Vol. 35 (2015)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

ω - 非常凸空间与 ω - 非常光滑空间

曾朝英 [1], 苏雅拉图 [2]
(1. 集宁师范学院数学系, 内蒙古 乌兰察布 012000)
(2. 内蒙古师范大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特 010022)

摘 要: 本文研究了 ω - 非常凸空间和 ω - 非常光滑空间的问题. 利用局部自反原理和切片证明了 ω - 非常凸空间和 ω - 非常光滑空间的对偶关系, 讨论了 ω - 非常凸空间和 ω - 非常光滑空间与其它凸性和光滑性的关系, 给出了 ω - 非常凸空间与 ω - 非常光滑空间的若干特征刻画, 所得结果完善了关于 Banach 空间凸性与光滑性理论的研究.

关键词: ω - 非常凸; ω - 非常光滑; 切片
MR(2010) **主题分类号**: 46B10; 46B20 **中图分类号**: O177.2
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2015)06-1424-07

1 引言

2000 年, 方习年在文献 [1] 中引入了 ω - 强凸空间的概念, 并得到了 ω - 强凸空间、k - 强凸空间和 (H) 性质之间的关系, 但未给出其对偶概念, 也未给出用切片刻画的特征. 文献 [2] 注意到了文献 [1] 的不足之处, 引入了 ω - 强光滑空间的概念, 证明了 ω - 强凸性与 ω - 强光滑性具有对偶性质, 并讨论了 ω - 强光滑性与其它光滑性之间的关系, 用切片统一刻画了 ω - 强凸空间与 ω - 强光滑空间的特征. 本文在文献 [1–2] 的基础上, 给出了 ω - 非常凸空间和 ω - 非常光滑空间的概念. 以局部自反原理为工具, 证明了 ω - 非常凸空间和 ω - 非常光滑空间的对偶关系, 并给出了它们的特征刻画. 此外, 用切片统一刻画了 ω - 非常凸空间与 ω- 非常光滑空间的特征.

本文中, X 表示 Banach 空间, X^* 表示 X 的共轭空间. X 和 X^* 的单位球面分别用 $S\equiv S(X)=\{x:\ x\in X,\|x\|=1\}$ 和 $S^*\equiv S(X^*)$ 表示, 单位球分别用 $U(X)=\{x:\ x\in X,\|x\|\le 1\}$ 和 $U(X^*)$ 表示. 以 $\mathrm{Span}\{x_1,x_2,\cdots,x_l\}$ 表示 X 中 l 个元 $x_1,x_2,\cdots,x_l$ 所生成的子空间; $\forall x\in S$, 记 $\sum(x)=\{x^*:\ x^*\in S^*,\ x^*(x)=\|x\|\}$; $\forall x^*\in S^*$, 记

$$A_{x^*}=\{x:\ x\in S,\ x^*(x)=\|x\|\};$$

对 $x\in S,\ \delta>0$, 用 $F^*(x,\delta)$ 表示切片

$$F^*(x,\delta)=\{x^*:\ x^*\in S^*,\ x^*(x)\ge 1-\delta\};$$

*收稿日期: 2013-04-21 **接收日期**: 2013-05-30
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11061022); 内蒙古自然科学基金资助项目 (2012MS1022); 内蒙古师范大学人才培养基金资助项目 (RCPY-2-2012-K-034).

作者简介: 曾朝英 (1964 –), 女, 内蒙古乌兰察布市察右前旗, 教授, 主要研究方向: Banach 空间几何理论.

对 $x^* \in S^*$, $\delta > 0$, 用 $F(x^*, \delta)$ 表示切片 $F(x^*, \delta) = \{x:\ x \in S,\ x^*(x) \geq 1 - \delta\}$.

2 定义及引理

定义 2.1 称 $x_0 \in S$ 是 X 的 ω - 非常 (强) 凸点, 若 $\forall\, x^* \in \sum(x_0), \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, 使得 $\forall k \in$N$, \lim x^*(x_0 + x_{n_1} + \cdots + x_{n_k}) = k + 1\ \ (n_1, \cdots, n_k \to \infty)$ 成立, 则 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是相对弱 (相对) 紧集. 若 $\forall\, x_0 \in S$ 都是 X 的 ω - 非常 (强) 凸点, 则称 X 是 ω - 非常 (强) 凸空间.

