Vol. 35 (2015)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

效应代数的同态

张海燕[1]，侯成军[2]
(1. 赤峰学院数学与统计学院, 内蒙古 赤峰 024001)
(2. 扬州大学数学科学学院, 江苏 扬州 225002)

摘 要: 本文研究了维数大于等于 3 的可分 Hillbert 空间 H 的效应代数 $E(H)$ 上的同态问题. 利用投影算子以及线性延拓的方法, 获得了效应代数 $E(H)$ 上每个满的 σ - 正交完备的强同态 φ 都具有形式 $\varphi(A) = UAU^*$, 当满足齐次性以及单边保序的条件时可以延拓到交换 von-Neumann 代数 $\mathcal{A}$ 到 $B(H)$ 上一个有界 $*$ 同态的结果.

关 键 词: 同态; 效应代数; Von-Neumann 代数; 投影; Jordan$*$ 同态
MR(2010) **主题分类号**: 47B65; 46L10 **中图分类号**: O177.1
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2015)05-1252-07

1 引言

在 Hillbert 空间 H 中, 量子效应表示 H 上所有大于等于 0 小于等于 I 的有界线性算子, 这样的元叫做效应元, 所有的效应元用 $E(H)$ 表示, 称之为 Hillbert 空间 H 的效应代数. 设 $\mathcal{A}$ 是一个 von-Neumann 代数, 称 $\mathcal{A}$ 中大于等于 0 小于等于 I 的元 A: $0 \le A \le I$, 为 $\mathcal{A}$ 中的一个效应元; $\mathcal{A}$ 中所有效应元的全体记为 $E(\mathcal{A})$, 并称之为 $\mathcal{A}$ 的效应代数. 在效应代数 $E(\mathcal{A})$ 上, 人们可以定义多种运算关系. 本文主要涉及到了如下运算及相关定义: 偏二元运算 $\oplus$: 设 $A, B \in E(\mathcal{A})$, 若 $A + B \in E(A)$, 则称 A 和 B 正交, 记为 $A \perp B$; 此时令 $A \oplus B = A + B$. 称 $A' = I - A$ 为 A 的补元.

下面给出相关定义: 设 $\mathcal{A}$ 是一个 von-Neumann 代数,$B(H)$ 是 Hillbert 空间 H 上有界线性算子的全体. 设 $\varphi : \mathcal{A} \to B(H)$ 是线性映射, 如果对于任意 $A, B \in \mathcal{A}$, 满足

$$\varphi(AB + BA) = \varphi(A)\varphi(B) + \varphi(B)\varphi(A),$$

则称 φ 是 Jordan 同态. 进一步若 φ 还满足 $\varphi(A^*) = \varphi(A)^*$, 任意 $A \in \mathcal{A}$, 则 φ 是 Jordan $*$ 同态.

设 $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow B(H)$ 是线性映射, 如果对于任意 $A, B \in \mathcal{A}$, 满足

(1) $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$,

(2) $\varphi(A^*) = \varphi(A)^*$,

则称 φ 是 $*$ 同态.

Pulmannová Sylvia 在文 [1] 中给出 Hillbert 空间 H 上的效应代数的张量积, 并且给出了态射, 同态以及 σ - 正交完备的同态的相关定义, 本文借助于投影算子研究了维数大于等于

*收稿日期: 2013-05-10 接收日期: 2014-06-23
基金项目: 国家自然科学基金项目资助 (11271224).
作者简介: 张海燕 (1981–), 女, 吉林长春, 讲师, 主要研究方向: 算子代数 (泛函分析).

3 的可分 Hillbert 空间 H 的效应代数 $E(H)$ 上的同态和效应代数 $E(\mathcal{A})$ 到效应代数 $E(H)$ 的延拓问题. 证明了维数大于等于 3 的可分 Hillbert 空间 H 的效应代数 $E(H)$ 上的每个满的 σ - 正交完备的强同态 φ 都具有形式 $\varphi(A)=UAU^*$, 其中 U 为酉算子或反酉算子, $A\in E(H)$. 以及利用 Lajos Molnár 在文 [2] 中的证明方法, 证明了交换 von-Neumann 代数 $\mathcal{A}$ 上的效应代数 $E(\mathcal{A})$ 到 Hillbert 空间 H 的效应代数 $E(H)$ 上的同态 φ, 当满足齐次性以及单边保序的条件时可以延拓到交换 von-Neumann 代数 $\mathcal{A}$ 到 $B(H)$ 上的一个有界的 $*$ 同态.

