

线性微分方程亚纯解的 Julia 集的径向分布

孙桂荣, 黄志刚

(苏州科技学院数理学院, 江苏 苏州 215009)

摘 要: 本文研究了线性微分方程 $f^{(n)} + A_{n-1}f^{(n-1)} + \cdots + A_1f' + A_0f = 0$ 亚纯解的动力学性质, 其中 $n \geq 2, A_i(z) (i = 0, 1, \cdots, n-1)$ 是具有有限下级的亚纯函数. 利用亚纯函数的 Nevanlinna 值分布理论, 获得了一定条件下方程亚纯解的 Julia 集的径向分布的下界, 推广了相关文献的结果.

关键词: 微分方程; 亚纯解; Julia 集; 径向分布

MR(2010) 主题分类号: 30D35; 34M10; 37F10

中图分类号: O174.52

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2015)06-1393-07

1 引言

文中我们采用值分布论及复动力系统标准中的符号详见文献 [1-5]. 用 $\sigma(f)$ 和 $\mu(f)$ 分别表示 $f(z)$ 的增长级和下级, 另外, f 在点 a 的亏量定义为

$$\delta(a, f) = \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{m(r, \frac{1}{f-a})}{T(r, f)} = 1 - \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{N(r, \frac{1}{f-a})}{T(r, f)}.$$

如果 $a = \infty$, 则用 $m(r, f), N(r, f)$ 分别替代 $m(r, \frac{1}{f-a})$ 和 $N(r, \frac{1}{f-a})$. 如果 $\delta(a, f) > 0$, 则称 a 为 $f(z)$ 的亏值.

假设 f 是亚纯函数, $f^n, n \in \mathbb{N}$ 表示 f 的第 n 次迭代, 即 $f^1 = f, \cdots, f^n = f \circ (f^{n-1})$. 集合

$$F(f) = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : \{f^n\} \text{ 在 } z \text{ 的某个邻域内有定义且正规}\}$$

称为 f 的 Fatou 集, 而 $J(f) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus F(f)$ 则称为 f 的 Julia 集. 显然 $F(f)$ 是开集, $J(f)$ 是非空闭集.

设 $0 < \alpha < \beta < 2\pi$, 记 $\Omega(\alpha, \beta) = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \arg z < \beta\}$. 给定 $\theta \in [0, 2\pi)$, 如果对任意 $\epsilon > 0$, 集合 $\Omega(\theta - \epsilon, \theta + \epsilon) \cap J(f)$ 都是无界的, 则称 $\arg z = \theta$ 是 $J(f)$ 的径向分布. 定义

$$\Delta(f) = \{\theta \in [0, 2\pi) : \arg z = \theta \text{ 是 } J(f) \text{ 的径向分布}\}.$$

显然 $\Delta(f)$ 是闭集且可测, 用 $\text{mes}\Delta(f)$ 表示 $\Delta(f)$ 的线性测度. Baker 在文 [6] 中首先指出: 如果 f 是超越整函数, 则 $J(f)$ 不可能位于有限多条从原点出发的射线上. 当 $f(z)$ 是下级小于无穷的超越整函数时, 乔建永 [7] 进一步地证明了: 如果 $\mu(f) < \frac{1}{2}$, 则 $\text{mes}\Delta(f) = 2\pi$; 如果

*收稿日期: 2014-08-06

接收日期: 2014-10-28

基金项目: 国家自然科学基金 (11001057); 苏州科技学院科研基金项目 (XKQ201405).

作者简介: 孙桂荣 (1975-), 女, 江苏溧阳, 讲师, 主要研究方向: 复分析.

