类号: 41A17; 32A36

中图分类号: O174.41

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2015)06-1431-07

1 引言

令 D 为 $\mathbb{C}^n$ 上的圆型域, 即对任 $z \in D$ 和 $\theta \in \mathbb{R}$, 均有 $e^{i\theta}z \in D$. D 为星形域, 即对任 $z \in D$ 和 $|\lambda| < 1$, 均有 $\lambda z \in D$. 设 $\mathcal{X}$ 为 D 上具有旋转不变的半模 $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ 的空间, 对任 $f \in \mathcal{X}$, $\delta > 0$, $r \in \mathbb{N}$, f 的 r 阶光滑模定义为

$$\omega_r(\delta, f, \mathcal{X}) := \sup_{0 < h \leq \delta} \|\Delta_h^r f(z)\|_{\mathcal{X}} = \sup_{0 < h \leq \delta} \left\| \vec{\Delta}_h^r f(z) \right\|_{\mathcal{X}}, \quad (1.1)$$

这里中心差分 Δ_h^r 与向前差分 $\vec{\Delta}_h^r$ 为

$$\Delta_h^r f(z) = \vec{\Delta}_h^r f(z e^{-\frac{\pi}{2} h i}) = \Delta_h(\Delta_h^{r-1} f(z)) = \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} f(e^{i(\frac{\pi}{2}-j)h} z).$$

$H(D)$ 表示 D 上全纯函数全体. 易知对任 $f \in H(D)$, 都存在齐次多项式展开^[1]

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(z), \quad (1.2)$$

其中 $F_j(z)$ 为 j 次齐次多项式且级数在 D 上紧收敛. f 在 z 点的 α 阶径向导数^[2] 为

$$\mathcal{R}^\alpha f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} j^\alpha F_j(z), \quad \alpha \geq 0.$$

在 $\mathbb{C}^n$ 中的星型圆形域 D 上引入 f 的径向导数定义新的 $\alpha \in \mathbb{R}^+$ 阶 K - 泛函

$$K_\alpha(f, t^\alpha; \mathcal{X}) := \inf_{\mathcal{R}^\alpha g \in \mathcal{X}} \{ \|f - g\|_{\mathcal{X}} + t^\alpha \|\mathcal{R}^\alpha g\|_{\mathcal{X}} \}, \quad (1.3)$$

*收稿日期: 2013-04-27

接收日期: 2014-02-25

基金项目: 国家自然科学基金(11126246); 河北省教育厅科研基金(QN20131027); 河北经贸大学校内科研基金(2013KYQ07); 河北省自然科学基金(A2015207007).

作者简介: 陈英伟(1976-), 男, 河北鸡泽, 副教授, 主要研究方向: 多复分析与逼近论.

其中 $f \in \mathcal{X}$.

在逼近论中, 光滑模是研究函数中心逼近正逆定理的基本工具, 而在很多逼近问题中, K - 泛函^[3]起到很重要作用, 它们都表示函数的一些本质的逼近特性. 故研究 K - 泛函和光滑模相互关系成为函数逼近论的主要问题之一.

Ditzian 等获得了在 $L_p([-\pi, \pi])$ 空间中光滑模和 K - 泛函的等价性^[4]:

定理 A 对 $f \in L_p([-\pi, \pi])$, $0 < p \leq \infty$, 有

$$\omega_r(f, t)_p \simeq K_r(f, t^r) := \inf_{T \in \mathcal{T}_n=[1/t]} (\|f - T\|_p + n^{-r} \|T^r\|_p),$$

其中 $\mathcal{T}_n$ 为 n 次三角多项式全体.

其后等价性推广至实球面调和函数空间上^[5,6], 分别采用球面 Beltrami-Laplace 算子和微分 - 差分算子 (即 Dunkl 算子) 来定义 K - 泛函和光滑模, 更多亦可参看著作 [7]. 本文主要目的是研究在多复变星形圆型域 D 上新的 Hardy 型空间上的相应结果.

设 $f \in H(D)$, Hardy 型函数空间 $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_{\mu,p}(D)$ 定义为满足

$$\|f\|_{\mathcal{A}_\mu} := \sup_{a \in \Gamma} \left\{ \int_D |f(z)|^p d\mu_a(z) \right\}^{1/p} < \infty, \quad 0 < p < \infty$$

的函数的全体, 其中 Γ 为任意指标集, $\{\mu_a\}_{a \in \Gamma}$ 为一族非负 σ - 有限 Borel 测度, 其具有旋转不变性且使全体多项式包含于 $\mathcal{A}_\mu$.