2 主要结论

设 $E(H)$ 为 Hillbert 空间 H 上的效应代数, $P(H)$ 为 $B(H)$ 中所有投影的全体,$E(\mathcal{A})$ 为 von-Neumann 代数 $\mathcal{A}$ 上的效应代数. 用 $M_n(\mathbb{C})$ 表示 n 阶矩阵代数, $E(\mathbb{C}^n)$ 表示所有大于等于 0 小于等于 I 的半正定矩阵, 则 $E(\mathbb{C}^n)$ 是矩阵代数 $M_n(\mathbb{C})$ 上的效应代数.

定义 2.1 [1] 设 E 和 F 为效应代数, 如果映射 $\varphi: E\rightarrow F$ 满足

(1) $a\perp b\Rightarrow\varphi(a)\perp\varphi(b)$,

(2) $\varphi(a\oplus b)=\varphi(a)\oplus\varphi(b)$,

(3) $\varphi(1_E)=1_F$,

则称 φ 为态射. (条件 (1) 和条件 $(1')$ $a\leq b\Rightarrow\varphi(a)\leq\varphi(b)$, 是等价的.)

定义 2.2 [1] 设 E 和 F 为效应代数, $\varphi: E\rightarrow F$ 是态射, 并且满足对任意 $a,b\in E$, 若 $\varphi(a)\perp\varphi(b)$, 则 $a\perp b$, 我们就称 φ 为单态射.

定义 2.3 [1] 设 E 和 F 为效应代数, $\varphi: E\rightarrow F$ 是态射, 如果满足保存在的有限的上确界和下确界, 则称 φ 为同态.

定义 2.4 [1] 设 $\varphi: E(H)\rightarrow E(H)$ 是同态, 如果满足对于 $E(H)$ 中的任意单调递增的序列 $(A_i, i\in\Lambda)$, 有 $\varphi(\bigvee_{i\in\Lambda}(A_i)=\bigvee_{i\in\Lambda}\varphi(A_i)$, 则称 φ 为 σ - 正交完备的同态.

定义 2.5 设 $\varphi: E(H)\rightarrow E(H)$ 是态射, 如果满足对于任意投影 $P,Q\in P(H)$, $\varphi(P)\perp\varphi(Q)\Rightarrow P\perp Q$, 则称 φ 是强态射.

下面引理来自文献 [1], 为方便读者我们给出其证明.

引理 2.6 [1] 设 $\varphi: E(H)\rightarrow E(H)$ 为 σ - 正交完备的同态, 则 $\varphi(\lambda A)=\lambda\varphi(A)$, 任意 $\lambda\in[0,1], A\in E(H)$.

证 因为 $\varphi(A)=\varphi(n/nA)=\varphi(1/nA)+\varphi(1/nA)+\cdots+\varphi(1/nA)=n\varphi(1/nA),\forall n\in\mathbb{N}$, 所以 $\varphi(1/nA)=1/n\varphi(A)$. 同理可得 $\varphi(m/nA)=m/n\varphi(A)$, 任意 $n,m\in\mathbb{N}, m\leq n$. 故对于任意有理数 $\mu\in[0,1],\varphi(\mu A)=\mu\varphi(A)$ 成立. 对于任意无理数 $\lambda\in[0,1]$, 取一列单调递增的有理数列 $a_i, i=1,2\cdots$, 使得 $\lim\limits_{i\to\infty}a_i=\lambda$, 即 $\sup\limits_{i\in\Lambda}a_i=\lambda$. 对于任意 $A\in E(H)$, $\{a_iA\}$ 是一个单调递增序列, 强算子收敛到它的上确界, 即 $\bigvee_{i\in\Lambda}a_iA=\lambda A$. 又 φ 是 σ - 正交完备的同态, 所以 $\varphi(\bigvee_{i\in\Lambda}a_iA)=\bigvee\varphi(a_iA)=\bigvee a_i\varphi(A)$, 即 $\varphi(\lambda A)=\lambda\varphi(A)$. 综上知结论成立.