$\mu(f) \geq \frac{1}{2}$, 则 $\text{mes}\Delta(f) \geq \frac{\pi}{\mu(f)}$. 郑建华等人^[8]考虑了当 f 是亚纯函数的情形, 在一定条件下得到了 $\Delta(f)$ 测度的下界. 自然的问题是: 如果函数的下级是无穷, 其 Julia 集的径向分布是怎样的情况? 黄志刚、王珺^[9]得到了一类具有无穷下级的整函数的 Julia 集的径向分布, 他们考虑方程

$$f^{(n)} + A_{n-1}f^{(n-1)} + \cdots + A_1f' + A_0f = 0 \quad (1.1)$$

的整函数解, 得到

定理 A 假设 $A_i(z) (i = 0, 1, \cdots, n-1)$ 是下级 $\mu(A_i) < \infty$ 的整函数, 其中 A_0 是超越的且当 $r \rightarrow \infty$ 时, $m(r, A_i) = o(m(r, A_0)) (i = 1, 2, \cdots, n-1)$. 则方程 (1.1) 的每一个非平凡解 f 都满足 $\text{mes}\Delta(f) \geq \min \left\{ 2\pi, \frac{\pi}{\mu(A_0)} \right\}$.

可知在定理 A 的条件下, 方程的每个非平凡解都具有无穷下级. 本文继续讨论上述问题, 考虑一类具有无穷下级的亚纯函数的 Julia 集的径向分布. 事实上, 我们得到

定理 1.1 假设 $A_i(z) (i = 0, 1, \cdots, n-1)$ 是下级为无穷的亚纯函数, 其中 A_0 是超越的且以 ∞ 为亏值, 即 $\delta(\infty, A_0) > 0$, 且当 $r \rightarrow \infty$ 时 $m(r, A_i) = o(m(r, A_0)) (i = 1, 2, \cdots, n-1)$. 如果 $f(z) (\neq 0)$ 是方程 (1.1) 的亚纯解, 且 $J(f)$ 有一个无界分支, 则 $\text{mes}\Delta(f) \geq \min \left\{ 2\pi, \frac{4}{\mu(A_0)} \arcsin \sqrt{\frac{\delta(\infty, A_0)}{2}} \right\}$.

推论 1.1 假设 $A_i(z) (i = 0, 1, \cdots, n-1)$ 是满足 $\sigma(A_i) < \mu(A_0) < \infty (i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 的亚纯函数, 且 $\delta(\infty, A_0) > 0$. 如果 $f(z) (\neq 0)$ 是方程 (1.1) 的亚纯解, 且 $J(f)$ 有一个无界分支, 则

$$\text{mes}\Delta(f) \geq \min \left\{ 2\pi, \frac{4}{\mu(A_0)} \arcsin \sqrt{\frac{\delta(\infty, A_0)}{2}} \right\}.$$

注 因为 A_0 是超越亚纯函数且以无穷为亏值, 所以 $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, A_0)}{\log r} = \infty$. 由对数导数引理及方程 (1.1) 可得

$$m(r, A_0) \leq \sum_{i=1}^n m(r, \frac{f^{(i)}}{f}) + \sum_{i=1}^{n-1} m(r, A_i) + o(1) = O(\log T(r, f) + \log r) + o(m(r, A_0)).$$

至多除去一个线性测度为有限的集合, 由此可见方程 (1.1) 的每一个亚纯解的下级都为无穷.

定理 1.2 假设 $A_i(z) (i = 0, 1, \cdots, n-1)$ 是有限级的亚纯函数, 且 $\delta(\infty, A_0) > 0, \sigma(A_i) < \sigma(A_0) (i = 1, 2, \cdots, n-1)$. 则存在闭区间 $I \subset [0, 2\pi)$, 使得对方程 (1.1) 的任意非零亚纯解 f , 只要 $J(f)$ 有一个无界分支, 都有 $I \subset \Delta(f)$ 且 $\text{mes}I \geq \min \left\{ 2\pi, \frac{\pi}{\sigma(A_0)} \right\}$.

2 预备知识

首先介绍两个集合的概念.

假设 $B(z_n, r_n)$ 是复平面上以 z_n 为中心, r_n 为半径的开圆盘. 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = +\infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ 有限, 则称 $\bigcup_{n=1}^{\infty} B(z_n, r_n)$ 是一个 R - 集 (见文 [10]). 显然, 集合 $\{r = |z| : z \in$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} B(z_n, r_n)$ 是有限测度集.