全纯 $\mathcal{A}_\mu$ 空间包含了著名的 Hardy 空间和 Bergman 空间^[8]. 为看清这一点, 考虑在单位多圆柱 U^n 上, 取 $d\mu_a(rz') \equiv \chi_{r\partial U^n}(z) d\sigma(z')$, $a = r \in (0, 1)$ 时, $\mathcal{A}_{\mu,p}(D)$ 就为 Hardy 空间 $H^p(U^n)$; 取 $d\mu_a(z) \equiv dV(z)$ 时, $\mathcal{A}_{\mu,p}(D)$ 就为 Bergman 空间 $L_a^p(U^n)$, 这里 $d\sigma(z')$ 和 $dV(z)$ 分别表示 ∂U^n 和 U^n 上的 Lebesgue 测度.

研究 $\mathcal{A}_\mu$ 空间上逼近性质也展示了广义 Fock 空间 $A_m^p(\mathbb{C}^n, |z|^m)$ 上的逼近结果. 的确, 广义 Fock 空间 $A_m^p := A_m^p(\mathbb{C}^n, |z|^m)$ 也为 $\mathcal{A}_\mu$ 空间一特例: 即取 $D = \mathbb{C}^n$ 和 $d\mu_a(z) = e^{-|z|^m} dV(z)$, 其中 $m > 0$, $dV(z)$ 为 $\mathbb{C}^n$ 上 Lebesgue 测度.

本文首先得到 $\mathcal{A}_\mu$ 空间上的 Bernstein 不等式, 进而获得 K - 泛函与光滑模的等价性, 最后得到了 K - 泛函的 Marchaud 不等式. 这也显示了 Hardy 空间和 Bergman 空间及 Fock 空间上的逼近性质, 即使是在单复变空间上也是崭新结果.

本文中, C 表示与 k 和 z 无关的正常数, 不同的地方值可能不同.

2 K - 泛函与光滑模的等价性

引理 2.1^[9,10] 设 $T_k(\theta)$ 为任次数至多为 k 的三角多项式. 则对 $0 < p < \infty$, 有

$$\int_0^{2\pi} |T_k'(\theta)|^p d\theta \leq k^p \int_0^{2\pi} |T_k(\theta)|^p d\theta.$$

进而我们得到重要的 Bernstein 不等式.

引理 2.2 设 $P_k(z)$ 为关于 $z \in D$ 的任次数至多为 k 的多项式. 则

$$\|\mathcal{R}P_k(z)\|_{\mathcal{A}_\mu} \leq k \|P_k(z)\|_{\mathcal{A}_\mu}.$$

证 由测度的旋转不变性可得

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}P_k(z)\|_{\mathcal{A}_\mu}^p &= \sup_{a \in \Gamma} \int_D |\mathcal{R}P_k(ze^{i\theta})|^p d\mu_a(ze^{i\theta}) \\ &= \sup_{a \in \Gamma} \int_D |\mathcal{R}P_k(ze^{i\theta})|^p d\mu_a(z). \end{aligned}$$

易知

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}P_k(z)\|_{\mathcal{A}_\mu}^p &= \sup_{a \in \Gamma} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_D |\mathcal{R}P_k(ze^{i\theta})|^p d\mu_a(z) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \sup_{a \in \Gamma} \int_D \int_0^{2\pi} |\mathcal{R}P_k(ze^{i\theta})|^p d\theta d\mu_a(z). \end{aligned} \quad (2.1)$$

记 $g_z(\theta) = P_k(ze^{i\theta})$. 注意到 $g_z(\theta)$ 为关于 θ 的次数至多为 k 的三角多项式, 以及

$$i\mathcal{R}P_k(ze^{i\theta}) = \frac{\partial}{\partial \theta}(P_k(ze^{i\theta})) = g'_z(\theta). \quad (2.2)$$

由 (2.1), (2.2) 式和引理 2.1, 可得

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}P_k(z)\|_{\mathcal{A}_\mu}^p &= \frac{1}{2\pi} \sup_{a \in \Gamma} \int_D \int_0^{2\pi} |g'_z(\theta)|^p d\theta d\mu_a(z) \\ &\leq \frac{k^p}{2\pi} \sup_{a \in \Gamma} \int_D \int_0^{2\pi} |g_z(\theta)|^p d\theta d\mu_a(z) \\ &\leq \frac{k^p}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sup_{a \in \Gamma} \int_D |P_k(ze^{i\theta})|^p d\mu_a(z) d\theta \\ &= k^p \|P_k(z)\|_{\mathcal{A}_\mu}^p. \end{aligned}$$

引理得证.