定理 2.7 设 $\varphi: E(H)\rightarrow E(H)$ 是满的 σ - 正交完备的强同态, 则存在 H 上的酉算子或反酉算子 U, 使得任意 $A\in E(H)$, 有 $\varphi(A)=UAU^*$ 成立.

证 我们先证 φ 保投影. 如果 P 是投影, 则由文 [3] 中推论 2.8 可知, $P\wedge P^{'}=0$. 由 φ 保单位可得, $I=\varphi(I)=\varphi(P)+\varphi(P^{'})\Rightarrow\varphi(P^{'})=I-\varphi(P)=\varphi(P)^{'}$. 因为 φ 为同态, 所以 $\varphi(P)\wedge\varphi(P)^{'}=\varphi(P)\wedge\varphi(P')=\varphi(P\wedge P^{'})=0$, 故 φ 保投影. 由文 [1] 中引理 3.3 可知, φ 是单的. 则易证 $\varphi|_{P(H)}: P(H)\rightarrow P(H)$ 为单的满的 σ - 正交完备的强同态, 由强同态的定义可

知, φ 对投影是双边保序的. 因此 $\varphi|_{P(H)}: P(H) \to P(H)$ 为正交序自同构, 由 Ludwig 在文 [4] 中的结论可知, 存在酉算子或反酉算子 U, 使得任意 $P \in P(H)$, 有 $\varphi(P) = UPU^*$ 成立.

下证 $\varphi(A) = UAU^*$, 任意 $A \in E(H)$. 由引理 2.6 可知, 任意 $A \in E(H), \lambda \in [0,1]$, 有 $\varphi(\lambda A) = \lambda\varphi(A)$. 又任意 $A \in E(H)$, 它是所有 $\lambda_i P_i$ 形式的元的上确界, 其中 $\lambda_i \in [0,1]$, P_i 为秩一投影. 所以存在相互正交的有限秩投影 $P_1, P_2, \cdots P_n \cdots$, 及 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n \cdots \in \sigma(A) \subseteq [0,1]$, 使得

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i = \bigvee \lambda_i P_i,$$
$$\varphi(A) = \varphi(\bigvee \lambda_i P_i) = \bigvee \varphi(\lambda_i P_i) = \bigvee \lambda_i \varphi(P_i) = \bigvee \lambda_i U P_i U^* = U \bigvee \lambda_i P_i U^* = UAU^*.$$

定理 2.8 设 $\mathcal{A}$ 是一个 von-Neumann 代数. 令 $\varphi: E(\mathcal{A}) \to E(H)$ 是同态, 且满足

$$\varphi(A) \le \varphi(B) \Rightarrow A \le B,$$
$$\varphi(\lambda A) = \lambda\varphi(A),\ \forall\lambda \in [0,1],\ A \in E(\mathcal{A}).$$

则 φ 可以延拓到 $\psi: \mathcal{A} \to B(H)$ 上有界的 Jordan $*$ 同态.

证 我们先证 φ 保补元. 因为 φ 保单位, 所以对于任意元 A, $I = \varphi(I) = \varphi(A + A') = \varphi(A) \oplus \varphi(A')$, 所以 $\varphi(A') = I - \varphi(A) = \varphi(A)'$. 即 φ 保补元.

下证 φ 保投影. 如果 P 是投影, 即 $P \wedge P' = 0$. 因为 φ 是同态, 所以有 $\varphi(P) \wedge \varphi(P)' = \varphi(P) \wedge \varphi(P') = \varphi(P \wedge P') = 0$, 即 $\varphi(P)$ 是投影.