如果一个开集在 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 至少有三个边界点, 则称这个开集为双曲集. 假设 W 是 $\mathbb{C}$ 中的一个双曲开集, 对任意 $a \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus W$, 定义 $C_W(a) = \inf_{z \in W} \{\lambda_W(z)|z-a|\}$, 其中 $\lambda_W(z)$ 表示 W 上的双曲度量. 如果 W 的每一个分支都是单连通的, 则 $C_W(a) \geq \frac{1}{2}$.

接下来我们再回顾一下角域上 Nevanlinna 特征函数的一些概念 (见文 [11, 12]). 为简单起见, 我们用 $\overline{\Omega}(\alpha, \beta)$ 表示 $\Omega(\alpha, \beta)$ 的闭包, 并记

$$\Omega(r, \alpha, \beta) = \{z | z \in \Omega(\alpha, \beta), |z| < r\}, \quad \Omega^*(r, \alpha, \beta) = \{z | z \in \Omega(\alpha, \beta), |z| \geq r\}.$$

假设 $g(z)$ 是角域 $\overline{\Omega}(\alpha, \beta)$ 上的亚纯函数, 其中 $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$, $\omega = \frac{\pi}{\beta - \alpha}$. 定义

$$\begin{aligned} A_{\alpha, \beta}(r, g) &= \frac{\omega}{\pi} \int_1^r \left(\frac{1}{t^\omega} - \frac{t^\omega}{r^{2\omega}} \right) \{ \log^+ |g(te^{i\alpha})| + \log^+ |g(te^{i\beta})| \} \frac{dt}{t}, \\ B_{\alpha, \beta}(r, g) &= \frac{2\omega}{\pi r^\omega} \int_\alpha^\beta \log^+ |g(re^{i\theta})| \sin \omega(\theta - \alpha) d\theta, \\ C_{\alpha, \beta}(r, g) &= 2 \sum_{1 < |b_n| < r} \left(\frac{1}{|b_n|^\omega} - \frac{|b_n|^\omega}{r^{2\omega}} \right) \sin \omega(\beta_n - \alpha), \\ S_{\alpha, \beta}(r, g) &= A_{\alpha, \beta}(r, g) + B_{\alpha, \beta}(r, g) + C_{\alpha, \beta}(r, g), \end{aligned}$$

其中 $b_n = |b_n|e^{i\beta_n}$ 是 $g(z)$ 在 $\overline{\Omega}(\alpha, \beta)$ 中的极点 (计算重数). $S_{\alpha, \beta}(r, g)$ 称为 $g(z)$ 在角域 $\Omega(\alpha, \beta)$ 中的 Nevanlinna 特征函数, $C_{\alpha, \beta}(r, g)$ 称为 $g(z)$ 在角域 $\Omega(\alpha, \beta)$ 上极点的计数函数 (重级极点按重数计). 此时函数 $g(z)$ 在角域 $\Omega(\alpha, \beta)$ 上的级定义为

$$\sigma_{\alpha, \beta}(g) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log S_{\alpha, \beta}(r, g)}{\log r}.$$

引理 2.1 ^[12] 设 $f(z) (\neq 0)$ 是下级 $\mu(f) < \infty$ 的超越亚纯函数, 且 $0 < \lambda(f) \leq \infty$. 则对任意正数 σ ($\mu(f) \leq \sigma \leq \lambda(f)$) 及任意有限测度集 H , 存在序列 $\{r_n\}$, 使得

- (i) $r_n \notin H$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{n} = \infty$;
- (ii) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log T(r_n, f)}{\log r_n} \geq \sigma$;
- (iii) $T(r, f) < (1 + o(1))(2r/r_n)^\sigma T(r_n/2, f)$, $r \in [r_n/n, nr_n]$;
- (iv) $t^{-(\sigma - \epsilon_n)} T(t, f) \leq 2^{\sigma+1} r_n^{-(\sigma - \epsilon_n)} T(r_n, f)$, $1 \leq t \leq nr_n$, $\epsilon_n = (\log n)^{-2}$.

注意到引理 2.1 中的 r_n 是不属于 H 的级为 σ 的 Pólya 极限点序列.

