

一个新的具有单调降失效率的寿命分布

吕晓星, 彭 维, 刘禄勤
(武汉大学数学与统计学院, 湖北 武汉 430072)

摘 要: 本文由 Pareto 分布和 Logarithmic 分布“混合”生成两参数具有单调降失效率的新型寿命分布, 研究了该分布的矩、熵、失效率函数、平均剩余寿命和参数的极大似然估计, 应用 EM 算法求参数的极大似然估计, 进行了数值模拟.

关键词: Pareto 分布; Logarithmic 分布; 极大似然估计; 失效率函数

MR(2010) 主题分类号: 60E05; 62E15

中图分类号: O211.3

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2015)05-1233-12

1 引言

具有单调失效率的寿命分布可以用来模拟可靠性、生存分析、保险精算等许多领域的寿命数据, 关于这些分布的统计推断引起了很多统计学者的兴趣.

随着寿命分布理论逐步发展, 人们提出了各种新型的寿命分布. 设 $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ 为独立同分布随机变量序列, 它们的共同分布函数为已知的寿命分布函数 $G(x)$; 另设 N 是与 $\{\xi_n\}$ 相互独立的随机变量, 其分布律为 $p_k = P(N = k), k = 1, 2, \dots$. 令 $X = \min\{\xi_i : 1 \leq i \leq n\}$, 称 X 为由 N 与 $\{\xi_n\}$ “混合”而成的新型寿命分布. Adamidis 和 Loukas^[1] 设 $G(x)$ 为指数分布, N 服从几何分布, 混合得到的新分布称之为 Exponential-Geometric 分布. 随后 Kus^[2] 假定 $G(x)$ 服从指数分布, N 服从泊松分布, 混合成新分布 Exponential-Poisson 分布. Tahmasbi 和 Rezaei^[3] 取 $G(x)$ 为指数分布, N 为 logarithmic 分布, 所得到的新分布称为 Exponential-Logarithmic 分布. Chahkandi 和 Ganjali^[4] 假定 $G(x)$ 仍为指数分布, N 为二项分布, 构成的新分布命名为 Exponential-Binomial 分布. Barreto-Souza 等^[5] 取 $G(x)$ 为 Weibull 分布, N 服从几何分布, 将混合得到的新分布称为 Weibull-Geometric 分布. 姚惠等 (2011)^[6] 令 $G(x)$ 服从 Pareto 分布, N 服从 Geometric 分布, 生成新分布 Pareto-Geometric 分布. 这些文献提出了一些具有单调失效率的寿命分布, 得到了这些分布的各种性质, 极大似然估计的存在唯一性, 并进行了数值模拟.

Pareto 分布常常用来描述各种社会经济、物理以及生物现象, 并且在军事领域、天文领域也有应用. Soliman^[7] 提及了 Pareto 分布作为寿命分布模型的重要性. Johnson 等^[8] 详细研究了 Logarithmic 作为计数分布的重要性以及它的各种性质. 本文将上述 $G(x)$ 取为 Pareto 分布, N 取为 Logarithmic 分布, 混合成一个新的寿命分布, 称为 Pareto-Logarithmic 分布, 研究了该分布的矩、熵、失效率函数、平均剩余寿命和参数极大似然估计, 应用 EM 算法求参数的极大似然估计, 并进行了蒙特卡罗模拟.

*收稿日期: 2014-04-05 接收日期: 2014-10-16

基金项目: 国家自然科学基金 (11171263).

作者简介: 吕晓星 (1990-), 男, 河南信阳, 硕士, 主要研究方向: 概率统计.

2 分布的定义

设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ 为独立同分布的随机变量序列, 其共同的分布是形状参数为 $\beta > 0$ 的 Pareto 分布, 即分布函数为 $G(x; \beta) = [1 - (x + 1)^{-\beta}]I_{(0, +\infty)}(x)$, 又设 N 是与 $\{\xi_i, i = 1, 2, \dots\}$ 相互独立的随机变量, 且服从参数为 $p \in (0, 1)$ 的 Logarithmic 分布, 其分布律为

$$P_N(n; p) = \frac{(1-p)^n}{-n \ln(p)}, n = 1, 2, \dots.$$

令 $X = \min\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$, 则 X 的分布函数为

$$F_X(x; p, \beta) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_N(n; p) \{1 - [1 - G(x)]^n\} = \left\{1 - \frac{\ln[1 - (1-p)(x+1)^{-\beta}]}{\ln p}\right\} I_{(0, +\infty)}(x), \quad (2.1)$$