φ 对投影保正交性. 任意 $P, Q \in E(\mathcal{A})$ 是投影, 如果 $PQ = 0$, 则 $P \le Q'$, 又 φ 保序, 所以 $\varphi(P) \le \varphi(Q')$. $\varphi(P)\varphi(Q) = \varphi(P)(I - \varphi(Q)') = \varphi(P)(I - \varphi(Q') = \varphi(P) - \varphi(P)\varphi(Q') = \varphi(P) - \varphi(P) = 0$.

先将 φ 延拓到 $\mathcal{A}$ 的所有正元 $\mathcal{A}^+$ 上. 令 $\varphi_1: \mathcal{A}^+ \to B(H)^+$, 定义 $\varphi_1(A) = \|A\|\varphi(A/\|A\|)$, $0 \ne A \in \mathcal{A}^+$. 若 $A = 0$, 定义 $\varphi_1(A) = 0$. 则 φ_1 保单位, 正的可加的. 且 $\varphi_1(\lambda A) = \lambda\varphi_1(A)$, 任意 $A, B \in \mathcal{A}^+$. $\varphi_1(A) + \varphi_1(B) = \|A\|\varphi(A/\|A\|) + \|B\|\varphi(B/\|B\|)$. 设 $\|A\| \ \ge \|B\|$, 则

$$\begin{aligned}
\varphi_1(A) + \varphi_1(B) &= \|A\|(\varphi(A/\|A\|) + \|B\|/\|A\|\varphi(B/\|B\|)) \\
&= \|A\|(\varphi(A/\|A\|) + \varphi(B/\|A\|)) \\
&= \|A\|\varphi((A+B)/\|A\|) \\
&= (\|A\|\|A+B\|/\|A+B\|)\varphi(A+B)/\|A\| \\
&= \|A+B\|\varphi(A+B/\|A+B\|) = \varphi_1(A+B).
\end{aligned}$$

因此 φ_1 是正的可加的. 故 $\varphi_1(\lambda A) = \|\lambda A\|\varphi(\lambda A/\|\lambda A\|) = \lambda\varphi_1(A))$, 任意 $\lambda \ge 0$. 且 φ_1 保投影. 如果 P 是投影, 即 $P \wedge P' = 0$. 因为 φ 是同态, 且保正交补, 则

$$\varphi(P) \wedge \varphi(P)' = \varphi(P) \wedge \varphi(P') = \varphi(P \wedge P') = 0.$$

所以 φ 保投影, 且对投影保正交性. 如果 P, Q 是投影, 且 $PQ = 0$, 则 $\varphi_1(P)\varphi_1(Q) = \varphi(P)\varphi(Q) = 0$. $\varphi_1|_{E(\mathcal{A})} = \varphi$, $\|\varphi_1(A)\| = \|(\|A\|\varphi(A/\|A\|))\| \le \|A\|$, 且 $\varphi_1(I) = I$.

进一步将 φ_1 延拓到 $\mathcal{A}$ 的所有自伴元上. $\varphi_2:\mathcal{A}_s\to B(H)_s$, 定义 $\varphi_2(A)=\varphi_1(A^+)-\varphi_1(A^-)$, A^+ 和 A^- 分别为 A 的正的部分和负的部分. 则可证 φ_2 是实线性的, 保投影及投影的正交性. 任意 $A,B\in\mathcal{A}_s\Rightarrow A+B\in\mathcal{A}_s$, 且 $A=A^+-A^-, B=B^+-B^-$.

$$\varphi_2(A+B)=\varphi_1(A^++B^+)-\varphi_1(A^-+B^-)=\varphi_2(A)+\varphi_2(B),$$

易证任意 $\lambda\in\mathbb{R}, A\in\mathcal{A}_s, \varphi_2(\lambda A)=\lambda\varphi_2(A)$. 设

$$A=\|A\|I+A/2-(\|A\|I-A/2), A^+=\|A\|I+A/2, A^-=\|A\|I-A/2,$$

$(\lambda A)^+=\|\lambda A\|I+\lambda A/2$, $(\lambda A)^-=\|\lambda A\|I-\lambda A/2$, 如果 $\lambda\geq 0, (\lambda A)^+=\lambda A^+, (\lambda A)^-=\lambda A^-$, 显然 $\varphi_2(\lambda A)=\lambda\varphi_2(A)$. 如果

$$\lambda\leq 0, (\lambda A)^+=-\lambda A^+, (\lambda A)^-=-\lambda A^-.$$

则可得

$$\varphi_2(\lambda A)=\lambda\varphi_2(A).$$

所以结论成立.

