Vol. 35 (2015)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

矩阵方程 $AXB+CX^TD=E$ 自反最佳逼近解的迭代算法

杨家稳 [1]，孙合明 [2]

(1. 滁州职业技术学院基础部, 安徽 滁州 239000)

(2. 河海大学理学院, 江苏 南京 210098)

摘 要: 本文研究了 Sylvester 矩阵方程 $AXB+CX^TD=E$ 自反 (或反自反) 最佳逼近解. 利用所提出的共轭方向法的迭代算法, 获得了一个结果: 不论矩阵方程 $AXB+CX^TD=E$ 是否相容, 对于任给初始自反 (或反自反) 矩阵 X_1, 在有限迭代步内, 该算法都能够计算出该矩阵方程的自反 (或反自反) 最佳逼近解. 最后, 三个数值例子验证了该算法是有效性的.

关键词: Sylvester 矩阵方程; Kronecker 积; 共轭方向法; 最佳逼近解; 自反矩阵

MR(2010) **主题分类号**: 15B57　　　**中图分类号**: O241.5

文献标识码: A　　　**文章编号**: 0255-7797(2015)05-1275-12

1 引言

首先介绍文中的符号: $\Re^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 阶实矩阵的集合, I 表示单位矩阵, A^T 表示矩阵 A 的转置, $A\otimes B$ 表示矩阵 A 与矩阵 B 的 Kronecker 积. $\langle A,B\rangle=\ \mathrm{trace}(B^TA)$, $\|A\|$ 表示矩阵 A 的 Frobenius 范数, $\|A\|^2=\langle A,A\rangle$, $\|\alpha\|_2$ 表示向量 α 的 2 - 范数, $\|\alpha\|_2^2=\langle\alpha,\alpha\rangle$. 若 $P^2=I$ 且 $P^T=P$, 则称实矩阵 P 是反射矩阵. 若 $A=PAP$ (或 $A=-PAP$), 则称矩阵 A 为关于反射 P 的自反 (或反自反) 矩阵, 记 ${R_r}^{n\times n}(P)=\{A\in R^{n\times n}|PAP=A\}$. 若 $\mathrm{vec}(X^T)=Q(m,n)\mathrm{vec}(X)$, 其中 $X\in R^{m\times n}$, 则称 $Q(m,n)$ 为置换矩阵, 且

$$Q(m,n)=Q(n,m)^T=Q(n,m)^{-1}.$$

矩阵 $A=(a_{ij})\in R^{m\times n}$ 的拉伸算子 $\mathrm{vec}(\cdot)$ 为

$$\mathrm{vec}(A)=[a_{11},a_{21},\cdots,a_{m1},a_{12},\ a_{22},\cdots,a_{m2},\cdots,a_{1n},a_{2n},\cdots,a_{mn}]^T,$$

$\nabla f(X)$ 表示 $f(X)$ 关于 X 的梯度算子, 即 $\nabla f(X)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_{11}},\frac{\partial f}{\partial x_{21}},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_{mn}}\right)^T$, $\nabla^2 f(X)$ 为 Hessian 矩阵, 其中 $X=(x_{ij})\in R^{m\times n}$.

我们知道关于反射矩阵的自反矩阵或反自反矩阵在系统与控制理论、工程、科学计算和其他领域都有广泛的应用 [1−2]. 近年来, Sylvester 矩阵方程 $AXB+CX^TD=E$ 是计算数学研究的热点之一, 并且取得很多成果. 若矩阵方程相容, 文献 [3] 利用 Moore-Penrose 广义给出了 $AX+X^TC=B$ 解的表达式, 文献 [4–5] 用共轭梯度迭代算法给出矩阵方程 $AXB+CX^TD=E$ 极小范数最小二乘解, 2011 年文献 [6] 给出了 $XA+AX^T=0$ 的一般解, 2012 年文献 [7] 给出 $AXB+CX^TD=E$ 的可解性, 文献 [8] 给出求解方程 $A_1X_1B_1=C$,

*收稿日期: 2013-06-12　　接收日期: 2013-07-30

基金项目: 安徽高校省级自然科学基金资助 (KJ2011B119).

作者简介: 杨家稳 (1972–), 男, 安徽滁州, 副教授, 硕士, 主要研究方向: 优化算法.

$A_2X_2B_2 = D$ 的自反 (或反自反) 最佳逼近解. 若矩阵方程不相容, 对于任意给定矩阵, 盛 [9] 提出一种算法求得最佳逼近解, 2012 年文献 [10] 提出一种算法求 $AXB + CXD = E$ 的自反 (或反自反) 最佳逼近解.

目前还未见研究方程 $AXB + CX^TD = E$ 的自反 (或反自反) 最佳逼近解的文献. 一般来说, 较容易求得该矩阵方程无约束条件的解, 但很难求该矩阵方程的带约束条件的解. 我们利用共轭方向法思想, 先构造一个可行方向, 然后根据这个可行方向再构造相互共轭的下降方向, 所以初始矩阵通过有限次迭代能够收敛于全局最小点.

本文考虑如下问题:

问题 I 给定矩阵 $A, C \in \Re^{m\times l}, B, D \in \Re^{l\times n}, E \in \Re^{m\times n}$, 求 $X \in \Re_r^{l\times l}(P)$, 使得

$$\left\|E - AXB - CX^TD\right\| = \min. \tag{1.1}$$

问题 II 设问题 I 的解集合为 S_E, 给定 $X^* \in R_r^{l\times l}(P)$, 求 $\hat{X} \in S_E$ 使得

$$\left\|\hat{X} - X^*\right\| = \min_{X\in S_E} \|X - X^*\|. \tag{1.2}$$

对于矩阵方程 $AXB + CX^TD = E$, 若它们是相容的, S_E 是解的集合; 若它们不相容, S_E 就是最小二乘解的集合. 所以无论矩阵方程 $AXB + CX^TD = E$ 是否相容, 都可以认为 S_E 是问题 I 的解集合. 问题 II 是在 S_E 里找一个与矩阵 $X^* \in R_r^{l\times l}(P)$ 最接近的矩阵. 由于数据不完整或者修改数据, 在线性系统的测试和复原过程中, 会提出问题 II, 未知矩阵的估计值 X^* 可以通过实验观测和统计分布的信息获得.