其概率密度函数为

$$f_X(x; p, \beta) = \frac{\beta}{-\ln p} \frac{(1-p)(x+1)^{-(\beta+1)} I_{(0, +\infty)}(x)}{1 - (1-p)(x+1)^{-\beta}}. \quad (2.2)$$

仿文献 [1-6], 给出如下定义:

定义 2.1 称 (2.1) 或 (2.2) 式给出的分布是参数为 p, β 的 Pareto-Logarithmic 分布 (简称 PL 分布), 记为 $PL(p, \beta)$, 其中参数 $p \in (0, 1), \beta \in (0, +\infty)$.

由 (2.2) 式可得, $\forall p, \beta, f_X(x; p, \beta)$ 关于 x 都是单调递减的. 图 1 给出 $f_X(x; p, \beta)$ 在参数取某些特定值时的图像.

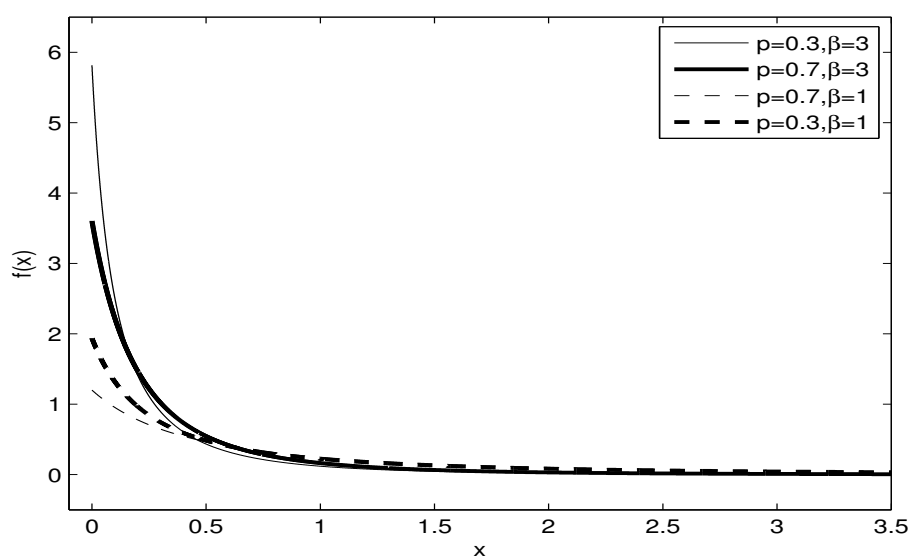


图 1: $PL(p, \beta)$ 概率密度的图像, $p = 0.3, 0.7, \beta = 1, 3$.

3 分布的性质

按照文 [9] 的定义, 称分布函数 $F(x)$ 为厚尾分布, 如果它的尾函数 $S(x) = 1 - F(x)$ 以幂函数形式衰减, 即满足 $1 - F(x) = x^{-\frac{1}{r}} l_F(x)$, $r > 0$, 这里 l_F 是无穷远处的缓变函数, 即对所有的 $\eta > 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{l_F(\eta x)}{l_F(x)} = 1$.

由 (2.1) 式, 易见 $PL(p, \beta)$ 是厚尾分布.

由文 [3] 的定义, 密度函数为

$$g_X(x; p, \beta) = \frac{\beta}{-\ln p} \frac{(1-p)e^{-\beta x} I_{(0, +\infty)}(x)}{1 - (1-p)e^{-\beta x}}$$

的分布称为 Exponential-Logarithmic 分布, 记为 $EL(p, \beta)$ 分布, 其中参数 $p \in (0, 1)$, $\beta \in (0, +\infty)$.

如果 $X \sim PL(p, \beta)$, 则由 (2.2) 式易得 $Y := \ln(X+1) \sim EL(p, \beta)$.

设 $0 < r < 1$, 由 (2.1) 式可得 $PL(p, \beta)$ 的 r 分位数为 $(\frac{1-p}{1-p^{1-r}})^{\frac{1}{\beta}} - 1$. 特别地, 中位数为 $(1 + p^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{\beta}} - 1$.