引理 2.2 ^[13] 假设 $f(z)$ 是 $\sigma(f) > 0, \mu(f) < \infty$ 的超越亚纯函数, 且以 $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ 为亏值, 则对任意级为 σ ($\sigma > 0, \mu(f) \leq \sigma \leq \lambda(f)$) 的 Pólya 极限点序列 $\{r_n\}$ 和任意正函数 $\gamma(r) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$) 有

$$\liminf_{r_n \rightarrow \infty} \text{mes} D_\gamma(r_n, a) \geq \min \left\{ 2\pi, \frac{4}{\sigma} \arcsin \sqrt{\frac{\delta(a, f)}{2}} \right\},$$

其中

$$D_\gamma(r, a) = \{\theta \in [-\pi, \pi) : \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} > \gamma(r)T(r, f)\}, a \in \mathbb{C};$$

$$D_\gamma(r, \infty) = \{\theta \in [-\pi, \pi) : \log^+ |f(re^{i\theta})| > \gamma(r)T(r, f)\}.$$

引理 2.3 ^[8] 假设 $f(z)$ 在角域 $\Omega^*(r_0, \theta_1, \theta_2)$ 内解析, U 是双曲区域, $f: \Omega^* \rightarrow U$. 如果存在点 $a \in \partial U \setminus \{\infty\}$ 使得 $C_U(a) > 0$. 则存在常数 $d > 0$ 使得对充分小的 $\epsilon > 0$, 有

$$|f(z)| = O(|z|^d), z \rightarrow \infty, z \in \Omega^*(r_0, \theta_1 + \epsilon, \theta_2 - \epsilon).$$

引理 2.4 ^[14] 假设 $z = re^{i\psi}$, $r > r_0 + 1, \alpha \leq \psi \leq \beta, 0 < \beta - \alpha \leq 2\pi, n(\geq 2)$ 为整数, $g(z)$ 在角域 $\Omega(r_0, \alpha, \beta)$ 上解析且 $\sigma_{\alpha, \beta}(g) \leq \infty$. 取 $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$, 则对任意 $\epsilon_j \in (0, \frac{\beta_j - \alpha_j}{2}) (j = 1, 2, \dots, n-1)$, 至多除去一个零线性测度集外, 存在仅依赖于 $g, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}$ 和 $\Omega(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1})$ 而与 z 无关的正数 $K > 0$ 及 $M > 0$, 使得

$$\left| \frac{g'(z)}{g(z)} \right| \leq Kr^M (\sin k(\psi - \alpha))^{-2},$$

$$\left| \frac{g^{(n)}(z)}{g(z)} \right| \leq Kr^M \left(\sin k(\psi - \alpha) \prod_{j=1}^{n-1} \sin k_{\epsilon_j}(\psi - \alpha_j) \right)^{-2}.$$

对所有 $z \in \Omega(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1})$ 除去一个 R -集 D 外成立. 其中 $\alpha_j = \alpha + \sum_{s=1}^{j-1} \epsilon_s, \beta_j = \beta - \sum_{s=1}^{j-1} \epsilon_s, j = 2, 3, \dots, n-1, k = \frac{\pi}{\beta - \alpha}, k_{\epsilon_j} = \frac{\pi}{\beta_j - \alpha_j} (j = 1, 2, \dots, n-1)$.

引理 2.5 ^[15] 如果 $g(z)$ 是级为 $\sigma(g) (0 < \sigma(g) < \infty)$ 的整函数, 则存在角域 $\Omega(\theta_1, \theta_2) \left(\theta_2 - \theta_1 \geq \min \left(2\pi, \frac{\pi}{\sigma(g)} \right) \right)$, 使得对任意 $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$, 都有

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \log^+ |g(re^{i\theta})|}{\log r} = \sigma(g).$$

3 定理证明

定理 1.1 证明 记 $\tau = \min \left\{ 2\pi, \frac{4}{\mu(A_0)} \arcsin \sqrt{\frac{\delta(\infty, A_0)}{2}} \right\}$, 往证 $\text{mes} \Delta(f) \geq \tau$. 反证, 如果 $\text{mes} \Delta(f) < \tau$, 则 $\zeta = \tau - \text{mes} \Delta(f) > 0$. 因为 $\Delta(f)$ 是一个闭集, 所以 $S = 2\pi \setminus \Delta(f)$ 是开集, 且 S 至多由可数多个开区间构成. 选择区间 $I_k = (\alpha_k, \beta_k) (k = 1, 2, \dots, m)$ 使得 $I_k \subset S$ 且 $\text{mes} \left(S \setminus \bigcup_{k=1}^m I_k \right) < \frac{\zeta}{4}$.