定义 2.2 称 $x \in S$ 是 X 的 ω - 非常 (强) 光滑点, 若 $\forall\, x_0^* \in \sum(x)(\forall\, x_0^* \in S^*,\ x \in A_{x_0^*})$, $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, 使得 $\forall k \in$N$, \lim(x_0^* + x_{n_1}^* + \cdots + x_{n_k}^*)(x) = k + 1\ \ (n_1, \cdots, n_k \to \infty)$ 成立, 则 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 是相对弱 (相对) 紧集. 若 $\forall\, x \in S$ 都是 X 的 ω - 非常 (强) 光滑点, 则称 X 是 ω - 非常 (强) 光滑空间.

显然, ω - 强凸蕴含 ω - 非常凸, ω - 强光滑蕴含 ω - 非常光滑.

定义 2.3 [3] 称 X 为近非常凸 (近强凸) 的, 如果 $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, 及某个 $x^* \in \sum(x)$, 当 $x^*(x_n) \to 1 (n \to \infty)$ 时, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是相对弱紧 (相对紧).

定义 2.4 [4] 称 X 具有 $WS(S)$ 性质, 如果 $\forall\, x \in S$, $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset S^*$, 当 $x_n^*(x) \to 1 (n \to \infty)$ 时, $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 是相对弱紧 (相对紧).

由文献 [5] 中引理 2 易得

引理 2.1 若 $f_1, f_2, \cdots, f_k \in S^*$, $\varphi \in S^{**}$ 且

$$d(\varphi(f_l), \varphi\,(\mathrm{Span}\{f_1, \cdots, f_{l-1}\})) \geq \epsilon,\ l = 1, 2, \cdots, k,$$

则

$$d(\varphi(f_l),\ \varphi(\mathrm{Span}\{f_i\},\ i \neq l)) \geq \frac{2\epsilon^k}{2^k},\ l = 1, \cdots, k.$$

引理 2.2 若 C 是 X 的弱紧子集, 使得 $\forall f \in S^*$, $\epsilon > 0$ 及一切自然数 n 有 $d(f(x_n), f(C)) < \epsilon$, 则存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $|f(x_{n_k}) - f(x_{n_l})| < 2\epsilon$.

证 据 $d(f(x_n), f(C)) < \epsilon$, 有 $\{y_n\} \subset C$, 使 $|f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon$. 由 C 弱紧, $\{y_n\}$ 有弱收敛子列 $\{y_{n_k}\}$, 不失一般性可设对, k, l, $|f(y_{n_k}) - f(y_{n_l})| < \epsilon$, 由此易知

$$|f(x_{n_k}) - f(x_{n_l})| < 2\epsilon.$$

引理 2.3 [3] X 为近非常凸当且仅当 $\sum(x^*) = \hat{A}_{x^*}$.

引理 2.4 [8] (局部自反原理) 设 X_0^* 和 X_0^{**} 分别是 X^* 和 X^{**} 的有限维子空间, 则对任何 $\epsilon \in (0,1)$, 存在 – 有界线性算子 $T : X_0^{**} \to X^*$, 使

(i) $(1-\epsilon)\,\|F\| \leq \|T(F)\| \leq (1+\epsilon)\,\|F\|\,; F \in X_0^{**}$;

(ii) $f(T(F)) = F(f); f \in X_0^*, F \in X_0^{**}$;

(iii) $T(\hat{x}) = x, x \in X \bigcap X_0^{**}$.

3 主要结果

定理 3.1 若 X^* 是 ω - 非常凸的, 则 X 是 ω - 非常光滑的.

证 设 $x_0^* \in S^*, x \in A_{x_0^*}, \{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset S^*$ 且 $\forall k \in$N,

$$\lim(x_0^* + x_{n_1}^* + \cdots + x_{n_k}^*)(x) = k + 1\ \ (n_1, n_2, \cdots, n_k \to \infty).$$

把 x 看成 S^{**} 中的元, 则 $\forall k\in$N, $\lim x(x_0^*+x_{n_1}^*+\cdots+x_{n_k}^*)=k+1\ \ (n_1,n_2,\cdots,n_k\to\infty)$ 成立, 并且由 $x\in A_{x_0^*}$ 知, $x\in\sum(x_0^*)$. 再由 X^* 是 ω - 非常凸的假设知, $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 是相对弱紧集, 这说明 X 是 ω - 非常光滑的.

定理 3.2 X^* 是 ω - 非常光滑的当且仅当 X 是 ω - 非常凸且自反.