引理 2.3 ^[11] 若 $g(z) \in H^p(U)$, $0 < p < 1$ 和 $r \in \mathbb{N}$, 则

$$\int_0^{2\pi} |\vec{\Delta}_{h,\theta}^r g(e^{i\theta})|^p d\theta \leq Ch^{rp} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial^r}{\partial \theta^r} (g(e^{i\theta})) \right|^p d\theta,$$

其中 $\vec{\Delta}_{h,\theta}^r g(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} g(e^{i(\theta+jh)})$ 和 C 为仅依赖 p, r 的常数.

引理 2.4 设 $f(z) \in \mathcal{A}_\mu$, $r \in \mathbb{N}$, 则 $\omega_r(t, f, \mathcal{A}_\mu) \leq Ct^r \|\mathcal{R}^r f(z)\|_{\mathcal{A}_\mu}$.

证 对 p 分情况讨论.

(i) 当 $p \geq 1$ 时, 可得

$$\begin{aligned} \Delta_h^r f(z) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cdots \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial^r}{\partial \theta_r \cdots \partial \theta_1} (f(ze^{i(\theta_1+\cdots+\theta_r)})) d\theta_1 \cdots d\theta_r \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cdots \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} i^r \mathcal{R}^r f(ze^{i(\theta_1+\cdots+\theta_r)}) d\theta_1 \cdots d\theta_r. \end{aligned}$$

所以由 Minkowski 不等式, 有

$$\begin{aligned}\|\Delta_h^r f(z)\|_{\mathcal{A}_\mu} &= \sup_{a \in \Gamma} \left(\int_D \left| \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cdots \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} i^r \mathcal{R}^r f(ze^{i(\theta_1 + \cdots + \theta_r)}) d\theta_1 \cdots d\theta_r \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \cdots \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\sup_{a \in \Gamma} \int_D |\mathcal{R}^r f(ze^{i(\theta_1 + \cdots + \theta_r)})|^p \right)^{\frac{1}{p}} d\theta_1 \cdots d\theta_r \\ &= h^r \|\mathcal{R}^r f(z)\|_{\mathcal{A}_\mu}.\end{aligned}$$

(ii) 当 $0 < p < 1$ 时. 同理于 (2.1) 式证明, 可得

$$\|\Delta_h^r f(z)\|_{\mathcal{A}_\mu}^p = \|\vec{\Delta}_h^r f(z)\|_{\mathcal{A}_\mu}^p = \frac{1}{2\pi} \sup_{a \in \Gamma} \int_D \int_0^{2\pi} |\vec{\Delta}_h^r f(ze^{i\theta})|^p d\theta d\mu_a(z). \quad (2.3)$$

令 $g_z(e^{i\theta}) = f(ze^{i\theta})$. 易知

$$\vec{\Delta}_h^r f(ze^{i\theta}) = \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} f(ze^{i(\theta+jh)}) = \vec{\Delta}_{h,\theta}^r g_z(e^{i\theta}).$$

利用 (2.3) 式, 引理 2.1 和 (2.2) 式, 得

$$\begin{aligned}\|\Delta_h^r f(z)\|_{\mathcal{A}_\mu}^p &= \frac{1}{2\pi} \sup_{a \in \Gamma} \int_D \int_0^{2\pi} |\vec{\Delta}_{h,\theta}^r g_z(e^{i\theta})|^p d\theta d\mu_a(z) \\ &\leq C \frac{1}{2\pi} \sup_{a \in \Gamma} \int_D h^{rp} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial^r}{\partial \theta^r} (g_z(e^{i\theta})) \right|^p d\theta d\mu_a(z) \\ &= Ch^{rp} \frac{1}{2\pi} \sup_{a \in \Gamma} \int_D \int_0^{2\pi} |\mathcal{R}^r f(ze^{i\theta})|^p d\theta d\mu_a(z) \\ &\leq Ch^{rp} \|\mathcal{R}^r f(z)\|_{\mathcal{A}_\mu}^p.\end{aligned}$$

综合 (i) 和 (ii), 得

$$\|\Delta_h^r f(z)\|_{\mathcal{A}_\mu} \leq Ch^r \|\mathcal{R}^r f(z)\|_{\mathcal{A}_\mu}.$$

对上式两端取 $\sup_{0 < h \leq t}$, 引理得证.