又易证 $\varphi_2|_{\mathcal{A}^+}=\varphi_1$, 因此 φ_2 保投影及投影的正交性, $\varphi_2(I)=I$.

$$\|\varphi_2(A)\|=\|\varphi_1(A^+)-\varphi_1(A^-)\|\leq\|\varphi_1(A^+)\|+\|\varphi_1(A^-)\|\leq 2\|A\|,$$

将 φ_2 延拓到整个 von-Neumann 代数 $\mathcal{A}$ 上. 定义 $\psi(A)=\varphi_2(\mathrm{Re}A)+i\varphi_2(\mathrm{Im}A)$, 任意 $A\in\mathcal{A}$. 其中 $(\mathrm{Re}A)$ 和 $(\mathrm{Im}A)$ 分别是 $\mathcal{A}$ 的实部和虚部. 则可证 ψ 为线性的, 保投影及保投影的正交性, 且 $\psi|\mathcal{A}_s=\varphi_2$. 任意 $\lambda\in\mathbb{C}$, 设 $\lambda=a+ib, a,b\in\mathbb{R}$, 任意 $A\in\mathcal{A}$.

$$\begin{aligned}\psi(\lambda A) &= \varphi_2(\mathrm{Re}\lambda A)+i\varphi_2(\mathrm{Im}\lambda A)\\ &= \varphi_2(\lambda A+\lambda A^*)/2+i\varphi_2(i\overline{\lambda}A^*-i\lambda A)/2\\ &= \varphi_2((aA+aA^*)/2+(ibA-ibA^*)/2)+i\varphi_2((iaA^*-iaA)/2+(bA+bA^*)/2)\\ &= a\varphi_2(A+A^*)/2+b\varphi_2(iA-iA^*)/2+ia\varphi_2(iA^*-iA)/2+ib\varphi_2(A+A^*)/2\\ &= (a+ib)\varphi_2(A+A^*)/2+i(a+ib)\varphi_2(iA^*-iA)/2\\ &= \lambda\varphi_2(\mathrm{Re}A)+i\lambda\varphi_2(\mathrm{Im}A)\\ &= \lambda\psi(A).\end{aligned}$$

任意 $A,B\in\mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}\psi(A+B) &= \varphi_2(\mathrm{Re}(A+B))+i\varphi_2(\mathrm{Im}(A+B))\\ &= \varphi_2((A+B)/2+(A^*+B^*)/2)+i\varphi_2(i(A^*+B^*)/2-i(A+B)/2))\\ &= \varphi_2(A+A^*)/2+\varphi_2(B+B^*)/2+i\varphi_2(iA^*-iA)/2+i\varphi_2(iB^*-iB)/2\\ &= \psi(A)+\psi(B),\end{aligned}$$

综上 ψ 是线性的, 因为易证 $\psi|_{E(\mathcal{A})}=\varphi$. 所以 ψ 保投影及其正交性.

$$\|\psi(A)\|=\|\varphi_2(\mathrm{Re}A)+i\varphi_2(\mathrm{Im}A)\|\leq\|2\varphi_2(A)\|\leq 4\|A\|,$$

因此 ψ 是有界的, 且 $\psi(I)=I$.