证 必要性. 设 $\forall x_0\in S, x^*\in\sum(x_0)$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S$, 且对 $\forall k\in$N,

$$\lim x^*(x_0+x_{n_1}+\cdots+x_{n_k})=k+1\ \ (n_1,n_2,\cdots,n_k\to\infty).$$

把 $x_0,x_n(n=1,\cdots,\infty)$ 看成 S^{**} 中的元, 则由 $x^*\in\sum(x_0)$ 知, $x^*(x_0)=1$, 从而 $x_0(x^*)=1$, 故 $x^*\in A_{x_0}$, 且 $\forall k\in$N, $\lim(x_0+x_{n_1}+\cdots+x_{n_k})(x^*)=k+1,(n_1,n_2,\cdots,n_k\to\infty)$ 成立. 再由 X^* 是 ω - 非常光滑的假设知, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是相对弱紧集，这说明 X 是 ω - 非常凸的.

设 $\forall x_0\in S$, $x^*\in\sum(x_0)$, 则存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S$, 使 $x^*(x_n)\to 1$, 把 $x_0,x_n(n=1,\cdots,\infty)$ 看成 S^{**} 中的元, 则由 $x^*\in\sum(x_0)$ 和 $x^*(x_n)\to 1$ 知, $x^*\in A_{x_0}, x_n(x^*)\to 1$, 所以 $\forall k\in$N, $\lim(x_0+x_{n_1}+\cdots+x_{n_k})(x^*)=k+1\ \ (n_1,n_2,\cdots,n_k\to\infty)$ 成立. 再由 X^* 是 ω- 非常光滑的假设知, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是相对弱紧集, 于是存在子列 $\{x_{n_j}\}\subset\{x_n\}$, 使 $\{x_{n_j}\}$ 弱收敛于 x^{**}, 其中 $x^{**}\in S^{**}, x^{**}(x^*)=1$, 由 Mazur 定理知 $J_X(X)$ 是弱闭的, 于是存在 $x_0\in S$, 使 $\hat{x_0}=x^{**}$, 因此 $x^*(x_0)=x^{**}(x^*)=1=\|x^*\|$, 由 James 定理知, X 是自反的.

充分性. 由假设条件和定理 3.1 立即得到.

与定理 3.2 类似地易证下面

定理 3.3 (1) 若 X^* 是近非常凸的, 则 X 具有 WS 性质;

(2) X^* 具有性质 (WS) 当且仅当 X 是近非常凸且自反.

定理 3.4 (1) 若 X 是 ω - 非常凸的, 则 X 是近非常凸的.

(2) 若 X 是 ω - 非常光滑的, 则 X 是近非常光滑的.

证 (1) 如果 $\forall x,\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S$, 及某个 $x^*\in\sum(x)$, 有 $x^*(x_n)\to 1(n\to\infty)$, 则必有 $\lim x^*(x+x_{n_1}+\cdots+x_{n_k})=k+1\ \ (n_1,n_2,\cdots,n_k\to\infty)$, 于是由 X 的 ω - 非常凸性知 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是相对弱紧的, 这说明 X 是近非常凸的.

(2) 设 $\forall\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}\subset S, x\in S$, 于是由 Hahn-Banach 定理知, 存在 $x_0^*\in S^*$, 使 $x_0^*(x)=\|x\|=1$, 故 $x\in A_{x_0^*}$. 因此, 当 $x_n^*(x)\to 1$ 时, $\forall k\in N$, 有

$$\lim(x_0^*+x_{n_1}^*+\cdots+x_{n_k}^*)(x)=k+1\ \ (n_1,n_2,\cdots,n_k\to\infty),$$

由 X 的 ω - 非常光滑性知 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 是相对弱紧的, 这说明 X 是近非常光滑的.

定理 3.5 设 X 是自反空间, 则 ω - 非常凸空间当且仅当近非常凸.

证 定理 3.4(1) 中已证必要性, 故下面只证充分性. 如果 $\forall x_0\in S, x^*\in\sum(x_0),\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S$, 且 $\forall k\in N$, $\lim x^*(x_0+x_{n_1}+\cdots+x_{n_k})=k+1\ \ (n_1,n_2,\cdots,n_k\to\infty)$. 因 X 自反的, 所以有子列 $\{x_{n_j}\}$ 弱收敛于 y, 故 $x^*(y)=1, y\in S$, 即 $\{x_n\}$ 为相对弱紧集, 进而 X 是 ω - 非常凸的.

由定理 3.2–3.5 得

推论 3.1 若 X^* 是 ω - 非常光滑的, 则 X 是近非常凸且自反.