记 $\Phi(z, s, v) := \sum_{n=0}^{\infty} (v+n)^{-s} z^n$ 为高等超越函数 (详见文 [10]).

定理 3.1 设 $X \sim PL(p, \beta)$, 则有

(1) 设 k 为正整数, 当 $\beta > k$ 时, $PL(p, \beta)$ 分布的 k 阶矩为

$$E(X^k) = -\frac{(1-p)}{\ln p} \sum_{j=0}^k C_k^j (-1)^{k-j} \Phi(1-p, 1, 1 - \frac{j}{\beta}).$$

特别地, 当 $\beta > 1$ 时,

$$E(X) = -\frac{(1-p)}{\ln p} \Phi(1-p, 1, 1 - \frac{1}{\beta}) - 1.$$

(2) 当 $\beta > 2$ 时, $PL(p, \beta)$ 分布的方差为

$$\text{Var}(X) = -\frac{(1-p)}{\ln p} \Phi(1-p, 1, 1 - \frac{2}{\beta}) - \frac{(1-p)^2}{(\ln p)^2} \Phi^2(1-p, 1, 1 - \frac{1}{\beta}).$$

证 (1) 当 $\beta > k$ 时, 利用 (2.2) 式和泰勒展开, 有

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \int_0^{\infty} x^k \frac{\beta}{-\ln p} \frac{(1-p)(x+1)^{-(\beta+1)}}{1 - (1-p)(x+1)^{-\beta}} dx \\ &= \int_1^{\infty} (x-1)^k \frac{\beta}{-\ln p} (1-p)x^{-(\beta+1)} \sum_{i=0}^{+\infty} (1-p)^i x^{-\beta i} dx \\ &= -\frac{(1-p)}{\ln p} \sum_{j=0}^k C_k^j (-1)^{k-j} \Phi(1-p, 1, 1 - \frac{j}{\beta}). \end{aligned}$$

(2) 当 $\beta > 2$ 时,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= -\frac{(1-p)}{\ln p} \sum_{j=0}^2 C_2^j (-1)^{2-j} \Phi(1-p, 1, 1 - \frac{j}{\beta}) - (-\frac{(1-p)}{\ln p} \Phi(1-p, 1, 1 - \frac{1}{\beta}) - 1)^2 \\ &= -\frac{(1-p)}{\ln p} \Phi(1-p, 1, 1 - \frac{2}{\beta}) - \frac{(1-p)^2}{(\ln p)^2} \Phi^2(1-p, 1, 1 - \frac{1}{\beta}). \end{aligned}$$

熵是度量随机变量不确定性的工具. 熵有很多种, 其中 Renyi 熵^[11] 和 Shannon 熵^[12] 比较常用, 我们先回顾相关定义.

定义 3.1 对于一个密度函数为 $f(\cdot)$ 的非负随机变量 X ,

(1) 其 Renyi 熵为 $I_R(r) = \frac{1}{1-r} \ln \int_0^{+\infty} f(x)^r dx$, 这里 $r > 0, r \neq 1$;

(2) 其 Shannon 熵为 $E[-\ln f(X)]$.

下面给出 $PL(p, \beta)$ 分布的 Renyi 熵和 Shannon 熵,

$$\begin{aligned} I_R(r) &= \frac{1}{1-r} \ln \int_0^{+\infty} f^r(x; p, \beta) dx = \frac{1}{1-r} \ln \int_0^{+\infty} \frac{\beta^r}{(-1)^r \ln^r p} \frac{(1-p)^r (x+1)^{-r(\beta+1)}}{(1-(1-p)(x+1)^{-\beta})^r} dx \\ &= \frac{1}{1-r} \ln \int_0^{+\infty} \frac{\beta^r (1-p)^r}{(-1)^r \ln^r p} (x+1)^{-r(\beta+1)} \left[1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{r \cdots (r+j-1)}{j!} (1-p)^j (x+1)^{-\beta j} \right] dx \\ &= \frac{1}{1-r} \ln \frac{\beta^r (1-p)^r}{(-1)^r \ln^r p} \left[\frac{1}{r(\beta+1)-1} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{r \cdots (r+j-1)}{j!} (1-p)^j \frac{1}{(j+r)\beta+r-1} \right], \end{aligned}$$