定理 2.5 设 $f \in \mathcal{A}_\mu$, $0 < p < \infty$, $0 < t \leq 1$, $r \in \mathbb{N}$. 则 $\omega_r(t, f, \mathcal{A}_\mu) \simeq K(f, t^r; \mathcal{A}_\mu)$.

证 任取 $g \in H(D)$ 且满足 $\mathcal{R}^r g \in \mathcal{A}_\mu$, 由引理 2.4 可知

$$\begin{aligned}\omega_r(t, f, \mathcal{A}_\mu) &\leq C(\omega_r(t, f - g, \mathcal{A}_\mu) + \omega_r(t, g, \mathcal{A}_\mu)) \\ &\leq C\{\|f - g\|_{\mathcal{A}_\mu} + t^r \|\mathcal{R}^r g\|_{\mathcal{A}_\mu}\}.\end{aligned}$$

故 $\omega_r(t, f, \mathcal{A}_\mu) \leq CK(t^r, f, \mathcal{A}_\mu)$.

接下来证 $K(t^r, f, \mathcal{A}_\mu) \leq C\omega_r(t, f, \mathcal{A}_\mu)$.

取 $k = [\frac{1}{t}]$, 即 $k \leq \frac{1}{t} < k+1$. 由 Jackson 定理^[8], 易知存在并可构造出具体 k 次多项式 $P_k(z)$, 有 $\|f(z) - P_k(z)\|_{\mathcal{A}_\mu} \leq C\omega_r(k^{-1}, f, \mathcal{A}_\mu)$.

直接计算, 易得中心差分的性质^[12]:

$$\begin{aligned}\Delta_h^r x^k &= 0, \quad k < r; \\ \Delta_h^r x^r &= r!h^r; \\ \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^j \left(\frac{r}{2} - j\right)^{r+2l-1} &= 0, \quad \forall l \in \mathbb{N}; \\ \Delta_h^l f(x_0) &= h^l f^{(l)}(\xi),\end{aligned}$$

其中 $\min(x_0 - \frac{lh}{2}, \dots, x_0 + \frac{lh}{2}) < \xi < \max(x_0 - \frac{lh}{2}, \dots, x_0 + \frac{lh}{2})$.

记 $P_{k,r\zeta}(e^{i\theta}) = P_k(z) = P_k(r\zeta e^{i\theta})$, 其中 $z = r\zeta e^{i\theta}$, $\zeta \in \partial D$. $P_{k,r\zeta}(e^{i\theta})$ 可看作关于 θ 的 k 次三角多项式. 由 Taylor 展开及上述中心差分性质可得

$$\begin{aligned}\Delta_h^r P_k(z) &= \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^j P_k(z e^{i(\frac{r}{2}-j)h}) \\ &= \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^j P_{k,r\zeta}(e^{i(\theta+(\frac{r}{2}-j)h)}) \\ &= \sum_{l=r}^{\infty} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^j \left(\frac{r}{2} - j\right)^l \frac{h^l}{l!} \frac{\partial^l}{\partial \theta^l} (P_{k,r\zeta}(e^{i\theta})) \\ &= h^r i^r \mathcal{R}^r P_k(z) + \sum_{l=r+1}^{\infty} \eta(r, l)^{l-r} \frac{h^l}{(l-r)!} i^l \mathcal{R}^l P_k(z),\end{aligned}\quad (2.4)$$

其中 $-\frac{r}{2} < \eta(r, l) < \frac{r}{2}$ 和当 $l-r$ 为奇的非负整数时, $\eta(r, l) = 0$.

再由 Bernstein 不等式 (即引理 2.2) $\|\mathcal{R}P_k(z)\|_{\mathcal{A}_\mu} \leq k\|P_k(z)\|_{\mathcal{A}_\mu}$, 可知

$$\|\mathcal{R}^l P_k(z)\|_{\mathcal{A}_\mu} \leq k^{l-r} \|\mathcal{R}^r P_k(z)\|_{\mathcal{A}_\mu}. \quad (2.5)$$