显然问题 I 的最小二乘解等价 (1.3) 式的最小二乘解

$$\left\|E - AXB - CX^TD\right\|^2 = \min, \tag{1.3}$$

其中 $X \in \Re_r^{l\times l}(P)$.

本文的结构如下: 第 2 部分给出问题 I 和问题 II 的一个迭代算法并证明所给算法是收敛的; 第 3 部分用三个数值例子来验证该算法的有效性; 第 4 部分给出结论.

2 问题 I 和 II 的迭代算法

下面给出问题 I 和 II 的算法, 算法的具体步骤如下:

步骤 1 输入 $A \in \Re^{m\times l}, B \in \Re^{l\times n}, C \in \Re^{m\times l}, D \in \Re^{l\times n}$ 和 $E \in \Re^{m\times n}$;

步骤 2 任给自反矩阵 $X_1 \in \Re_r^{l\times l}(P)$, 其中 $P \in \Re_r^{l\times l}$ 是任意广义自反矩阵;

步骤 3 计算

$$\begin{aligned}
&R_1 = E - AX_1B - C{X_1}^TD;\\
&g_1 = A^TR_1B^T + D{R_1}^TC + P(A^TR_1B^T + D{R_1}^TC)P;\\
&V_1 = A^TAg_1BB^T + A^TC{g_1}^TDB^T + DB^T{g_1}^TA^TC + DD^Tg_1C^TC;\\
&d_1 = V_1 + PV_1P;\\
&k := 1;
\end{aligned}$$

步骤 4 如果 $g_1 = \mathbf{0}$, 则停止迭代; 否则转入步骤 5;

步骤 5 计算 $\mathrm{vec}(X_{k+1})=\mathrm{vec}(X_k)+\frac{\|g_k\|^2}{\|d_k\|^2}\mathrm{vec}(d_k)$, 即 $X_{k+1}=X_k+\frac{\|g_k\|^2}{\|d_k\|^2}d_k$;

$$\begin{aligned}
U_k &= A^TAd_kBB^T+A^TC{d_k}^TDB^T+DB^T{d_k}^TA^TC+DD^Td_kC^TC;\\
g_{k+1} &= A^TR_{k+1}B^T+D{R_{k+1}}^TC+P(A^TR_{k+1}B^T+D{R_{k+1}}^TC)P\\
&= g_k-\frac{\|g_k\|^2}{\|d_k\|^2}(U_k+PU_kP);\\
V_{k+1} &= A^TAg_{k+1}BB^T+A^TC{g_{k+1}}^TDB^T+DB^T{g_{k+1}}^TA^TC+DD^Tg_{k+1}C^TC;\\
d_{k+1} &= V_{k+1}+PV_{k+1}P+\frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2}d_k.
\end{aligned}$$

步骤 6 如果 $g_{k+1}=\mathbf{0}$, 则停止迭代; 否则 $k:=k+1$, 转入步骤 5.

为了证明该算法的收敛性, 首先给出下面一些定理.

定理 1 设 $F(X)=\left\|E-AXB-CX^TD\right\|^2$, $R=E-AXB-CX^TD$, 其中 $X\in\Re_r^{l\times l}(P)$, 则

(i) 存在 $X^*\in\Re_r^{l\times l}(P)$ 使得 $\nabla F(X^*)=\mathbf{0}$, 且 $\nabla F(X)=-2\mathrm{vec}(A^TRB^T+DR^TC)$.

(ii) $\nabla^2F(X)$ 为半正定矩阵.

证 (i) 令 $\mathrm{vec}(X^T)=Q(l,l)\mathrm{vec}(X)$, $A_1=B^T\otimes A+(D^T\otimes C)Q(l,l)$,

$$\begin{aligned}
F(X) &= \left\|E-AXB-CX^TD\right\|^2=\left\|\mathrm{vec}(E-AXB-CX^TD)\right\|_2^2\\
&= \left\|\mathrm{vec}(E)-\mathrm{vec}(AXB-CX^TD)\right\|_2^2\\
&= \left\|\mathrm{vec}(E)-[B^T\otimes A+(D^T\otimes C)Q(l,l)]vec(X)\right\|_2^2\\
&= \langle \mathrm{vec}(E)-A_1\mathrm{vec}(X),\mathrm{vec}(E)-A_1\mathrm{vec}(X)\rangle\\
&= [\mathrm{vec}(E)]^T\mathrm{vec}(E)-2[\mathrm{vec}(X)]^T{A_1}^T\mathrm{vec}(E)+[\mathrm{vec}(X)]^T{A_1}^TA_1\mathrm{vec}(X),
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\nabla F(X) &= 2{A_1}^TA_1\mathrm{vec}(X)-2{A_1}^T\mathrm{vec}(E)=2[{A_1}^TA_1\mathrm{vec}(X)-{A_1}^T\mathrm{vec}(E)]\\
&= -2\mathrm{vec}(A^TRB^T+DR^TC).
\end{aligned}$$

显然, 矩阵方程 ${A_1}^TA_1\mathrm{vec}(X)-{A_1}^T\mathrm{vec}(E)=\mathbf{0}$ 是相容的, 则存在 $X^*\in\Re_r^{l\times l}(P)$ 使得 ${A_1}^TA_1\mathrm{vec}(X^*)-{A_1}^T\mathrm{vec}(E)=\mathbf{0}$, 即 $\nabla F(X^*)=\mathbf{0}$.

(ii) 因为 $\nabla F(X)=2{A_1}^TA_1\mathrm{vec}(X)-2{A_1}^T\mathrm{vec}(E)$, 所以 $\nabla^2F(X)=2{A_1}^TA_1$. 由于对于任意 $Y\in\Re^{l^2}$ 都有 $\|A_1Y\|^2\geq 0\Rightarrow\langle A_1Y,A_1Y\rangle\geq 0\Rightarrow Y^T{A_1}^TA_1Y\geq 0$, 所以 $\nabla^2F(X)$ 为半正定矩阵.

定理 2 [11] 设 $S\subset\Re^n$ 为凸集, $f:S\subset\Re^n\to\Re$ 在 S 的内点集 $\mathrm{int}\,S$ 二次连续可微, 若 $x^*\in\mathrm{int}\,S$ 为 $f(x)$ 的驻点, 且 $\forall x\in\mathrm{int}\,S$, $\nabla^2f(x)$ 半正定, 则 x^* 为 $f(x)$ 在 $\mathrm{int}\,S$ 上的全局极小点.