这里要求 $r > \frac{1}{\beta+1}, r \neq 1$,

$$\begin{aligned} E[-\ln f(X)] &= \ln(-\ln p) - \ln \beta - \ln(1-p) - \int_0^{+\infty} \ln(x+1)^{-(\beta+1)} f(x; p, \beta) dx \\ &\quad + \int_1^{+\infty} \ln(1-(1-p)x^{-\beta}) d\left[1 - \frac{\ln(1-(1-p)x^{-\beta})}{\ln p}\right] \\ &= \ln(-\ln p) - \ln \beta - \ln(1-p) + \frac{\ln p}{2} + \frac{\beta+1}{-\ln p} \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^{j+1} \frac{1}{\beta(j+1)^2}. \end{aligned}$$

下面研究 PL 分布的失效率函数和平均剩余寿命, 先回顾相关定义. 对分布密度函数为 $f(x)$, 分布函数为 $F(x)$ 的非负随机变量 X , 其生存函数为 $S(x) := 1 - F(x)$, 失效率函数为 $h(x) := \frac{f(x)}{S(x)}$, 平均剩余寿命为 $m(x) := E(X-x|X \geq x)$.

寿命分布类及其基本性质是可靠性理论的一个重要研究分支, 详细讨论可参看文献 [13-14]. 近几年, 有关年龄性质的研究很活跃, 一些新的年龄性质被陆续引入, 年龄性质的可靠性特征也渐渐被人们发掘. 我们先回顾相关年龄性质的定义.

定义 3.2 设 X 是非负随机变量, 其分布函数、生存函数以及失效率函数分别为 $F(t)$ 、 $\bar{F}(t)$ 以及 $h(t)$. 称 X 具有

- (1) DFR(decreasing failure rate) 性质, 如果 $h(t)$ 是单调递减函数;
- (2) DFRA(decreasing failure rate average) 性质, 如果 $\frac{\int_0^t h(u) du}{t}, \forall t > 0$ 单调递减;
- (3) NWU(new worse than used) 性质, 如果 $\forall t, x > 0$, 都有 $\bar{F}(t+x) \geq \bar{F}(t)\bar{F}(x)$;
- (4) NWUFR(new worse than used in failure rate) 性质, 如果 $\forall t > 0$, 都有 $h(t) \leq h(0)$;
- (5) NWAFFR(new worse than used average in failure rate) 性质, 如果 $\forall t > 0$, 都有

$$\frac{\int_0^t h(u) du}{t} \leq h(0).$$

有关上述年龄性质的详细讨论见 Nanda 等^[15].

定理 3.2 $PL(p, \beta)$ 分布具有如下特性:

(1) 失效率函数为

$$h(x; p, \beta) = \frac{-\beta(1-p)(x+1)^{-(\beta+1)}I_{(0,+\infty)}(x)}{[1-(1-p)(x+1)^{-\beta}]\ln[1-(1-p)(x+1)^{-\beta}]},$$

对所有的 p, β , $h(x; p, \beta)$ 关于 x 都单调递减, 即 PL 分布具有 DFR 性质, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x; p, \beta) = \frac{-\beta(1-p)}{p \ln p}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x; p, \beta) = 0.$$

(2) 当 $\beta > 1$ 时, 平均剩余寿命为

$$m(x; p, \beta) = \frac{-(x+1)^{-\beta+1}(1-p)\Phi((1-p)(x+1)^{-\beta}, 1, 1 - \frac{1}{\beta})}{\ln(1-(1-p)(x+1)^{-\beta})} - (x+1),$$

$m(x; p, \beta)$ 关于 x 单调递增, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} m(x; p, \beta) = E(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} m(x; p, \beta) = +\infty.$$

证 (1) 由 (2.1) 式易见 $PL(p, \beta)$ 分布的生存函数为

$$S(x; p, \beta) = 1 - F(x; p, \beta) = \left\{ \frac{\ln[1-(1-p)(x+1)^{-\beta}]}{\ln p} \right\} I_{(0,+\infty)}(x),$$