推论 3.2 X^* 是 ω - 非常光滑的当且仅当 X^* 具有 (WS) 性质.

定理 3.6 X 是 ω - 非常光滑的当且仅当 $\forall x^*\in S^*$ 及 $\epsilon>0, x\in A_{x^*}$, 存在 $\delta=\delta(x^*,\epsilon)>0$ 及紧集 $C^*\subset X^*$, 使得 $\forall\varphi\in S^{**}$, 有 $F^*(x,\delta)\subset\{y:\ y\in X^*, d(\varphi(y),\varphi(C^*))<\epsilon\}$.

证 必要性. 若存在 $x_0^* \in S^*$ 及 $\epsilon_0 > 0, x_0 \in A_{x_0^*}$, 对 $\forall n \in$N 及任意紧集 $C^* \subset X^*$, 存在 $\phi_0 \in S^{**}$, 使 $F^*(x_0, \frac{1}{n})$ 不包含在 $\{y: \ y \in X^*, d(\phi_0(y), \phi_0(C^*)) < \epsilon_0\}$ 中 . 由 $x_0 \in A_{x_0^*}$ 知, $x_0^* \in F^*(x_0, \frac{1}{n})$. 记 $C_1^n = \{y: \ y \in$Span$\{x_0^*\}; \|y\| \le 3\}$, 则 C_1^n 是紧集, 因而 $F^*(x_0, \frac{1}{n})$ 不包含在 $\{y: \ y \in X^*, d(\phi_0(y), \phi_0(C_1^n)) < \epsilon_0\}$ 中, 故可取 $x_1^* \in F^*(x_0, \frac{1}{n})$, 使

$$d(\phi_0(x_1^*),\ \phi_0(\text{Span}\{x_0^*\}) = d(\phi_0(x_1^*), \phi_0(C_1^n)) \ge \epsilon_0.$$

记 $C_2^n = \{y: \ y \in$Span$\{x_0^*, x_1^*\}; \|y\| \le 3\}$, 则 C_2^n 仍是紧集, 因而 $F^*(x_0, \frac{1}{n})$ 仍不包含在 $\{y: \ y \in X^*, d(\phi_0(y), \phi_0(C_2^n)) < \epsilon_0\}$ 中, 故可取 $x_2^* \in F^*(x_0, \frac{1}{n})$, 使

$$d(\phi_0(x_2^*),\ \phi_0(\text{Span}\{x_0^*, x_1^*\})) = d(\phi_0(x_2^*), \phi_0(C_2^n)) \ge \epsilon_0.$$

继续上述过程, 可取 $x_0^*, x_1^*, \cdots, x_{n-1}^* \in F^*(x_0, \frac{1}{n})$. 记

$$C_n^n = \{y: \ y \in \text{Span}\{x_0^*, x_1^*, \cdots, x_{n-1}^*\}; \|y\| \le 3\},$$

则 C_n^n 仍是紧集, 因而 $F^*(x_0, \frac{1}{n})$ 仍不包含在 $\{y: \ y \in X^*, d(\phi_0(y), \phi_0(C_n^n)) < \epsilon_0\}$ 中, 故可取 $x_n^* \in F^*(x_0, \frac{1}{n})$, 使

$$d(\phi_0(x_n^*),\ \phi_0(\text{Span}\{x_0^*, x_1^*, \cdots, x_{n-1}^*\})) = d(\phi_0(x_n^*), \phi_0(C_n^n)) \ge \epsilon_0 (\forall n \in \text{N}),$$

这表明 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 不是相对弱紧集.

另一方面, 由于 $x_n^* \in F^*(x_0, \frac{1}{n})$, 故 $x_n^*(x_0) \ge 1 - \frac{1}{n}$, 进而有 $x_n^*(x_0) \to 1, (n \to \infty)$, 于是对 $\forall k \in$N, $\{n_i\} \subset \{n\}, i = 1, \cdots, k, \lim(x_0^* + x_{n_1}^* + \cdots + x_{n_k}^*)(x_0) = k + 1 \ \ (n_1, \cdots, n_k \to \infty)$ 成立. 再由 X 是 ω - 非常光滑的假设知, $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 是相对弱紧集, 这与 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 不是相对弱紧集相矛盾.