定理 3 若 $\{X_i\}$, $\{g_i\}$ 和 $\{d_i\}$ 是算法产生的序列, 则 $g_i,\ d_i,\ X_i\in\Re_r^{l\times l}(P)\ \ (i=1,2,\cdots)$.

证 下面用数学归纳法来证明 $g_i,d_i,X_i\in\Re_r^{l\times l}(P)\ \ (i=1,2,\cdots)$.

当 $i=1$ 时, 所给的初始矩阵 $X_1\in\Re_r^{l\times l}(P)$, 显然 $g_1\in\Re_r^{l\times l}(P)$, $d_1\in\Re_r^{l\times l}(P)$.

假设当 $i=k\ (k\geq 2)$ 时, $g_k, d_k, X_k \in \Re_r^{l\times l}(P)$ 结论成立. 当 $i=k+1$ 时,

$$Pg_{k+1}P = P[g_k - \frac{\|g_k\|^2}{\|d_k\|^2}(U_k + PU_kP)]P = Pg_kP - \frac{\|g_k\|^2}{\|d_k\|^2}(PU_kP + U_k) = g_{k+1},$$

$$Pd_{k+1}P = P(V_{k+1} + PV_{k+1}P + \frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2}d_k)P = PV_{k+1}P + V_{k+1} + \frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2}Pd_kP = d_{k+1},$$

$$PX_{k+1}P = P\left(X_k + \frac{\|g_k\|^2}{\|d_k\|^2}d_k\right)P = PX_kP + \frac{\|g_k\|^2}{\|d_k\|^2}Pd_kP = X_k + \frac{\|g_k\|^2}{\|d_k\|^2}d_k = X_{k+1},$$

故 $g_i, d_i, X_i \in \Re_r^{l\times l}(P)\ \ (i=1,2,\cdots)$.

定理 4 若 $X^* \in \Re_r^{l\times l}(P)$ 是 $\nabla F(X)=\mathbf{0}$ 的解, $\{X_i\}$, $\{g_i\}$ 和 $\{d_i\}$ 是算法产生的序列. 如果 $g_i \neq \mathbf{0}$, 则 $d_i \neq \mathbf{0}\ (i=1,2,\cdots,s)$.

证 首先利用数学归纳法证明 $\langle d_i, X^*-X_i\rangle = \|g_i\|^2\ (i=1,2,\cdots,s)$, 当 $i=1$ 时,

$$\begin{aligned}
& \langle d_1, X^*-X_1\rangle \\
= & \langle V_1 + PV_1P, X^*-X_1\rangle \\
= & \left\langle A^TAg_1BB^T + A^TCg_1{}^TDB^T + DB^Tg_1{}^TA^TC + DD^Tg_1C^TC, X^*-X_1\right\rangle \\
& + \left\langle A^TAg_1BB^T + A^TCg_1{}^TDB^T + DB^Tg_1{}^TA^TC + DD^Tg_1C^TC, P(X^*-X_1)P\right\rangle \\
= & 2\left\langle A^TAg_1BB^T + A^TCg_1{}^TDB^T + DB^Tg_1{}^TA^TC + DD^Tg_1C^TC, X^*-X_1\right\rangle \\
= & 2\left\langle A^TAg_1BB^T + DD^Tg_1C^TC, X^*-X_1\right\rangle + 2\left\langle A^TCg_1{}^TDB^T + DB^Tg_1{}^TA^TC, X^*-X_1\right\rangle \\
= & 2\left\langle A^TAg_1BB^T + DD^Tg_1C^TC, X^*-X_1\right\rangle + 2\langle BD^Tg_1C^TA + C^TAg_1BD^T, (X^*-X_1)^T\rangle \\
= & 2\langle g_1, A^TA(X^*-X_1)BB^T + DD^T(X^*-X_1)C^TC\rangle \\
& +2\langle g_1, DB^T(X^*-X_1)^TA^TC + A^TC(X^*-X_1)^TDB^T\rangle \\
= & 2\left\langle g_1, A^TA(X^*-X_1)BB^T + DD^T(X^*-X_1)C^TC + DB^T(X^*-X_1)^TA^TC\right. \\
& \left. +A^TC(X^*-X_1)^TDB^T\right\rangle \\
= & \left\langle g_1, 2(A^TR_1B^T + DR_1{}^TC)\right\rangle \\
= & \left\langle g_1, A^TR_1B^T + DR_1{}^TC\right\rangle + \left\langle g_1, A^TR_1B^T + DR_1{}^TC\right\rangle \\
= & \left\langle g_1, A^TR_1B^T + DR_1{}^TC\right\rangle + \left\langle Pg_1P, A^TR_1B^T + DR_1{}^TC\right\rangle \\
= & \left\langle g_1, A^TR_1B^T + DR_1{}^TC\right\rangle + \left\langle g_1, P(A^TR_1B^T + DR_1{}^TC)P\right\rangle \\
= & \left\langle g_1, A^TR_1B^T + DR_1{}^TC + P(A^TR_1B^T + DR_1{}^TC)P\right\rangle \\
= & \|g_1\|^2.
\end{aligned}$$

假设当 $i=k\ (s>k\geq 2)$ 时, $\langle d_k, X^*-X_k\rangle = \|g_k\|^2$ 成立. 当 $i=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}
& \langle d_{k+1}, X^*-X_{k+1}\rangle = \langle V_{k+1} + PV_{k+1}P + \frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2}d_k, X^*-X_{k+1}\rangle \\
= & \langle V_{k+1}, X^*-X_{k+1}\rangle + \langle V_{k+1}, P(X^*-X_{k+1})P\rangle + \frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2}\langle d_k, X^*-X_{k+1}\rangle \\
= & \left\langle 2(A^TAg_{k+1}BB^T + A^TCg_{k+1}{}^TDB^T + DB^Tg_{k+1}{}^TA^TC + DD^Tg_{k+1}C^TC), X^*-X_{k+1}\right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+\frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2}\langle d_k, X^*-X_{k+1}\rangle\\
=\;&\left\langle g_{k+1}, 2(A^TR_{k+1}B^T+DR_{k+1}{}^TC)\right\rangle+\frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2}\langle d_k, X^*-X_{k+1}\rangle\\
=\;&\left\langle g_{k+1}, A^TR_{k+1}B^T+DR_{k+1}{}^TC+P(A^TR_{k+1}B^T+DR_{k+1}{}^TC)P\right\rangle\\
&+\frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2}\langle d_k, X^*-X_{k+1}\rangle\\
=\;&\|g_{k+1}\|^2+\frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2}\langle d_k, X^*-X_{k+1}\rangle\\
=\;&\|g_{k+1}\|^2+\frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2}\left\langle d_k, X^*-X_k-\frac{\|g_k\|^2}{\|d_k\|^2}d_k\right\rangle\\
=\;&\|g_{k+1}\|^2+\frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2}\left[\langle d_k, X^*-X_k\rangle-\frac{\|g_k\|^2}{\|d_k\|^2}\langle d_k, d_k\rangle\right]\\
=\;&\|g_{k+1}\|^2+\frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2}\left[\|g_k\|^2-\frac{\|g_k\|^2}{\|d_k\|^2}\|d_k\|^2\right]=\|g_{k+1}\|^2.
\end{aligned}$$