从而可得其失效率函数为

$$h(x; p, \beta) = \frac{-\beta(1-p)(x+1)^{-(\beta+1)}I_{(0,+\infty)}(x)}{[1-(1-p)(x+1)^{-\beta}]\ln[1-(1-p)(x+1)^{-\beta}]},$$

其中参数 $p \in (0, 1), \beta \in (0, +\infty)$, 从而求得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x; p, \beta) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\beta(1-p)(x+1)^{-(\beta+1)}}{[1-(1-p)(x+1)^{-\beta}]\ln[1-(1-p)(x+1)^{-\beta}]} = \frac{-\beta(1-p)}{p \ln p}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x; p, \beta) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\beta(1-p)(x+1)^{-(\beta+1)}}{[1-(1-p)(x+1)^{-\beta}]\ln[1-(1-p)(x+1)^{-\beta}]} = 0. \end{aligned}$$

令

$$\eta(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-(1-p)(x+1)^{-(\beta+1)} + (\beta+1)(x+1)^{-1}}{1-(1-p)(x+1)^{-\beta}}.$$

记

$$q(x) = -(1-p)(x+1)^{-(\beta+1)} + (\beta+1)(x+1)^{-1},$$

由于 $q(x)$ 是单调递减的, 故 $\eta(x)$ 单调递减, 根据文 [16] Glaser 定理可得 $h(x; p, \beta)$ 是单调递减的, 即具有 DFR 性质.

(2) 由平均剩余寿命的定义以及 (2.2) 式可得, 当 $x > 0, \beta > 1$ 时, $PL(p, \beta)$ 分布的平均剩余寿命为

$$\begin{aligned} m(x; p, \beta) &= \frac{E[(X-x)I_{(X>x)}]}{p(X>x)} \\ &= \frac{-(x+1)^{-\beta+1}(1-p)\Phi((1-p)(x+1)^{-\beta}, 1, 1 - \frac{1}{\beta})}{\ln(1-(1-p)(x+1)^{-\beta})} - (x+1). \end{aligned}$$

由 $h(x; p, \beta)$ 单调递减可知 $m(x; p, \beta)$ 关于 x 单调递增, 且

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} m(x; p, \beta) &= -\frac{(1-p)}{\ln p} \Phi(1-p, 1, 1 - \frac{1}{\beta}) - 1 = E(x), \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} m(x; p, \beta) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-(1-p)(x+1)^{-\beta+1} \sum_{j=0}^{+\infty} [\frac{1}{1+j-\frac{1}{\beta}} - \frac{1}{1+j}](1-p)^j (x+1)^{-\beta j}}{\ln(1 - (1-p)(x+1)^{-\beta})} \\ &= +\infty, \end{aligned}$$

这里因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-(1-p)(x+1)^{-\beta}}{\ln(1 - (1-p)(x+1)^{-\beta})} = 1.$$

注 由于 $PL(p, \beta)$ 分布具有 DFR 性质, 由文献 [15] 可以得到 $PL(p, \beta)$ 分布具有 DFRA、NWU、NWUFR、NWAFLR 性质.

图 2 给出 $h_X(x; p, \beta)$ 在参数取某些特定的值时的图像.

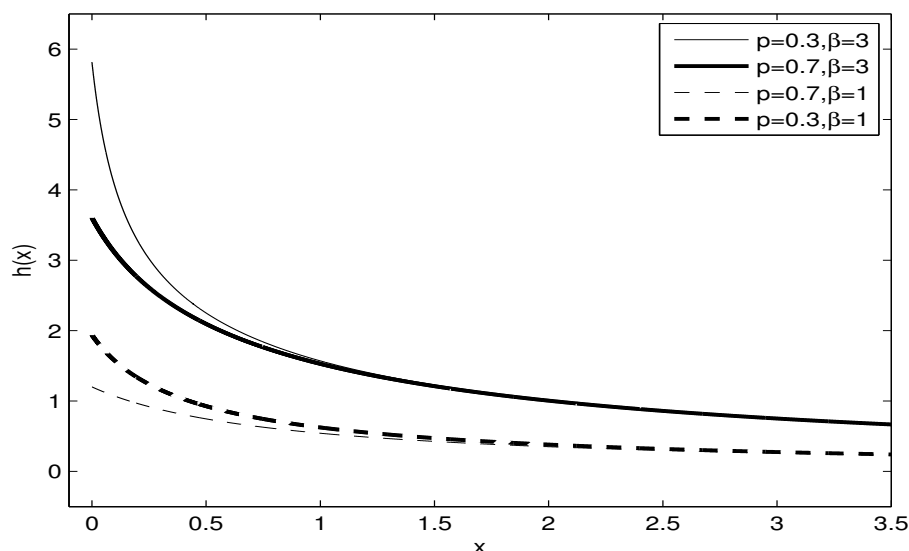


图 2: $PL(p, \beta)$ 失效率函数的图像, $p = 0.3, 0.7, \beta = 1, 3$.