充分性. 若 X 不是 ω - 非常光滑的, 则存在 $x_0^* \in S^*, x_0 \in A_{x_0^*}, \{x_n^*\}_{n=1}^\infty \subset S^*$ 且 $\forall k \in$N,

$$\lim(x_0^* + x_{n_1}^* + \cdots + x_{n_k}^*)(x_0) = k + 1 \ \ (n_1, \cdots, n_k \to \infty),$$

但 $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ 不是相对弱紧集. 由 $\lim(x_0^* + x_{n_1}^* + \cdots + x_{n_k}^*)(x_0) = k + 1 \ \ (n_1, \cdots, n_k \to \infty)$ 知, $\forall n \in$N, 存在 N$_1$, 当 $n_1, \cdots, n_k >$N$_1$ 时,

$$(x_0^* + x_{n_1}^* + \cdots + x_{n_k}^*)(x_0) > k + 1 - \frac{1}{2n},$$

从而 $x_{n_i}^*(x_0) > 1 - \frac{1}{2n} \ \ (i = 1, 2, \cdots, k)$. 由于 $x_0^* \in S^*, x_0 \in A_{x_0^*}$, 故对 $\epsilon = \frac{1}{2n}$, 存在 $\delta_1 = \delta_1(x_0^*, \frac{1}{2n}) > 0$ 及紧集 $C^* \subset X^*$, 使得 $\forall \phi \in S^{**}$ 有

$$F^*(x, \delta_1) \subset \{y: \ y \in X^*, d(\phi(y), \phi(C^*)) < \frac{1}{2n}\}.$$

令 $\delta = \max\{\delta_1, \frac{1}{2n}\}$, 则 $x_{n_i}^*(x_0) \ge 1 - \delta, (i = 1, 2, \cdots, k)$ 且 $F^*(x_0, \delta) \subset F^*(x_0, \delta_1)$, 因而 $F^*(x_0, \delta) \subset \{y: \ y \in X^*, d(\phi(y), \phi(C^*)) < \frac{1}{2n}\}$, 于是

$$\{x_{n_1}^*\}, \{x_{n_2}^*\}, \cdots, \{x_{n_k}^*\} \subset F^*(x_0, \delta) \subset \{y: \ y \in X^*, d(\phi(y), \phi(C^*)) < \frac{1}{2n}\},$$

由引理 2.2, 存在子序列 $\{x^*_{n'_k}\}\subset\{x^*_{n_k}\}$, 使 $\left|\phi(x^*_{n'_k})-\phi(x^*_{n'_j})\right|<2\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}$, 由 $n\in$N 的任意性, 采用对角线法可得 $\{x^*_{n_k}\}$ 的弱收敛子列, 这导致 $\{x^*_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是相对弱紧集, 这与 $\{x^*_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是相对弱紧集相矛盾.

定理 3.7 X 是 ω - 非常凸的当且仅当 $\forall x\in S$ 及 $\epsilon>0, x^*\in\sum(x)$, 存在 $\delta=\delta(x,\epsilon)>0$ 及紧集 $C\subset X$, 使得 $\forall f\in S^*$, 有 $F(x^*,\delta)\subset\{y:\ y\in X, d(f(y),f(C))<\epsilon\}$.

证 必要性. 若存在 $x_0\in S$ 及 $\epsilon_0>0, x_0^*\in\sum(x_0)$, $\forall n\in$N 及任意紧集 $C\subset X$, 存在 $f_0\in S^*$, 使 $F(x_0^*,\frac{1}{n})$ 不包含在 $\{y:\ y\in X, d(f_0(y),f_0(C))<\epsilon_0\}$ 中, 由 $x_0^*\in\sum(x_0)$ 知, $x_0\in F(x_0^*,\frac{1}{n})$. 记 $C_1^n=\{y:\ y\in\text{Span}\{x_0\};\|y\|\le 3\}$, 则 C_1^n 是紧集, 因而 $F(x_0^*,\frac{1}{n})$ 不包含在 $\{y:\ y\in X, d(f_0(y),f_0(C_1^n))<\epsilon_0\}$ 中, 故可取 $x_1\in F(x_0^*,\frac{1}{n})$, 使

$$d(f_0(x_1),f_0(\text{Span}\{x_0\}))=d(f_0(x_1),f_0(C_1^n))\ge\epsilon_0.$$

记 $C_2^n=\{y:\ y\in\text{Span}\{x_0,x_1\};\|y\|\le 3\}$, 则 C_2^n 仍是紧集, 因而 $F(x_0^*,\frac{1}{n})$ 仍不包含在 $\{y:\ y\in X, d(f_0(y),f_0(C_2^n))<\epsilon_0\}$ 中, 故可取 $x_2\in F(x_0^*,\frac{1}{n})$, 使

$$d(f_0(x_2),f_0(\text{Span}\{x_0,x_1\}))=d(f_0(x_2),f_0(C_2^n))\ge\epsilon_0.$$

继续上述过程, 可取 $x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}\in F(x_0^*,\frac{1}{n})$, 记

$$C_n^n=\{y:\ y\in\text{Span}\{x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}\};\|y\|\le 3\},$$