应用引理 2.1 于 A_0 , 取 $\sigma = \mu(A_0)$, 则有级为 $\mu(A_0)$ 的 Pólya 极限点列 $\{r_j\}, r_j \notin \{|z| : z \in H\}$. 因为 A_0 是亚纯函数且 $\delta(\infty, A_0) > 0$, 由引理 2.2, 对 Pólya 极限点列 $\{r_j\}$ 有

$$\liminf_{r_j \rightarrow \infty} \text{mes}(D_\gamma(r_j, \infty)) \geq \tau,$$

其中函数 $\gamma(r)$ 定义为

$$\gamma(r) = \max \left\{ \sqrt{\frac{\log r}{m(r, A_0)}}, \sqrt{\frac{m(r, A_i)}{m(r, A_0)}}, i = 1, 2, \dots, n-1 \right\},$$

由定理 1.1 条件知, $\gamma(r) > 0$ 且 $\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma(r) = 0$. 于是, 对充分大的 j 有 $\text{mes}(D_\gamma(r_j, \infty)) > \tau - \frac{\zeta}{4}$. 为方便起见, 下面记 $D_\gamma(r_j, \infty)$ 为 $D(r_j)$, 则

$$\text{mes}(D(r_j) \cap S) = \text{mes}(D(r_j) \setminus (\Delta(f) \cap D(r_j))) \geq \text{mes}(D(r_j)) - \text{mes}(\Delta(f)) > \frac{3\zeta}{4} > 0.$$

于是对每个 j 有

$$\text{mes}\left(\left(\bigcup_{k=1}^m I_k\right) \cap D(r_j)\right) = \text{mes}(S \cap D(r_j)) - \text{mes}\left(\left(S \setminus \bigcup_{k=1}^m I_k\right) \cap D(r_j)\right) \geq \frac{3\zeta}{4} - \frac{\zeta}{4} = \frac{\zeta}{2}.$$

从而存在开区间 $I = (\alpha, \beta) \subset \bigcup_{k=1}^m I_k \subset S$ 使得对无穷多个 j 都有

$$\text{mes}(D(r_j) \cap (\alpha, \beta)) > \frac{\zeta}{2m} > 0. \quad (3.1)$$

不失一般性, 假设 (3.1) 式对所有的 j 都成立, 由 $D(r_j)$ 的定义和 (3.1) 式可得

$$\begin{aligned} \int_{F_j} \log^+ |A_0(r_j e^{i\theta})| d\theta &\geq (\text{mes}(D(r_j) \cap (\alpha, \beta)) - 4\epsilon) \gamma(r_j) m(r_j, A_0) \\ &\geq \frac{\zeta}{4m} \gamma(r_j) m(r_j, A_0), \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中 $F_j = D(r_j) \cap (\alpha + 2\epsilon, \beta - 2\epsilon)$, $0 < \epsilon < \min\{\zeta/16m, (\beta_k - \alpha_k)/8, k = 1, 2, \dots, m\}$.

另一方面, 对于角域 $\Omega(\alpha_k, \beta_k)$, 当 r 充分大时有

$$(\alpha_k, \beta_k) \cap \Delta(f) = \emptyset, \quad \Omega^*(r, \alpha_k, \beta_k) \cap J(f) = \emptyset.$$

这就意味着对每个 $k = 1, 2, \dots, m$, 存在相应的数 r_k 及 $F(f)$ 的无界 Fatou 分支 U_k 使得

$$\Omega^*(r_k, \alpha_k, \beta_k) \subset U_k.$$

故 f 在 $\Omega^*(r_k, \alpha_k, \beta_k)$ 中没有极点, 也不取 $J(f)$ 中的值, 于是我们可以选取 ∂U_k 的一个无界连通分支 Γ_k , 使得映射 $f: \Omega^*(r_k, \alpha_k, \beta_k) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Gamma_k$ 是解析的, 从而对任意 $a \in \Gamma_k \setminus \{\infty\}$, 有 $C_{\mathbb{C} \setminus \Gamma_k}(a) \geq \frac{1}{2}$. 在每个 $\Omega^*(r_k, \alpha_k, \beta_k)$ 上应用引理 2.3 于 f 得存在常数 $d > 0$, 使得当

$z \in \bigcup_{k=1}^m \Omega^*(r_k, \alpha_k + \epsilon, \beta_k - \epsilon)$ 时, 有 $|f(z)| = O(|z|^d)$, $|z| \rightarrow \infty$.