4 参数的估计

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为取自于 $PL(p, \beta)$ 分布的简单随机样本, 样本观察值为 $\{x_i, i = 1, 2, \dots, n\}$, 记 $x_{obs} = (x_i, i = 1, 2, \dots, n)$, 则由 (2.2) 式可得其似然函数为

$$L(p, \beta; x_{obs}) = \prod_{i=1}^n \frac{\beta}{-\ln p} \frac{(1-p)(x_i+1)^{-(\beta+1)} I_{(0,+\infty)}(x_i)}{1 - (1-p)(x_i+1)^{-\beta}};$$

对数似然函数为

$$l(p, \beta; x_{obs}) = n \ln \beta - n \ln(-\ln p) + n \ln(1-p) - (\beta+1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i+1) - \sum_{i=1}^n \ln(1-(1-p)(x_i+1)^{-\beta});$$

似然方程组为

$$\frac{\partial l}{\partial p} = -\frac{n}{p \ln p} - \frac{n}{1-p} - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i+1)^{-\beta}}{1-(1-p)(x_i+1)^{-\beta}} = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n \ln(x_i+1) - \sum_{i=1}^n \frac{(1-p)(x_i+1)^{-\beta} \ln(x_i+1)}{1-(1-p)(x_i+1)^{-\beta}} = 0. \quad (4.2)$$

似然方程的解就是参数的极大似然估计, 下面讨论 $PL(p, \beta)$ 分布两参数 p, β 在一个参数确定时, 另一个参数极大似然估计的存在唯一性, 得到了与文献 [3] 定理 1 和定理 2 类似的结论.

定理 4.1 设 $PL(p, \beta)$ 分布中参数 p 已知, 则关于 β 的方程 (4.2) 在有唯一解 $\hat{\beta}$, 且解在 (pt^{-1}, t^{-1}) 中, 这里 $t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i+1)$, 且 $\hat{\beta}$ 是参数 β 的相合估计.

证 记

$$g(\beta; p) = \frac{\partial l}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n \ln(x_i+1) - \sum_{i=1}^n \frac{(1-p)(x_i+1)^{-\beta} \ln(x_i+1)}{1-(1-p)(x_i+1)^{-\beta}},$$

$$\omega(\beta) = \sum_{i=1}^n \frac{(1-p)(x_i+1)^{-\beta} \ln(x_i+1)}{1-(1-p)(x_i+1)^{-\beta}},$$

因为 $\omega(\beta)$ 关于 β 是单调递减的且 $\omega(\beta) > 0$, 故有

$$g(\beta; p) < \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n \ln(x_i+1),$$

当 $\beta > t^{-1}$ 时, 有 $g(\beta; p) < 0$, 另 $\lim_{\beta \rightarrow 0} \omega(\beta) = \frac{1-p}{p} \sum_{i=1}^n \ln(x_i+1)$, 故

$$g(\beta; p) > \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n \ln(x_i+1) - \frac{1-p}{p} \sum_{i=1}^n \ln(x_i+1) = \frac{n}{\beta} - \frac{n}{p} t,$$

故当 $\beta < pt^{-1}$ 时, 有 $g(\beta; p) > 0$, 所以方程 (4.2) 在 (pt^{-1}, t^{-1}) 区域内至少有一解, 在其它区域无解. 又因为

$$g'(\beta; p) = -\frac{n}{\beta^2} + \sum_{i=1}^n \frac{(1-p)(x_i+1)^{-\beta} \ln^2(x_i+1)}{[1-(1-p)(x_i+1)^{-\beta}]^2},$$