则 C_n^n 仍是紧集, 因而 $F(x_0^*,\frac{1}{n})$ 仍不包含在 $\{y:\ y\in X, d(f_0(y),f_0(C_n^n))<\epsilon_0\}$, 故可取 $x_n\in F(x_0^*,\frac{1}{n})$, 使

$$d(f_0(x_n),f_0(\text{Span}\{x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}\}))=d(f_0(x_n),f_0(C_n^n))\ge\epsilon_0(\forall n\in\text{N}).$$

这表明 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是相对弱紧集.

另一方面, 由于 $x_n\in F(x_0^*,\frac{1}{n})$, 故 $x_0^*(x_n)\ge 1-\frac{1}{n}$, 进而有 $x_0^*(x_n)\to 1\ (n\to\infty)$, 于是 $\forall k\in$N, $\{n_i\}\subset\{n\}, i=1,\cdots,k, \lim x_0^*(x_0+x_{n_1}+\cdots+x_{n_k})=k+1\ (n_1,\cdots,n_k\to\infty)$ 成立, 再由 X 是 ω - 非常凸的假设知, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是相对弱紧集, 这与 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是相对弱紧集相矛盾.

充分性. 若 X 不是 ω - 非常凸的, 则存在 $x_0\in S, x_0^*\in\sum(x_0), \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S$ 且 $\forall k\in$N, $\lim x_0^*(x_0+x_{n_1}+\cdots+x_{n_k})=k+1\ (n_1,\cdots,n_k\to\infty)$, 但 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是相对弱紧集. 由 $\lim x_0^*(x_0+x_{n_1}+\cdots+x_{n_k})=k+1\ (n_1,\cdots,n_k\to\infty)$ 知, $\forall n\in$N, 存在 N_1, 当 $n_1,\cdots,n_k>\text{N}_1$ 时, $x_0^*(x_0+x_{n_1}+\cdots+x_{n_k})>k+1-\frac{1}{2n}$, 从而 $x_0^*(x_{n_i})>1-\frac{1}{2n}\ (i=1,2,\cdots,k)$. 由于 $x_0\in S, x_0^*\in\sum(x_0)$, 故对 $\epsilon=\frac{1}{2n}$, 存在 $\delta_1=\delta_1(x_0,\frac{1}{2n})>0$ 及紧集 $C\subset X$, 使得 $\forall f\in S^*$, 有

$$F(x_0^*,\delta_1)\subset\{y:\ y\in X, d(f(y),f(C))<\frac{1}{2n}\}.$$

令 $\delta=\max\{\delta_1,\frac{1}{2n}\}$, 则 $x_0^*(x_{n_i})\ge 1-\delta\ (i=1,2,\cdots,k)$ 且 $F(x_0^*,\delta)\subset F(x_0^*,\delta_1)$, 因而 $F(x_0^*,\delta)\subset\{y:\ y\in X, d(f(y),f(C))<\frac{1}{2n}\}$, 于是

$$\{x_{n_1}\},\{x_{n_2}\},\cdots,\{x_{n_k}\}\subset F(x_0^*,\delta)\subset\{y:\ y\in X, d(f(y),f(C))<\frac{1}{2n}\},$$

由引理 2.2, 存在子序列 $\{x_{n'_k}\}\subset\{x_{n_k}\}$, 使 $\left|f(x_{n'_k})-f(x_{n'_j})\right|<2\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}$, 由 $n\in N$ 的任意性, 采用对角线法可得 $\{x_{n_k}\}$ 的弱收敛子列, 这导致 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是相对弱紧集, 这与 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是相对弱紧集相矛盾.

根据局部自反原理, 可得到 ω - 非常凸空间和 ω - 非常光滑空间之间更深刻的对偶性质.

定理 3.8 (1) X 是 ω - 非常凸空间当且仅当 $\forall x\in S(X), x^*\in\sum(x)$ 是 X^* 的 ω - 非常光滑点;

(2) X 是 ω - 非常光滑空间当且仅当 $\forall x\in S(X), x^*\in\sum(x)$ 是 X^* 的 ω - 非常凸点.