故 $\langle d_i, X^*-X_i\rangle=\|g_i\|^2$ 成立, 所以当 $g_i\neq\mathbf{0}$ 时, $P_i\neq\mathbf{0}$ $(i=1,2,\cdots,s)$.

定理 5 若 g_1 和 d_1 是算法产生的, $\mathrm{vec}(g_1{}^T)=Q(l,l)\mathrm{vec}(g_1)=Q\mathrm{vec}(g_1)$. 如果 $g_1\neq\mathbf{0}$, 则 $\nabla F(X_1)^T\mathrm{vec}(d_1)<0$.

证

$$\begin{aligned}
&\nabla F(X_1)^T\mathrm{vec}(d_1)=\left\langle -2\mathrm{vec}(A^TR_1B^T+DR_1{}^TC), \mathrm{vec}(d_1)\right\rangle\\
=\;&-\left\langle 2\mathrm{vec}(A^TR_1B^T+DR_1{}^TC), \mathrm{vec}(Pd_1P)\right\rangle\\
=\;&-\left\langle 2\mathrm{vec}(A^TR_1B^T+DR_1{}^TC), (P\otimes P)\mathrm{vec}(d_1)\right\rangle\\
=\;&-\left\langle \mathrm{vec}[(A^TR_1B^T+DR_1{}^TC)+P(A^TR_1B^T+DR_1{}^TC)P], \mathrm{vec}(d_1)\right\rangle\\
=\;&-\left\langle \mathrm{vec}(g_1), (I+P\otimes P)\,\mathrm{vec}(A^TAg_1BB^T+A^TCg_1{}^TDB^T+DB^Tg_1{}^TA^TC+DD^Tg_1C^TC)\right\rangle\\
=\;&-[\mathrm{vec}(g_1)]^T(I+P\otimes P)\left[B^T\otimes A+(D^T\otimes C)Q\right]^T\left[B^T\otimes A+(D^T\otimes C)Q\right]\mathrm{vec}(g_1)\\
=\;&-\left\{\left[B^T\otimes A+(D^T\otimes C)Q\right](I+P\otimes P)\,\mathrm{vec}(g_1)\right\}^T\left[B^T\otimes A+(D^T\otimes C)Q\right]\mathrm{vec}(g_1)\\
=\;&-\left\{\left[B^T\otimes A+(D^T\otimes C)Q\right]2\mathrm{vec}(g_1)\right\}^T\left[B^T\otimes A+(D^T\otimes C)Q\right]\mathrm{vec}(g_1)\\
=\;&-2\left\|\left[B^T\otimes A+(D^T\otimes C)Q\right]\mathrm{vec}(g_1)\right\|_2^2\leq 0.
\end{aligned}$$

假设 $\left\|\left[B^T\otimes A+(D^T\otimes C)Q\right]\mathrm{vec}(g_1)\right\|_2^2=0$, 则 $\left[B^T\otimes A+(D^T\otimes C)Q\right]\mathrm{vec}(g_1)=\mathbf{0}$, 从而可得

$$\mathrm{vec}(d_1)=(I+P\otimes P)\left[B^T\otimes A+(D^T\otimes C)Q\right]^T\left[B^T\otimes A+(D^T\otimes C)Q\right]\mathrm{vec}(g_1)=\mathbf{0}.$$

因为 $g_1\neq\mathbf{0}$, 根据定理 4 可得 $d_1\neq\mathbf{0}$, 这与 $\mathrm{vec}(d_1)=\mathbf{0}$ 矛盾, 所以

$$-\left\|\left[B^T\otimes A+(D^T\otimes C)Q\right]\mathrm{vec}(g_1)\right\|_2^2<0.$$

即 $\nabla F(X_1)^T\mathrm{vec}(d_1)<0$.

定理 5 表明了算法中的搜索方向 $\mathrm{vec}(d_1)$ 是一个可行性下降方向. 下面将证明所有的搜索方向相互共轭.

定理 6 $\{g_i\}$ 和 $\{d_i\}$ 是算法产生的序列, 且 $d_i\neq\mathbf{0}$ $(i=1,2,\cdots,l)$, 则

$$\langle g_i,g_j\rangle=0\ ;\ \langle d_i,d_j\rangle=0\,(i,j=1,2,\cdots,l,i\neq j)\,. \tag{2.1}$$

证 因为 $\langle A,B\rangle=\langle B,A\rangle$, 其中 $A,B\in\Re^{m\times n}$, 所以只需证明当 $1\leq i<j$ 时结论成立即可. 用数学归纳法分两步来证明该结论:

第一步 证明 $\langle g_i,g_{i+1}\rangle=0$ 且 $\langle d_i,d_{i+1}\rangle=0$ $(i=1,2,\cdots)$. 当 $i=1$ 时,

$$\begin{aligned}
\langle g_1,g_2\rangle &= \langle g_1,g_1-\frac{\|g_1\|^2}{\|d_1\|^2}(U_1+PU_1P)\rangle=\langle g_1,g_1\rangle-\frac{\|g_1\|^2}{\|d_1\|^2}\langle g_1,U_1+PU_1P\rangle\\
&= \|g_1\|^2-\frac{\|g_1\|^2}{\|d_1\|^2}[\langle g_1,U_1\rangle+\langle Pg_1P,U_1\rangle]=\|g_1\|^2-\frac{\|g_1\|^2}{\|d_1\|^2}\langle g_1,2U_1\rangle\\
&= \|g_1\|^2-\frac{2\|g_1\|^2}{\|d_1\|^2}\left\langle g_1,A^TAd_1BB^T+A^TCd_1{}^TDB^T+DB^Td_1{}^TA^TC+DD^Td_1C^TC\right\rangle\\
&= \|g_1\|^2-\frac{2\|g_1\|^2}{\|d_1\|^2}\left\langle A^TAg_1BB^T+A^TCg_1{}^TDB^T+DB^Tg_1{}^TA^TC+DD^Tg_1C^TC,d_1\right\rangle\\
&= \|g_1\|^2-\frac{\|g_1\|^2}{\|d_1\|^2}\langle V_1,d_1+Pd_1P\rangle=\|g_1\|^2-\frac{\|g_1\|^2}{\|d_1\|^2}\langle V_1+PV_1P,d_1\rangle\\
&= \|g_1\|^2-\frac{\|g_1\|^2}{\|d_1\|^2}\langle d_1,d_1\rangle=0,\\
\langle d_1,d_2\rangle &= \langle d_1,V_2+PV_2P+\frac{\|g_2\|^2}{\|g_1\|^2}d_1\rangle=\langle d_1,2V_2\rangle+\frac{\|g_2\|^2}{\|g_1\|^2}\langle d_1,d_1\rangle\\
&= \left\langle d_1,2(A^TAg_2BB^T+A^TCg_2{}^TDB^T+DB^Tg_2{}^TA^TC+DD^Tg_2C^TC)\right\rangle+\frac{\|g_2\|^2}{\|g_1\|^2}\langle d_1,d_1\rangle\\
&= \left\langle 2(A^TAd_1BB^T+A^TCd_1{}^TDB^T+DB^Td_1{}^TA^TC+DD^Td_1C^TC),g_2\right\rangle+\frac{\|g_2\|^2}{\|g_1\|^2}\langle d_1,d_1\rangle\\
&= \langle 2U_1,g_2\rangle+\frac{\|g_2\|^2}{\|g_1\|^2}\langle d_1,d_1\rangle=\langle U_1+PU_1P,g_2\rangle+\frac{\|g_2\|^2}{\|g_1\|^2}\langle d_1,d_1\rangle\\
&= \left\langle\frac{\|d_1\|^2}{\|g_1\|^2}(g_1-g_2),g_2\right\rangle+\frac{\|g_2\|^2}{\|g_1\|^2}\|d_1\|^2\\
&= \frac{\|d_1\|^2}{\|g_1\|^2}\langle g_1-g_2,g_2\rangle+\frac{\|g_2\|^2}{\|g_1\|^2}\|d_1\|^2=0.
\end{aligned}$$

假设当 $i\leq k-1$ $(s>k\geq 2)$ 结论成立. 当 $i=k$ 时,

$$\begin{aligned}
\langle g_k,g_{k+1}\rangle &= \left\langle g_k,g_k-\frac{\|g_k\|^2}{\|d_k\|^2}(U_k+PU_kP)\right\rangle=\|g_k\|^2-\frac{\|g_k\|^2}{\|d_k\|^2}\langle g_k,2U_k\rangle\\
&= \|g_k\|^2-\frac{\|g_k\|^2}{\|d_k\|^2}\left\langle A^TAg_kBB^T+DB^Tg_k{}^TA^TC+A^TCg_k{}^TDB^T+DD^Tg_kC^TC,2d_k\right\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \|g_k\|^2-\frac{\|g_k\|^2}{\|d_k\|^2}\langle V_k,2d_k\rangle=\|g_k\|^2-\frac{\|g_k\|^2}{\|d_k\|^2}\langle V_k,d_k+Pd_kP\rangle\\
&= \|g_k\|^2-\frac{\|g_k\|^2}{\|d_k\|^2}\langle V_k+PV_kP,d_k\rangle\\
&= \|g_k\|^2-\frac{\|g_k\|^2}{\|d_k\|^2}\langle d_k-\frac{\|g_k\|^2}{\|g_{k-1}\|^2}d_{k-1},d_k\rangle\\
&= \|g_k\|^2-\frac{\|g_k\|^2}{\|d_k\|^2}(\|d_k\|^2-\frac{\|g_k\|^2}{\|g_{k-1}\|^2}\langle d_{k-1},d_k\rangle)=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle d_k,d_{k+1}\rangle &= \langle d_k,V_{k+1}+PV_{k+1}P+\frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2}d_k\rangle=\langle d_k,2V_{k+1}\rangle+\frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2}\|d_k\|^2\\
&= \left\langle d_k,2(A^TAg_{k+1}BB^T+A^TC{g_{k+1}}^TDB^T+DB^T{g_{k+1}}^TA^TC+DD^Tg_{k+1}C^TC)\right\rangle\\
&\quad +\frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2}\|d_k\|^2\\
&= \left\langle 2(A^TAd_kBB^T+A^TC{d_k}^TDB^T+DB^T{d_k}^TA^TC+DD^Td_kC^TC),g_{k+1}\right\rangle\\
&\quad +\frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2}\|d_k\|^2=\langle 2U_k,g_{k+1}\rangle+\frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2}\|d_k\|^2\\
&= \langle U_k+PU_kP,g_{k+1}\rangle+\frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2}\|d_k\|^2\\
&= \frac{\|d_k\|^2}{\|g_k\|^2}\langle g_k-g_{k+1},g_{k+1}\rangle+\frac{\|g_{k+1}\|^2}{\|g_k\|^2}\|d_k\|^2=0,
\end{aligned}
$$

故 $\langle g_i,g_{i+1}\rangle=0$ 且 $\langle d_i,d_{i+1}\rangle=0$ $(i=1,2,\cdots)$ 成立.

第二步 根据第一步结论, 假设对于任意 i 和 k 都有 $\langle g_i,g_{i+k}\rangle=0$ 且 $\langle d_i,d_{i+k}\rangle=0$ 成立.