下证 ψ 是 Jordan 同态. 假设 P 是任意一个投影, 因为 ψ 保投影, 所以 $\psi(P^2)=\psi(P)^2$. 对任意自伴元 $A\in\mathcal{A}$, 由文 [5] 中定理 5.2.2 知, 存在相互正交的投影 $P_1,P_2,\cdots P_n\cdots$ 及 $\lambda_i\in\mathbb{R}$, 使得 $A=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_iP_i$. 又因为 ψ 是保正交的, 因此 $\psi(P_1),\psi(P_2),\cdots\psi(P_n)\cdots$ 也是相互正交的, 又 ψ 是有界的, 故有

$$\begin{aligned}\psi(A^2)&=\psi(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2P_i^2)=\lim_{n\to\infty}\psi(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2P_i^2)=\lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\psi(P_i^2))\\&=\psi(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\lambda_iP_i)^2=\psi(A)^2.\end{aligned}$$

所以对于任意自伴元 $C,D\in\mathcal{A}$, $C+D$ 也是自伴的, 把 A 换成 $C+D$, 则可有 $\psi((C+D)^2)=\psi(C+D)^2$, 进而可得 $\psi(CD+DC)=\psi(C)\psi(D)+\psi(D)\psi(C)$, 任意 $T\in\mathcal{A},T=H+iK$, H 和 K 是自伴的. 因此

$$\begin{aligned}&\psi(T^2)=\psi(H^2-K^2+iHK+iKH)=\psi(H)^2-\psi(K)^2+i\psi(HK+KH)\\=\;&(\psi(H)+\psi(K))^2=(\psi(H+iK))^2=\psi(T)^2.\end{aligned}$$

又 ψ 将自伴元映为自伴元, 所以综上可知, ψ 是有界的 Jordan $*$ 同态.

推论 2.8.1 设 $\varphi:E(\mathcal{A})\to E(H)$ 是同态, 且满足

$$\begin{aligned}&\varphi(A)\le\varphi(B)\Rightarrow A\le B,\\&\varphi(\lambda A)=\lambda\varphi(A),\forall\lambda\in[0,1],A\in E(\mathcal{A}),\end{aligned}$$

如果 $\mathcal{A}$ 是交换的 von-Neumman 代数, 则 φ 可以延拓到 $\psi:\mathcal{A}\to B(H)$ 上的有界 $*$ 同态.

证 由定理 2.8 可知, φ 可以延拓到 $\psi:\mathcal{A}\to B(H)$ 上有界的 Jordan$*$ 同态. 对任意投影 $P,Q\in\mathcal{A}$, 因为 $\mathcal{A}$ 是交换的，所以 $PQ=QP$. 因此 PQ 是投影, 则存在相互正交的投影 p_1,q_1,r, 使得 $P=p_1+r,Q=q_1+r$. 故 $\psi(P)\psi(Q)=(\psi(p_1)+\psi(r))(\psi(q_1)+\psi(r))=\psi(r)=\psi(PQ)$. 又任意 $A,B\in E(\mathcal{A})$, 存在相互正交的投影 $P_i\in E(\mathcal{A}),i=1,2,\cdots n\cdots$. 及 $Q_j\in E(\mathcal{A}),j=1,2,\cdots m\cdots$. 使得

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\lambda_iP_i,B=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\mu_jQ_j,$$

则

$$\begin{aligned}\psi(AB)&=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\psi(\sum_{i=1}^{n}\lambda_iP_i\sum_{j=1}^{m}\mu_jQ_j)=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\psi(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{j=1}^{m}\mu_jP_iQ_j)\\&=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{j=1}^{m}\mu_j\psi(P_iQ_j))=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{j=1}^{m}\mu_j\psi(P_i)\psi(Q_j))\\&=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\psi(P_i)\sum_{j=1}^{m}\mu_j\psi(Q_j))=\lim_{n\to\infty}\psi(\sum_{i=1}^{n}\lambda_iP_i)\lim_{m\to\infty}\psi(\sum_{j=1}^{m}\mu_jQ_j)\\&=\psi(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\lambda_iP_i)\psi(\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\mu_jQ_j)=\psi(A)\psi(B).\end{aligned}$$

因此综上可知 ψ 是 $\mathcal{A}\to B(H)$ 上的有界 $*$ 同态.