如果 $g'(\beta; p)$ 对所有的 $\beta > 0$ 都是单调的, 因为 $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} g'(\beta; p) = 0$, 故 $g(\beta; p)$ 关于 β 单调, 解的唯一性得证. 如果 $g'(\beta; p)$ 并不是对所有的 $\beta > 0$ 都是单调的, 设 β_0 为 $g'(\beta; p) = 0$ 的根, 则

$$\frac{n}{\beta_0} = \sum_{i=1}^n \frac{(1-p)(x_i+1)^{-\beta_0} \ln^2(x_i+1)}{[1-(1-p)(x_i+1)^{-\beta_0}]^2}.$$

得到

$$g(\beta_0; p) = \sum_{i=1}^n \ln(x_i + 1) \frac{(1-p)\beta_0(x_i + 1)^{-\beta_0} \ln(x_i + 1) - 1 + (1-p)(x_i + 1)^{-\beta_0}}{[1 - (1-p)(x_i + 1)^{-\beta_0}]^2}.$$

令

$$m(\beta_0) = (1-p)\beta_0(x_i + 1)^{-\beta_0} \ln(x_i + 1) - 1 + (1-p)(x_i + 1)^{-\beta_0},$$

因为 $m(\beta_0)$ 关于 p 单调递减, 故

$$m(\beta_0) < \beta_0(x_i + 1)^{-\beta_0} \ln(x_i + 1) + (x_i + 1)^{-\beta_0} - 1 < 0,$$

从而对所有的 β_0 都有 $g(\beta_0; p) < 0$, 即 $g(\beta; p)$ 的稳定点都有 $g(\beta; p) < 0$, 又因为 $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} g(\beta; p) = -nt < 0$, 故 (4.2) 式的解唯一.

容易验证文 [17] 中定理 2.13 的条件, 故极大似然估计 $\hat{\beta}$ 关于 β 是相合的. 证毕.

注 当参数 p 已知时, 在实际工作中, 如果由历史数据知 β 不会很小, 可假定 β 的参数空间为 $\Theta_\beta = (\varepsilon, \infty)$, 其中 $\varepsilon > 0$ 为很小的常数, 则经计算得

(1)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x)}{\partial \beta} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial \beta^2} dx = 0;$$

(2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln f(x)}{\partial \beta} &= \frac{1}{\beta} - \ln(x+1) - \frac{(1-p)(x+1)^{-\beta} \ln(x+1)}{1 - (1-p)(x+1)^{-\beta}}, \\ E\left[\frac{1}{\beta} - \ln(X+1) - \frac{(1-p)(X+1)^{-\beta} \ln(X+1)}{1 - (1-p)(X+1)^{-\beta}}\right]^2 &< +\infty; \end{aligned}$$

(3)

$$\left| \frac{\partial^3 \ln f(x)}{\partial \beta^3} \right| < \frac{2}{\varepsilon^3} + \frac{2[\ln(x+1)]^3}{p^3} = H(x),$$

且 $E[H(X)] < +\infty$. 故根据文 [17] 定理 2.14, 可知 $\hat{\beta}$ 是关于 β 的渐近正态估计.

定理 4.2 设 $PL(p, \beta)$ 分布中参数 β 已知, 则关于 p 的方程 (4.1) 在

$$\Lambda_n := \{n < 2 \sum_{i=1}^n (x_i + 1)^{-\beta}\}$$

上至少有一解, 且 $P(\Lambda_n) \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$.

证 根据式 (4.1) 可得

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{\partial l}{\partial p} = +\infty, \quad \lim_{p \rightarrow 1} \frac{\partial l}{\partial p} = \frac{n}{2} - \sum_{i=1}^n (x_i + 1)^{-\beta}.$$

故在 Λ_n 上方程 (4.1) 在 $p \in (0, 1)$ 内至少有一解, 存在性得证. 根据 (2.2) 式可求得

$$E((X_i + 1)^{-\beta}) = \int_0^\infty (x+1)^{-\beta} f_X(x; p, \beta) dx = \frac{1}{1-p} + \frac{1}{\ln p},$$

显然 $\frac{1}{1-p} + \frac{1}{\ln p}$ 关于 p 在 $(0, 1)$ 内单调递减且 $\lim_{p \rightarrow 1} \frac{1}{1-p} + \frac{1}{\ln p} = \frac{1}{2}$, 故有 $E((X_i + 1)^{-\beta}) > \frac{1}{2}$, 根据大数定律有 $P(\Lambda_n) \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$. 证毕.