下面证明 $\langle g_i,g_{i+k+1}\rangle=0$ 且 $\langle d_i,d_{i+k+1}\rangle=0$ 成立.

$$
\langle g_i,g_{i+k+1}\rangle=\langle g_i,g_{i+k}-\frac{\|g_{i+k}\|^2}{\|d_{i+k}\|^2}(U_{i+k}+PU_{i+k}P)\rangle=-\frac{\|g_{i+k}\|^2}{\|d_{i+k}\|^2}\langle g_i,2U_{i+k}\rangle
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{2\|g_{i+k}\|^2}{\|d_{i+k}\|^2}\left\langle g_i,A^TAd_{i+k}BB^T+A^TC{d_{i+k}}^TDB^T+DB^T{d_{i+k}}^TA^TC+DD^Td_{i+k}C^TC\right\rangle\\
&= -\frac{2\|g_{i+k}\|^2}{\|d_{i+k}\|^2}\left\langle A^TAg_iBB^T+A^TC{g_i}^TDB^T+DB^T{g_i}^TA^TC+DD^Tg_iC^TC,d_{i+k}\right\rangle\\
&= -\frac{2\|g_{i+k}\|^2}{\|d_{i+k}\|^2}\langle V_i,d_{i+k}\rangle=-\frac{\|g_{i+k}\|^2}{\|d_{i+k}\|^2}\langle V_i,d_{i+k}+Pd_{i+k}P\rangle\\
&= -\frac{\|g_{i+k}\|^2}{\|d_{i+k}\|^2}\langle V_i+PV_iP,d_{i+k}\rangle=-\frac{\|g_{i+k}\|^2}{\|d_{i+k}\|^2}\langle d_i-\frac{\|g_i\|^2}{\|g_{i-1}\|^2}d_{i-1},d_{i+k}\rangle=0,
\end{aligned}
$$

$$
\langle d_i,d_{i+k+1}\rangle=\langle d_i,V_{i+k+1}+PV_{i+k+1}P+\frac{\|g_{i+k+1}\|^2}{\|g_{i+k}\|^2}d_{i+k}\rangle
$$

$$
= \langle d_i,2V_{i+k+1}\rangle+\frac{\|g_{i+k+1}\|^2}{\|g_{i+k}\|^2}\langle d_i,d_{i+k}\rangle
$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle d_i, 2(A^TAg_{i+k+1}BB^T + A^TCg_{i+k+1}{}^TDB^T + DB^Tg_{i+k+1}{}^TA^TC + DD^Tg_{i+k+1}C^TC)\right\rangle \\
&= \left\langle 2(A^TAd_iBB^T + A^TCd_i{}^TDB^T + DB^Td_i{}^TA^TC + DD^Td_iC^TC), g_{i+k+1}\right\rangle \\
&= \langle 2U_i, g_{i+k+1}\rangle = \langle U_i + PU_iP, g_{i+k+1}\rangle = \frac{\|d_i\|^2}{\|g_i\|^2}\langle g_i - g_{i+1}, g_{i+k+1}\rangle = 0.
\end{aligned}$$

由第一步和第二步可得 $\langle g_i, g_j\rangle = 0$ 且 $\langle d_i, d_j\rangle = 0 \ \ (i, j = 1, 2, \cdots, i \neq j)$ 成立.

定理 7 若 $\forall X_1 \in \Re_r^{l\times l}(P)$, 其中 $P \in \Re_r^{l\times l}$ 是广义自反矩阵, 算法能在有限迭代步内得到问题 I 的自反解.

证 假设 $g_i \neq \mathbf{0}(i = 1, 2, \cdots, l^2)$, 由定理 4 可知, $d_i \neq \mathbf{0}$ $(i = 1, 2, \cdots, l^2)$, 因此根据算法能够计算出 X_{l^2+1} 和 g_{l^2+1}. 由定理 6 可得 $\langle g_i, g_{l^2+1}\rangle = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, l^2)$ 和 $\langle g_i, g_j\rangle = 0$ $(i, j = 1, 2, \cdots, l^2, i \neq j)$. 因为 $\{g_1, g_2, \cdots, g_{l^2}\}$ 是矩阵空间 $\Re_r^{l^2}$ 的正交基, 所以 $g_{l^2+1} = \mathbf{0}$, 即可推导出 $\nabla F(X_{l^2+1}) = \mathbf{0}$. 由定理 1– 定理 3 可得, X_{l^2+1} 为问题 I 的自反解.

定理 8 [12] 假设最小剩余问题 $\|Mx - b\|_2 = \min$ 有解 $x^* \in R\left(M^T\right)$, 则 x^* 是该剩余问题的极小范数最小二乘解.

定理 9 在所给算法中, 如果取初始矩阵 $X_1 = \frac{1}{2}(A^TNB^T + DN^TC) + \frac{1}{2}P(A^TNB^T + DN^TC)P$, 其中 $N \in \Re^{m\times n}$, 特别取 $X_1 = \mathbf{0}$, 算法能够在有限迭代步内获得问题 I 的极小范数最小二乘自反解.

证 如果取初始矩阵 $X_1 = \frac{1}{2}(A^TNB^T + DN^TC) + \frac{1}{2}P(A^TNB^T + DN^TC)P$, 由定理 7 可知, 算法能在有限迭代步内得到问题 I 的自反解 X^*, 且 X^* 能表示成

$$X^* = \frac{1}{2}(A^T\tilde{N}B^T + D\tilde{N}^TC) + \frac{1}{2}P(A^T\tilde{N}B^T + D\tilde{N}^TC)P.$$

记 $\mathrm{vec}(X^T) = Q\mathrm{vec}(X)$, 其中 $X \in \Re^{l\times l}$.

下面将证明 X^* 是问题 I 的极小范数最小二乘自反解:

$$\begin{aligned}
&\min_{X\in\Re_r^{l\times l}(P)} \left\|E - \left(AXB + CX^TD\right)\right\| \\
= &\min_{X\in\Re_r^{l\times l}(P)} \left\|E - \frac{1}{2}\left(AXB + CX^TD\right) - \frac{1}{2}\left(APXPB + CPX^TPD\right)\right\| \\
= &\min_{X\in\Re_r^{l\times l}(P)} \left\|\mathrm{vec}(E) - \frac{1}{2}vec\left[\left(AXB + CX^TD\right) + \left(APXPB + CPX^TPD\right)\right]\right\|_2 \\
= &\min_{X\in\Re_r^{l\times l}(P)} \left\|\mathrm{vec}(E) - \frac{1}{2}\left\{B^T\otimes A + (D^T\otimes C)Q + (B^TP)\otimes(AP) + [(D^TP)\otimes(CP)]Q\right\}\right. \\
&\left.\mathrm{vec}(X)\right\|_2.
\end{aligned}$$