引理 2.9 设 $\mathcal{M}=E(\mathbb{C}^n), E(H)$, 或 $E(\mathcal{A})$, $\mathcal{A}$ 是 von-Neumman 代数. 若 $\varphi:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ 是单态射, 则 $\varphi(\lambda A)=\lambda\varphi(A)$, 任意 $A\in\mathcal{M}, \lambda\in[0,1]$.

证 由文 [1] 中单态射的定义可知, φ 是双边保序的, 且保单位元.

$$\varphi(A)=\varphi((n/n)A)=\varphi(A/n)+\varphi(A/n)+\cdots\varphi(A/n)=n\varphi(A/n),$$

任意 $n\in\mathbb{N}$. 所以 $\varphi(A/n)=1/n\varphi(A)$. 同理可证 $\varphi(nA/m)=n/m\varphi(A), n,m\in\mathbb{N}, n\leq m$. 则对于任意有理数 $\mu\in[0,1]$, 有 $\varphi(\mu A)=\mu\varphi(A)$ 成立. 对于无理数 $\lambda\in[0,1]$, 取一列单调递增的有理数列 $\{a_i\}$ 使得 $\lim\limits_{i\to\infty}a_i=\lambda$, 即 $\sup_i a_i=\lambda$. $\forall A\in\mathcal{M}, \bigvee_i a_iA=\lambda A$. $a_iA\leq\lambda A$. 因为 φ 是保序的, 所以 $\varphi(a_iA)\leq\varphi(\lambda A)$. 故 $\bigvee\varphi(a_iA)\leq\varphi(\lambda A)$. 即

$$\lambda\varphi(A)\leq\varphi(\lambda A).$$

又因为 $\bigvee\varphi(a_iA)\geq\varphi(a_iA)$, φ^{-1} 也是保序的, 所以

$$\varphi^{-1}(\bigvee\varphi(a_iA))\geq\varphi^{-1}(\varphi(a_iA)),$$

即 $\varphi^{-1}(\bigvee\varphi(a_i))\geq(a_iA)$. 因此 $\varphi^{-1}(\bigvee\varphi(a_iA))\geq\bigvee(a_iA)$, 即 $(\bigvee\varphi(a_iA))\geq\varphi(\bigvee(a_iA))$. 即 $\lambda\varphi(A)\geq\varphi(\lambda A)$. 综上可知 $\varphi(\lambda A)=\lambda\varphi(A)$. 所以对于任意 $\lambda\in[0,1], \varphi(\lambda A)=\lambda\varphi(A)$.

推论 2.9.1 设 $\varphi:E(\mathbb{C}^n)\to E(\mathbb{C}^n)$ 单态射, 则存在 H 上的酉算子或反酉算子 U, 使得 $\varphi(A)=UAU^*, A\in E(\mathbb{C}^n)$.

证 因为 φ 是单态射, 由文献 [1] 中的证明可知, φ 是单射. 由单态射的定义知 φ 是双边保序的, 且保单位元. 所以 φ 是保正交补的. 任意 $P, P^{'}\in E(\mathbb{C}^n), P+P^{'}=I$,

$$I=\varphi(P+P^{'})=\varphi(P)+\varphi(P^{'}),$$

则 $\varphi(P')=I-\varphi(P)=\varphi(P)^{'}$. 如果 φ 是满射, 则 φ 是正交序自同构. 下证 φ 是满射. 首先将 φ 延拓到正矩阵 $M_n(\mathbb{C})^+$ 上. 令 $\varphi_1:M_n(\mathbb{C})^+\to M_n(\mathbb{C})^+$. 若 $A=0$, 定义 $\varphi_1(A)=0$. 若 $0\neq A\in M_n(\mathbb{C})^+$, 定义 $\varphi_1(A)=\|A\|\varphi(A/\|A\|)$. 则由定理 2.7 的证明可知, φ_1 对正元可加且满足 $\varphi_1(\lambda A)=\lambda\varphi_1(A)$, 任意 $\lambda\geq0, A\in M_n(\mathbb{C})^+$. 如果 $\varphi_1(A)=\varphi_1(B)$, 则

$$\|A\|\varphi(A/\|A\|)=\|B\|\varphi(B/\|B\|).$$

设 $\|A\|\geq\|B\|$, 则由引理 2.9 可得

$$\varphi(A/\|A\|)=\|B\|/\|A\|\varphi(B/\|B\|)=\varphi(B/\|A\|).$$

因为 φ 是单射, 所以可得 $A=B$, 即 φ_1 是单射.