证 (1) 充分性. 如果 $\forall x\in S, x^*\in\sum(x), \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S$, 使得 $\forall k\in N$, 有

$$\lim x^*(x+x_{n_1}+\cdots+x_{n_k})=k+1\ \ (n_1,n_2,\cdots,n_k\to\infty)$$

成立, 因 $x^*\in\sum(x)(\hat{x}\in A_{x^*})$ 是 X^* 的 ω - 非常光滑点, 把 x 和 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是看成 S^{**} 中的点列, 则 $\lim(x+x_{n_1}+\cdots+x_{n_k})(x^*)=k+1\ \ (n_1,n_2,\cdots,n_k\to\infty)$ 成立, 于是根据已知条件推出 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是相对弱紧的, 故 X 是 ω - 非常凸空间.

必要性. 若存在 $x_0\in S(X)$, 使 $x_0^*\in\sum(x_0)$ 不是 X^* 的 ω - 非常光滑点, 则存在 $x_0^{**}\in\sum(x_0^*)$ 和 $\{x_n^{**}\}_{n=1}^{\infty}\subset S^{**}$, 使

$$\lim(x_0^{**}+x_{n_1}^{**}+\cdots+x_{n_k}^{**})(x_0^*)=k+1\ \ (n_1,n_2,\cdots,n_k\to\infty)$$

成立, 但 $\{x_n^{**}\}_{n=1}^{\infty}$ 不是相对弱紧集, 从而 $\{x_n^{**}\}_{n=1}^{\infty}$ 的任何子列 $\{x_m^{**}\}_{m=1}^{\infty}$ 均不弱收敛, 故 $\forall y^{**}\in U(X^{**})$, $\{x_m^{**}\}_{m=1}^{\infty}$ 不弱收敛于 y^{**}. 因此, 存在 $\{y_m^*\}_{m=1}^{\infty}\subset S^*$, 使得 $\{x_m^{**}\}_{m=1}^{\infty}$ 不弱收敛于 y^{**} , 即存在 $\epsilon_0>0, \{y_m^*\}_{m=1}^{\infty}\subset S^*$, 使得

$$|x_m^{**}(y_m^*)-y^{**}(y_m^*)|\geq\epsilon_0. \tag{$\star$}$$

因 X 是 ω - 非常凸空间, 由定理 3.4 知 X 是近非常凸的, 再由引理 2.3 知 $\sum(x_0^*)=\hat{A}_{x_0^*}$, 因此存在 $x^0\in A_{x_0^*}$, 使得 $x^0=x_0^{**}$.

任取 $\{x_m^{**}\}_{m=1}^{\infty}$ 的 k 个子列 $\{x_{m_i(m)}^{**}\}_{m=1}^{\infty}, i=1,2,\cdots,k$, 其中 $m_i(m)$ 表示 $\{m_i\}$ 的第 m 项. 对每个 m , 令 $X_m^{**}=\mathrm{Span}\{x^0,x_m^{**},x_{m_1(m)}^{**},\cdots,x_{m_k(m)}^{**}\}, X_m^*=\mathrm{Span}\{x_0^*,y_m^*\}$, 由局部自反原理, 存在一个 – 有界线性算子 $T_m: X_m^{**}\to X$ 满足:

(i) $1-\frac{1}{m}\leq\|T_m(x_m^{**})\|\leq 1+\frac{1}{m}; 1-\frac{1}{m}\leq\left\|T_m(x_{m_i(m)}^{**})\right\|\leq 1+\frac{1}{m}\ \ (i=1,2,\cdots,k)$;

(ii) $x_0^*(T_m(x_m^{**}))=x_m^{**}(x_0^{**}); y_m^*(T_m(x_{m_i(m)}^{**}))=x_{m_i(m)}^{**}(y_m^*)\ \ (i=1,2,\cdots,k)$;

(iii) $T_m(x^0)=x^0$.