若 $\tilde{N} \in \Re^{m\times n}$, 则

$$\begin{aligned}
&\mathrm{vec}(X^*) = \mathrm{vec}[\frac{1}{2}(A^T\tilde{N}B^T + D\tilde{N}^TC) + \frac{1}{2}P(A^T\tilde{N}B^T + D\tilde{N}^TC)P] \\
= &\frac{1}{2}\left\{B^T\otimes A + (D^T\otimes C)Q + (B^TP)\otimes(AP) + [(D^TP)\otimes(CP)]Q\right\}^T\mathrm{vec}(\tilde{N}) \\
\in &\Re(\frac{1}{2}\left\{B^T\otimes A + (D^T\otimes C)Q + (B^TP)\otimes(AP) + [(D^TP)\otimes(CP)]Q\right\}^T).
\end{aligned}$$

故当取初始矩阵 $X_1=\frac{1}{2}(A^TNB^T+DN^TC)+\frac{1}{2}P(A^TNB^T+DN^TC)P$ 时, 特别 $X_1=\mathbf{0}$, 由定理 8 可得, 算法获得的自反解 X^* 就是自反的极小范数最小二乘解.

若问题 I 的解集 S_X 为非空集, $\bar{X}$ 是所给的逼近矩阵, 其中 $\bar{X}\in\Re_r^{l\times l}(P)$, 则

$$\begin{aligned}&\min_{X\in\Re_r^{l\times l}(P)}\left\|E-AXB-CX^TD\right\|\\=&\min_{X\in\Re_r^{l\times l}(P)}\left\|(E-A\bar{X}B-C\bar{X}^TD)-A(X-\bar{X})B-C(X-\bar{X})^TD\right\|.\end{aligned}$$

令 $\tilde{X}=X-\bar{X}$ 及 $\tilde{E}=E-A\bar{X}B-C\bar{X}^TD$, 那么最佳逼近问题II就等价于先求 (2.2) 式的自反极小范数最小二乘解.

$$\min_{\tilde{X}\in\Re_r^{l\times l}(P)}\left\|\tilde{E}-A\tilde{X}B-C\tilde{X}^TD\right\|. \tag{2.2}$$

由算法可得 (2.2) 式的自反极小范数最小二乘解 $\tilde{X}^*$, 从而计算出问题 I 和II的自反最佳逼近解 $\hat{X}=\tilde{X}^*+\bar{X}$.

3 数值例子

本节用三个数值例子来验证上述算法的可行性. 第一个例子是当矩阵方程 $AXB+CX^TD=E$ 有自反解且逼近矩阵为零矩阵时, 求该方程的自反最佳逼近解; 第二个例子是当矩阵方程 $AXB+CX^TD=E$ 不相容且逼近矩阵为零矩阵时, 求该方程的自反最佳逼近解; 最后一个例子是当矩阵方程 $AXB+CX^TD=E$ 有自反解且逼近矩阵为非零矩阵时, 求 $AXB+CX^TD=E$ 的自反最佳逼近解. 用 Matlab2007R 进行仿真模拟, 取初始自反矩阵 $X_1=\mathbf{0}$.

例 1 考虑下面最小剩余问题:

$$\left\|E-AXB-CX^TD\right\|=\min, \tag{3.1}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}2&1&6&3&-4\\5&4&-3&3&-6\\-1&4&8&-7&2\\5&-2&-6&9&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5&2&-6&-4&5\\-7&8&1&3&-5\\2&-9&8&-1&-2\\2&4&-3&-7&11\\4&6&-2&-12&-4\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}4&-2&9&-7&11\\-6&7&5&8&-3\\-13&2&4&-5&1\\8&-6&2&6&-2\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}-3&-2&7&3&-1\\-6&1&-2&5&-2\\4&3&1&-3&9\\-5&-3&2&4&6\\2&3&-6&11&-11\end{pmatrix},\bar{X}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix}\text{-2064} & \text{-1543} & 1510 & 838 & \text{-195}\\ 261 & \text{-271} & 227 & \text{-742} & 304\\ \text{-119} & \text{-524} & 720 & \text{-1683} & 4651\\ \text{-563} & 1059 & \text{-773} & 796 & \text{-3000}\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

可以验证下面的 X 就是矩阵方程 $AXB+CX^TD=E$ 有自反解,

$$X=\begin{pmatrix}1 & 3 & -4 & -8 & -2\\ 2 & -5 & 2 & 12 & 12\\ -4 & 3 & 1 & -2 & -8\\ -6 & 7 & 9 & -3 & 4\\ 9 & 7 & -6 & 4 & -3\end{pmatrix}.$$

利用所给的算法, 迭代 29 步得到

$$X_{29}=\begin{pmatrix}1.0000 & 3.0000 & -4.0000 & -8.0000 & -2.0000\\ 2.0000 & -5.0000 & 2.0000 & 12.0000 & 12.0000\\ -4.0000 & 3.0000 & 1.0000 & -2.0000 & -8.0000\\ -6.0000 & 7.0000 & 9.0000 & -3.0000 & 4.0000\\ 9.0000 & 7.0000 & -6.0000 & 4.0000 & -3.0000\end{pmatrix}\in\Re_r^{5\times5}(P),$$

相应的余项

$$R_{29}=\left\|E-AX_{29}B-C{X_{29}}^TD\right\|=4.2299\text{e-}012,$$

相对误差

$$\delta_{29}=\|X_{29}-X\|\,/\,\|X\|=7.8262\text{e-}015,$$

其中下标是迭代步数.