进一步将 φ_1 延拓到所有实矩阵 $M_s(\mathbb{C})$ 上. 定义 $\varphi_2:M_s(\mathbb{C})\to M_s(\mathbb{C})$, $\varphi_2(A)=\varphi_1(A^+)-\varphi_1(A^-)$,$A^+$ 和 A^- 分别是 A 的正的部分和负的部分. 则类似定理 2.8 可证 φ_2 是实线性的, 且 φ_2 也是单射. 若 $\varphi_2(A)=\varphi_2(B)$, 即

$$\varphi_1(A^+)-\varphi_1(A^-)=\varphi_1(B^+)-\varphi_1(B^-).$$

进一步可得

$$\varphi_1(A^+) + \varphi_1(B^-) = \varphi_1(A^-) + \varphi_1(B^+).$$

又 φ_1 对正元可加, 因此可得 $\varphi_1(A^+ + B^-) = \varphi_1(B^+ + A^-)$. 又因为 φ_1 是单射, 所以 $A^+ + B^- = B^+ + A^-$, 即 $A = B$. 将 φ_2 延拓到整个矩阵代数上. 定义 $\psi : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$, $\psi(A) = \varphi_2(\mathrm{Re}A) + i\psi(\mathrm{Im}A)$, $(\mathrm{Re}A)$ 和 $\mathrm{Im}A$ 分别是 A 的实部和虚部. 则可证 ψ 是线性的, 因为 φ_2 是单射, 所以可证 ψ 是单射. 又因为 ψ 是有限维到有限维的线性映射, 所以 ψ 也是满的. 因此 $\psi|_{E(\mathbb{C}^n)}$ 也是满的, 故 φ 是双边保序及保正交补的双射. 则由 Ludwig 的结论 [4] 可得, 存在酉算子或反酉算子 U, 使得任意 $A \in E(\mathbb{C}^n)$, 有 $\varphi(A) = UAU^*$ 成立.

参 考 文 献

[1] Pulmannová S. Tensor products of Hillbert space effect algebras[J]. Reports on Math. Physics, 2004, 53(2): 301–316.

[2] Molnár L. Sequential isomorphisms between the sets of von Neuman algebra effects[J]. Acta Sci. Math. (Szeged), 2003, 69: 755–772.

[3] Gudder S. Lattice properties of quantum effects[J]. Math. Phys., 1996, 37(6): 2637–2642.

[4] Ludwig G. Foundations of quantum mechanics[M]. Springer Verlag, 1983.

[5] Kadision R V, Ringrose J R. Fundamentals of the theory of operator algebras[M]. Volume I: Elementary Theory, London: Academic Press, Inc., 1997.

HOMOMORPHISM ON EFFECT ALGEBRAS

ZHANG Hai-yan[1] , HOU Cheng-jun[2]

(*1.School of Mathematics Statistics, Chifeng College, Chifeng 024001, China*)

(*2.School of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou 225002, China*)

Abstract: In this paper, we study the problems of homomorphics on the effect algebra $E(H)$ of a separable Hillbert space H whose dimension is equal to or more than three. Using the projections and linear extension methods, we obtain that each surjective and strong σ-orthcomplete homomorphism has the form $\varphi(A) = UAU^*$, and prove hat each homomorphism from $E(\mathcal{A})$ into $E(H)$ satisfying homogeneity and preserving order in one side can be extended to a bounded $*$-homomorphism from an abelian von-Neumann algebra $\mathcal{A}$ into $B(H)$.

Keywords: homomorphism; effect algebra; von-Neumann algebra; projection; Jordan $*$ homomorphism

2010 MR Subject Classification: 47B65; 46L10