令 $x_m=\frac{T_m(x_m^{**})}{\|T_m(x_m^{**})\|}, x_{m_i(m)}=\frac{T_m(x_{m_i(m)}^{**})}{\left\|T_m(x_{m_i(m)}^{**})\right\|}(i=1,2,\cdots,k)$, 显然 $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}\subset S$ 且 $\{x_{m_i(m)}\}$ 是 $\{x_m\}$ 的子列, $i=1,2,\cdots,k$, 由 (ii) 得

$$x_0^*(x_{m_i(m)})=\frac{x_0^*(T_m(x_{m_i(m)}^{**}))}{\left\|T_m(x_{m_i(m)}^{**})\right\|}=\frac{x_{m_i(m)}^{**}(x_0^*)}{\left\|T_m(x_{m_i(m)}^{**})\right\|}(i=1,2,\cdots,k).$$

因此 $\lim x_0^*(x^0+x_{m_1(m)}+\cdots+x_{m_k(m)})=k+1\ \ (m_1,m_2,\cdots,m_k\to\infty)$. 已知 X 是 ω - 非常凸空间, 所以 $\{x_m\}$ 是相对弱紧集. 设 $\{x_{m_k}\}$ 是 $\{x_m\}$ 的收敛子列, 则 $\{x_{m_k}\}$ 弱收敛于某个 x. 在 ($\star$) 中取 $y^{**}=x$, 则由 ($\star$) 和 (ii) 得

$$\lim\left|y_{m_k}^*(x_{m_k})-y_{m_k}^*(x)\right|=\lim\left|y_{m_k}^{**}(y_{m_k}^*)-x(y_{m_k}^*)\right|\geq\epsilon_0,$$

这与 $\{x_{m_k}\}$ 弱收敛于 x 相矛盾.

与 (1) 对偶地易证 (2), 故证明从略.

与定理 3.8 类似地, 能够给出 ω - 强凸空间和 ω - 强光滑空间之间更深刻的对偶性质, 进而可推广文献 [2] 中给出对偶定理.

定理 3.9 (1) X 是 ω - 强凸空间当且仅当 $\forall x \in S(X), x^* \in \sum(x)$ 是 X^* 的 ω - 强光滑点;

(2) X 是 ω - 强光滑空间当且仅当 $\forall x \in S(X), x^* \in \sum(x)$ 是 X^* 的 ω - 强凸点.

参 考 文 献

[1] 方习年. 关于 Banach 空间 k 一致凸及 k 一致光滑性 [J]. 数学研究与评论, 2000, 20(4): 583–587.

[2] 乌日柴胡, 苏雅拉图. 关于 ω - 强凸空间的一点注记 [J]. 数学杂志, 2012, 32(1): 167–171.

[3] 王建华, 张子厚. (C-K) 性质的特征 [J]. 数学物理学报, 1997, 17(3): 280–284.

[4] Panda, B B, and Kapoor, O P. A generalization of local uniform convexity of the norm[J]. J. Math. Anal. Appl., 1975, 52: 300–308.

[5] 方习年. 关于一致凸与一致光滑性 [J]. 淮北煤师院学报, 1996, 2: 13–17.

[6] 郑喜印. 紧 - 凸性与紧光滑性 [J]. 数学进展, 1995, 24(4): 342–347.

[7] 方习年, 王建华. 切片与 Banach 空间的凸性、光滑性 [J]. 数学杂志, 1999, 19(3): 293–298.

[8] 张子厚, 刘瑞娟. 关于 (C-K) 性质和 L-kR 空间的对偶性质 [J]. 数学研究, 2005, 38(3): 292–297.

[9] Dean D W. The equation $L(E, X^{**}) = L(E, X)^{**}$ and the principle of local reflexivity[J]. Proc Amer Math Soc., 1973, 40: 146–148.

[10] 冼军, 黎永锦. k 非常凸空间 [J]. 数学研究与评论, 2004, 24(3): 483–492.

[11] 苏雅拉图, 李广利. 关于 k 极凸空间的几点注记 [J]. 数学杂志, 2011, 31(1): 181–190.

[12] 苏雅拉图, 吴从炘. k 一致凸空间与 k 一致光滑空间 [J]. 科学通报, 1997, 42(23): 2490–2494.

ω-VERY CONVEX SPACES AND ω-VERY SMOOTH SPACES

ZENG Chao-ying[1], SUYA La-tu[2]

(*1. Department of Math., Jining Normal College, Wulanchabu 012000, China*)

(*2.College of Math. Science, Inner Mongolia Normal University, Huhhot 010022, China*)

Abstract: In this article, we study the problems of about ω-very convex spaces and ω-very smooth spaces. Using the local reflexive principle and the slice of unit sphere, we show that the ω-very convex spaces and ω-very smooth spaces are dual notions and study the relation between ω-very convexity, ω-very smoothness with various convexity and smoothness, and give some characteristic descriptions of ω-very smoothness and ω-very convexity . These results perfect the research on convexity and smoothness about Banach spaces.

Keywords: ω-very convexity; ω-very smoothness; slice

2010 MR Subject Classification: 46B10; 46B20