取 $s = \min\{1, p\}$, 对于 $|h| < \frac{C}{k} \leq \frac{1}{k}$, 其中常数 $C = C(r, s)$ 与 k 无关. 故由 (2.4) 和 (2.5) 式得

$$\begin{aligned}& -\|\Delta_h^r P_k\|_{\mathcal{A}_\mu}^s + h^{rs} \|\mathcal{R}^r P_k\|_{\mathcal{A}_\mu}^s \leq \|\Delta_h^r P_k - h^r i^r \mathcal{R}^r P_k\|_{\mathcal{A}_\mu}^s \\ & \leq h^{rs} \|\mathcal{R}^r P_k\|_{\mathcal{A}_\mu}^s \sum_{l=1}^{\infty} \frac{h^{(r+2l)s} k^{2s}}{((2l)!)^s} \leq \frac{1}{2} h^{rs} \|\mathcal{R}^r P_k\|_{\mathcal{A}_\mu}^s.\end{aligned}\quad (2.6)$$

故对 $t \leq \frac{1}{k}$, 可得

$$\begin{aligned}\omega_r^s(t, P_k, \mathcal{A}_\mu) &\leq \omega_r^s(t, P_k - f, \mathcal{A}_\mu) + \omega_r^s(t, f, \mathcal{A}_\mu) \\ &\leq 2^{rs} \|P_k - f\|_{\mathcal{A}_\mu}^s + \omega_r^s\left(\frac{1}{k}, f, \mathcal{A}_\mu\right) \leq C(p, r) \omega_r^s\left(\frac{1}{k}, f, \mathcal{A}_\mu\right).\end{aligned}$$

由 (2.6) 式可得

$$h^{rs} \|\mathcal{R}^r P_k\|_{\mathcal{A}_\mu}^s \leq 2 \|\Delta_h^r P_k\|_{\mathcal{A}_\mu}^s \leq 2C \omega_r^s\left(\frac{1}{k}, f, \mathcal{A}_\mu\right). \quad (2.7)$$

则通过 (2.7) 式及 Jackson 定理可推出

$$\begin{aligned} K(t^r, f, \mathcal{A}_\mu) &\leq \|f - P_k\|_{\mathcal{A}_\mu} + t^r \|\mathcal{R}^r P_k\|_{\mathcal{A}_\mu} \\ &\leq \|f - P_k\|_{\mathcal{A}_\mu} + k^{-r} \|\mathcal{R}^r P_k\|_{\mathcal{A}_\mu} \leq C(\omega_r(\frac{1}{k}, f, \mathcal{A}_\mu) + |h|^r \|\mathcal{R}^r P_k\|_{\mathcal{A}_\mu}) \\ &\leq C\omega_r(\frac{1}{k}, f, \mathcal{A}_\mu) \leq C\omega_r(t, f, \mathcal{A}_\mu). \end{aligned}$$

故 $K(t^r, f, \mathcal{A}_\mu) \simeq \omega_r(t, f, \mathcal{A}_\mu)$.

3 Marchaud 型不等式

Riesz 型线性算子 $L_{k,r}f := \sum_{j=1}^r (-1)^{j+1} \binom{r}{j} R_{k,\alpha}^j f$, 其中 Riesz 算子

$$R_{k,\alpha}(f, z) := \sum_{j=0}^k \left(1 - \left(\frac{j}{k}\right)^\alpha\right) F_j(z), \quad \alpha > 0. \quad (3.1)$$

定理 3.1 对任 $f \in \mathcal{A}_\mu$, 有

$$K(f, t^{r\alpha}; \mathcal{A}_\mu) \leq Ct^{r\alpha} \left(\int_t^1 \frac{K(f, u^{(r+1)\alpha}; \mathcal{A}_\mu)}{u^{r\alpha+1}} du \right).$$

证 记 $j = [1/t]$, $0 < t < 1$. 则

$$\begin{aligned} K(f, t^{r\alpha}; \mathcal{A}_\mu) &\leq \|f - L_{j,r+1}f\|_{\mathcal{A}_\mu} + t^{r\alpha} \|\mathcal{R}^\alpha(L_{j,r+1}f)\|_{\mathcal{A}_\mu} \\ &\leq CK(f, j^{-\alpha(r+1)}; \mathcal{A}_\mu) + t^{r\alpha} \|\mathcal{R}^\alpha(L_{j,r+1}f)\|_{\mathcal{A}_\mu}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

取 k 满足 $2^k \leq j < 2^{k+1}$. 令

$$L_{j,r+1}f = L_{j,r+1}f - L_{2^k,r+1}f + \sum_{l=1}^k (L_{2^l,r+1}f - L_{2^{l-1},r+1}f) + L_{1,r+1}f.$$