例 2 仍考虑 (3.1) 式的最小剩余问题, A, B, C, D, P 和 $\bar{X}$ 同例 1,

$$E=\begin{pmatrix}\text{-2060} & \text{-1543} & 1510 & 838 & \text{-195}\\ 261 & \text{-271} & 227 & \text{-742} & 304\\ \text{-119} & \text{-524} & 720 & \text{-1683} & 4651\\ \text{-563} & 1059 & \text{-773} & 796 & \text{-3000}\end{pmatrix}.$$

可以验证该方程 $AXB+CX^TD=E$ 不相容, 利用算法得到

$$X_{21}=\begin{pmatrix}1.0009 & 3.0041 & \text{-3.9952} & \text{-8.0070} & \text{-2.0278}\\ 1.9442 & \text{-5.0596} & 1.9442 & 12.0414 & 12.0414\\ \text{-3.9952} & 3.0041 & 1.0009 & \text{-2.0278} & \text{-8.0070}\\ \text{-5.9965} & 7.0020 & 9.0038 & \text{-2.9887} & 4.0117\\ 9.0038 & 7.0020 & \text{-5.9965} & 4.0117 & \text{-2.9887}\end{pmatrix}\in\Re_r^{5\times5}(P),$$

相应的余项

$$R_{21}=\left\|E-AX_{21}B-C{X_{21}}^TD\right\|=2.0560.$$

例 3 仍考虑 (3.1) 式的最小剩余问题, A, B, C, D, E 和 P 同例 1,

$$\bar{X}=\begin{pmatrix}10&10&10&10&10\\10&10&10&10&10\\10&10&10&10&10\\10&10&10&10&10\\10&10&10&10&10\end{pmatrix}\in\Re_r^{5\times5}(P).$$

利用算法, 迭代 37 步得到

$$\tilde{X}_{37}=\begin{pmatrix}\text{-9.0000}&\text{-7.0000}&\text{-14.0000}&\text{-18.0000}&\text{-12.0000}\\\text{-8.0000}&\text{-15.0000}&\text{-8.0000}&2.0000&2.0000\\\text{-14.0000}&\text{-7.0000}&\text{-9.0000}&\text{-12.0000}&\text{-18.0000}\\\text{-16.0000}&\text{-3.0000}&\text{-1.0000}&\text{-13.0000}&\text{-6.0000}\\\text{-1.0000}&\text{-3.0000}&\text{-16.0000}&\text{-6.0000}&\text{-13.0000}\end{pmatrix}\in\Re_r^{5\times5}(P),$$

所以自反最佳逼近解为

$$\hat{X}_{37}=\tilde{X}_{37}+\bar{X}=\begin{pmatrix}1.0000&3.0000&-4.0000&-8.0000&-2.0000\\2.0000&-5.0000&2.0000&12.0000&12.0000\\-4.0000&3.0000&1.0000&-2.0000&-8.0000\\-6.0000&7.0000&9.0000&-3.0000&4.0000\\9.0000&7.0000&-6.0000&4.0000&-3.0000\end{pmatrix}\in\Re_r^{5\times5}(P),$$

相应的余项

$$R_{37}=\left\|E-A\hat{X}_{37}B-C\hat{X}_{37}^TD\right\|=3.4050\text{e-}012.$$

4 结论

本文利用共轭方向法思想, 提出了求矩阵方程 $AXB+CX^TD=E$ 自反最佳逼近解的一个迭代算法. 无论 $AXB+CX^TD=E$ 是否相容, 任取一个初始自反矩阵 X_1, 所给的算法都能够在有限迭代步内获得其自反最佳逼近解. 三个数值例子的结果表明该算法是可行性的.

参 考 文 献

[1] Chen, Hsin-Chu. Generalized reflexive matrices: special properties and applications [J]. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1998, (19) :140–153.

[2] Chen Hsin-Chu. The SAS domain decomposition method for structural analysis[R]. CSRD Teach., Report 754, Center for Supercomputing Research and Development, Urbana, IL: University of Illinois, 1988.

[3] Piao Fengxian, Zhang Qingling, Wang Zhefeng. The solution to matrix equation$AX+X^TC=B$[J]. J. Franklin Institute, 2007, 344: 1056–1062.

[4] Li Xie, Liu Yanjun, Yang Huizhong. Gradient based and least squares based iterative algorithms for matrix equation $AXB+CX^TD=E$[J]. Appl. Math. Comput., 2010, 217: 2191–2199.

[5] Wang Minghui, Cheng Xuehan, Wei Musheng. Iterative algorithms for solving the matrix equation$AXB + CX^TD = E$[J]. Appl. Math. Comput., 2007, 187(2)：622–629.

[6] Teran F, Dopico F. The solution of the equation $XA + AX^T = 0$ and its applications to the theory of orbits [J]. Linear Algebra Appl., 2011, 434: 44–67.

[7] 赵琳琳. 矩阵方程 $AXB + CX^TD = E$ 的可解性 [J]. 山东大学学报 (理学版), 2012, 47(10): 45–48.

[8] Mehdi Dehghan, Masoud Hajarian. Finite iterative algorithms for the reflexive and anti-reflexive solutions of the matrix equations $A_1X_1B_1 = C, A_2X_2B_2 = D$[J]. Math. Computer Modeling, 2009, 49: 1937–1959.

[9] 盛兴平, 苏友峰, 陈果良. 矩阵方程 $A^TXB + B^TX^TA = D$ 的极小范数最小二乘解的迭代算法 [J]. 高等学校计算数学学报, 2008, 30(4): 352–362.

[10] 孙合明, 李庆芳, 杨家稳. 自反矩阵下矩阵方程 $AXB + CXD = E$ 的最佳逼近解 [J]. 重庆理工大学学报 (自然科学), 2012, 26(4): 109–114.

[11] 张光澄, 王文娟, 韩会磊等. 非线性最优化计算方法 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[12] Peng Zhuohua, Hu Xiyan, Zhang Lei. An efficient algorithm for the least-squares reflective solution of the matrix equations$A_1XB_1 = C_1, A_2XB_2 = C_2$[J]. Appl. Math. Comput., 2006, 181: 988–999.

AN ITERATIVE ALGORITHM FOR THE REFLEXIVE OPTIMAL APPROXIMATION SOLUTION OF MATRIX EQUATIONS $AXB + CX^TD = E$

YANG Jia-wen[1] , SUN He-ming[2]

(*1. Department of Basic, Chuzhou Vocational and Technical College, Chuzhou 239000, China*)

(*2. College of Science, Hohai University, Nanjing 210098, China*)

Abstract: In this paper, we study the optimal approximation solutin of the Sylvester matrix equations $AXB + CX^TD = E$ over reflexive (anti-reflexive) matrices. By using the proposed conjugate direction method, we get a result that whatever matrix equations $AXB + CX^TD = E$ are consistent or not, for arbitrary initial reflexive (anti-reflexive) matrix X_1, the reflexive (anti-reflexive) optimal approximation solution can be obtained within finite iteration steps in the absence of round-off errors. The effectiveness of the proposed algorithm is verified by three numerical examples.

Keywords: sylvester matrix equations; Kronecker product; conjugate direction method; optimal approximation solution; reflexive matrix

2000 MR Subject Classification: 15B57