由 $S_{\alpha, \beta}(r, f)$ 的定义可得 $S_{\alpha_k + \epsilon, \beta_k - \epsilon}(r, f) = O(1)$ ($k = 1, 2, \dots, m$). 于是由引理 2.4, 存在两个正数 M 和 K , 使得至多除去一个 R -集 H 外对所有 $z \in \bigcup_{k=1}^m \Omega(\alpha_k + 2\epsilon, \beta_k - 2\epsilon)$ 有

$$\left| \frac{f^{(s)}(z)}{f(z)} \right| \leq K r^M \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (3.3)$$

联合方程 (1.1) 和 (3.3) 式可得

$$\begin{aligned} \int_{F_j} \log^+ |A_0(r_j e^{i\theta})| d\theta &\leq \int_{F_j} \left(\sum_{s=1}^n \log^+ \left| \frac{f^{(s)}(r e^{i\theta})}{f(r e^{i\theta})} \right| + \sum_{k=1}^{n-1} \log^+ |A_k(r e^{i\theta})| \right) d\theta + O(1) \\ &= \int_{F_j} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \log^+ |A_k(r e^{i\theta})| \right) d\theta + O(\log r_j) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} m(r_j, A_k) + O(\log r_j) \leq C_0 \gamma^2(r_j) m(r_j, A_0), \end{aligned}$$

其中 $C_0 > 0$.

比较 (3.2), (3.4) 两式有定理 1.1 得证. $\frac{\zeta}{4m} \gamma(r_j) m(r_j, A_0) \leq C_0 \gamma^2(r_j) m(r_j, A_0)$. 当 $j \rightarrow \infty$ 时, $\gamma(r_j) \rightarrow 0$, 这是一个矛盾.

定理 1.2 证明 假设 $A_0(z) = \frac{H(z)}{\Pi(z)}$, 其中 $H(z)$ 是超越整函数, $\Pi(z)$ 是 $A_0(z)$ 的极点的典型乘积, 则 $\sigma(H) = \sigma(A_0)$. 因为 $\delta(\infty, A_0) = 1 - \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{N(r, A_0)}{T(r, A_0)} > 0$, 所以

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, \Pi)}{\log r} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log m(r, \Pi)}{\log r} = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log N(r, A_0)}{\log r} = \lambda < \sigma(A_0).$$

因为 $H(z)$ 是级为 $\sigma(A_0)$ 的超越整函数, 由引理 2.5, 存在区间

$$(a, b), b - a \geq \min \left(2\pi, \frac{\pi}{\sigma(A_0)} \right)$$

使得对任意 $\theta \in (a, b)$ 有

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \log^+ |H(r e^{i\theta})|}{\log r} = \sigma(A_0) \triangleq \sigma. \quad (3.4)$$

下面证明 $[a, b] \subset \Delta(f)$. 否则, 若 $[a, b] \not\subset \Delta(f)$, 则 $(a, b) \setminus \Delta(f)$ 是有界开集, 从而必有 $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ 使得 $\Omega^*(R, \alpha, \beta) \subset F(f) (R > 0)$. 设 $\arg z = \theta_0 \in (\alpha, \beta)$, 则对充分小的 $\epsilon > 0$, 有

$$\log |\Pi(r e^{i\theta_0})| < r^{\lambda+\epsilon}, \quad (3.5)$$

联合 (3.4), (3.5) 两式知, 存在点列 $\{z_j\} \subset \Omega^*(R, \alpha, \beta)$, 使得

$$\begin{aligned} \log |A_0(r_j e^{i\theta_0})| &= \log \left| \frac{H(r_j e^{i\theta_0})}{\Pi(r_j e^{i\theta_0})} \right| = \log |H(r_j e^{i\theta_0})| - \log |\Pi(r_j e^{i\theta_0})| \\ &> r_j^{\sigma-\epsilon} - r_j^{\lambda+\epsilon} = r_j^{\sigma-\epsilon'} (\epsilon' > 0). \end{aligned} \quad (3.6)$$