易得 $L_{1,r+1}f = C$, 和 $\mathcal{R}^\alpha(L_{1,r+1}f) = 0$ 及

$$\|L_{2^l,r+1}f - L_{2^{l-1},r+1}f\|_{\mathcal{A}_\mu} \leq CK(f, 2^{-\alpha(r+1)(l-1)}; \mathcal{A}_\mu).$$

再由 Bernstein 不等式 (即引理 2.2), (3.2) 式可得

$$\begin{aligned} K(f, t^{r\alpha}; \mathcal{A}_\mu) &\leq CK(f, j^{-\alpha(r+1)}; \mathcal{A}_\mu) + t^{r\alpha} \sum_{l=0}^{k-1} C2^{\alpha l r} K(f, 2^{-\alpha(r+1)l}; \mathcal{A}_\mu) \\ &\quad + Ct^{r\alpha} j^{r\alpha} K(f, 2^{-\alpha(r+1)k}; \mathcal{A}_\mu). \end{aligned}$$

最后利用 $K(f, u; \mathcal{A}_\mu)$ 和 u^α 的单调性, 可得所需结果.

因 Fock 空间 A_m^p 为 $\mathcal{A}_\mu$ 空间特例, 故由定理 2.5 和定理 3.1, 易知

推论 3.2 对任 $f \in A_m^p$ 和 $r, k \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, 有

$$\begin{aligned} \omega_r(t, f, A_m^p) &\simeq K(f, t^r; A_m^p); \\ K(f, t^{r\alpha}; A_m^p) &\leq Ct^{r\alpha} \left(\int_t^1 \frac{K(f, u^{(r+1)\alpha}; A_m^p)}{u^{r\alpha+1}} du \right). \end{aligned}$$

参 考 文 献

- [1] 史济怀. 多复变函数论基础 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1996.
- [2] Zhu K H. Spaces of holomorphic functions in the unit ball[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2004.
- [3] Peetre J. A theory of interpolation of normed spaces[M]. Rio de Janerio: Inst. de Math. Pura Appl., 1968.
- [4] Ditzian Z, Hristov V H, Ivanov K G. Moduli of smoothness and K-Functionals in L_p , $0 < p < 1$ [J]. Constr. Approx., 1995, 11(1): 67–83.
- [5] Rustamov Kh P. Equivalence of K-functional and moduli of smoothness of functions of on the sphere[J]. Mathematical Notes, 1992, 52(3): 965–970.
- [6] Belkina E S, Platonov S S. Equivalence of K-Functionals and modulus of smoothness constructed by generalized Dunkl translations[J]. Russian Mathematics, 2008, 52(8): 1–11.
- [7] Dai F, Xu Y. Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls[M]. New York: Springer-Verlag, 2013.
- [8] 陈英伟, 王志军, 刘玉军. Hardy 型空间 $\mathcal{A}_\mu$ 中的 Jackson 定理 [J]. 河北师范大学学报 (自然科学版), 2013, 37(2): 113–118.
- [9] Arestov V V. On integral inequalities for trigonometric polynomials and their derivatives[J]. Math. USSR Izv., 1982, 18(1): 1–17.
- [10] Devore R A, Lorentz G G. Construction approximation[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [11] Storozhenko È A. Approximation of functions of class H_p , $0 < p \leq 1$ [J]. Math. USSR Sb., 1978, 34(4): 527–545.
- [12] 徐利治, 王仁宏, 周蕴时. 函数逼近的理论与方法 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1983.

EQUIVALENCE OF K-FUNCTIONAL AND MODULUS OF SMOOTHNESS IN HOLOMORPHIC $\mathcal{A}_\mu$ SPACES

CHEN Ying-wei, WANG Zhan-jing, WANG Zhi-jun

(College of Mathematics and Statistics, Hebei University of Economics and Business,
Shijiazhuang 050061, China)

Abstract: In this paper, we study the relation between K-functional and modulus of smoothness in $\mathcal{A}_\mu$ spaces on starlike circular domain of $\mathbb{C}^n$ and get Bernstein inequality. A kind of K-functional is introduced by the radial derivative to obtain the equivalence of K-functional and the moduli of smoothness and Marchaud inequation, which extend the previous results.

Keywords: $\mathcal{A}_\mu$ space; K-functional; modulus of smoothness; Bernstein inequality in real function spaces.

2010 MR Subject Classification: 41A17; 32A36