而另一方面, 类似于定理 1.1 的证明, 由 (1.1) 和 (3.3) 式及定理 1.2 的条件得在 $\Omega^*(R, \alpha, \beta)$ 内

$$\begin{aligned} \log |A_0(r e^{i\theta})| &\leq \sum_{s=1}^n \log^+ \left| \frac{f^{(s)}(r e^{i\theta})}{f(r e^{i\theta})} \right| + \sum_{k=1}^{n-1} \log^+ |A_k(r e^{i\theta})| + O(1) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \log^+ |A_k(r e^{i\theta})| + O(\log r) \leq r^{\sigma-\epsilon} (r \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

这与 (3.6) 式矛盾. 所以 $[a, b] \subset \Delta(f)$. 定理 1.3 得证.

参 考 文 献

- [1] 庄圻泰, 杨重俊. 亚纯函数的不动点与分解论 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1988.
- [2] 杨乐. 值分布及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.
- [3] Bergweiler W. Iteration of meromorphic functions[J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1993, 29: 151–188.
- [4] Goldberg A A, Ostrovskii I V. Value distribution of meromorphic functions[M]. Rhode Island: American Mathematical Society, 2008.
- [5] 黄志刚. 超越整函数的某些动力学性质 [J]. 数学杂志, 2011, 31(6): 1024–1030.
- [6] Baker I N. Sets of non-normality in iteration theory[J]. J. Lond. Math. Soc., 1965, 40: 499–502.
- [7] 乔建永. 整函数迭代的稳定集 [J]. 数学学报, 1994, 37(5): 702–708.
- [8] Zheng J H, Wang S, Huang Z G. Some properties of Fatou and Julia sets of transcendental meromorphic functions[J]. Bull Austral. Math. Soc., 2002, 66: 1–8.
- [9] Huang Z G, Wang J. On limit directions of Julia sets of entire solutions of differential equations[J]. J. Math. Anal. Appl., 2014, 409: 478–484.
- [10] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations[M]. Berlin: de Gruyter, 1993.
- [11] Wu S J. On the location of zeros of solutions of $f'' + A(z)f = 0$ where $A(z)$ is entire[J]. Math. Scand., 1994(74): 293–312.
- [12] 杨乐. 亚纯函数在角域内的波莱耳方向 [J]. 中国科学, 1979, (I): 149–163.
- [13] Baernstein A. Proof of Edrei's spread conjecture[J]. Proc. Lond. Math. Soc., 1973, 26: 418–434.
- [14] Huang Z G, Wang J. On the radial distribution of Julia sets of entire solutions of $f^{(k)} + A(z)f = 0$ [J]. J. Math. Anal. Appl., 2012, 387: 1106–1113.
- [15] Wang S P. On the sectorial oscillation theory of $f'' + Af = 0$ [J]. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A, I. Math. Disser. 1994, 92: 1–60.

RADIAL DISTRIBUTIONS OF JULIA SETS OF MEROMORPHIC SOLUTIONS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

SUN Gui-rong, HUANG Zhi-gang

(Department of Math., Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215009, China)

Abstract: This paper is devoted to studying the dynamical properties of solutions of $f^{(n)} + A_{n-1}f^{(n-1)} + \cdots + A_0(z)f = 0$, where $n(\geq 2)$ is an integer, and $A_i(z)(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ are meromorphic functions of finite lower order. By using Nevanlinna theory of the value distribution of meromorphic functions, we obtain the lower bound on the radial distribution of Julia sets of solutions of such equations in some additional conditions, which improves some results of concerned literature.

Keywords: differential equation; meromorphic function; Julia set; radial distribution

2010 MR Subject Classification: 30D35; 34M10; 37F10