由于极大似然方程组的表达式比较复杂, 不容易求解, 而 EM 算法是一种具有良好性质的稳定简单的迭代算法 (详见文 [18]). 下面我们给出 $PL(p, \beta)$ 分布的极大似然估计的 EM 算法.

设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s \dots$ 为取自于参数为 β 的 Pareto 分布的简单随机样本. Z 是与 $\xi_s (s = 1, 2, \dots)$ 独立的随机变量, 且服从参数为 p 的 Logarithmic 分布, 令 $X = \min\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_Z\}$, 则 X 和 Z 的联合概率密度函数为

$$f(x, z; p, \beta) = \frac{(1-p)^z}{-\ln p} \beta (x+1)^{-(\beta z+1)} I_{(0, +\infty)}(x),$$

这里 $z = 1, 2, \dots$, 参数 $p \in (0, 1), \beta \in (0, +\infty)$. Z 关于 X 的条件概率密度为

$$\begin{aligned} P_{Z|X}(z|x; p, \beta) &= P(Z = z | X = x) \\ &= (1-p)^{z-1} (x+1)^{-\beta(z-1)} [1 - (1-p)(x+1)^{-\beta}] I_{(0, +\infty)}(x), \end{aligned}$$

这里 $z = 1, 2, \dots$, 参数 $p \in (0, 1), \beta \in (0, +\infty)$. 则 Z 关于 X 的条件期望为

$$E(Z|X; p, \beta) = [1 - (1-p)(x+1)^{-\beta}]^{-1}.$$

当初值选取 $(p^{(0)}, \beta^{(0)})$ 时, 不妨设 $p^{(t)}, \beta^{(t)}$ 为第 $t+1$ 次迭代开始时的估计值. 其 EM 算法的迭代公式为

$$\beta^{(t+1)} = n \left[\sum_{i=1}^n \frac{\ln(x_i + 1)}{1 - (1-p^{(t)})(x_i + 1)^{-\beta^{(t)}}} \right]^{-1}; \quad (4.3)$$

$$p^{(t+1)} = \frac{-n(1-p^{(t+1)})}{\ln(p^{(t+1)}) \sum_{i=1}^n [1 - (1-p^{(t)})(x_i + 1)^{-\beta^{(t)}}]^{-1}}. \quad (4.4)$$

因为 $Mx \ln x + n(1-x) = 0 (M > n)$ 在 $x \in (0, 1)$ 里只有一个解, 故可以采用二分法迭代求出 $p^{(t+1)}$.

按照通常的大样本理论, 参数 $\theta = (p, \beta)'$ 的极大似然估计 $(\hat{p}, \hat{\beta})'$ 近似地服从二元正态分布 $N(\theta, J(\theta)^{-1})$, 其中 $J(\theta) = E(I; \theta) = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}$, 而 $I = I(\theta, x_{obs}) = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix}$ 为观测信息矩阵, 由式 (4.1) 和 (4.2) 求得

$$\begin{aligned} I_{11} &= -\frac{\partial^2 l}{\partial^2 p} = -\frac{n(\ln p + 1)}{p^2 \ln^2 p} + \frac{n}{(1-p)^2} - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i + 1)^{-2\beta}}{[1 - (1-p)(x_i + 1)^{-\beta}]^2}, \\ I_{12} &= I_{21} = -\frac{\partial^2 l}{\partial p \partial \beta} = -\sum_{i=1}^n \frac{\ln(x_i + 1)(x_i + 1)^{-\beta}}{[1 - (1-p)(x_i + 1)^{-\beta}]^2}, \\ I_{22} &= -\frac{\partial^2 l}{\partial^2 \beta} = \frac{n}{\beta^2} - (1-p) \sum_{i=1}^n \frac{\ln^2(x_i + 1)(x_i + 1)^{-\beta}}{[1 - (1-p)(x_i + 1)^{-\beta}]^2}. \end{aligned}$$

记

$$g(a) = \int_1^a \frac{\ln x}{1-x} dx,$$

应用如下积分公式

$$\begin{aligned} \int \frac{2u \ln u}{(1-u)^3} du &= \frac{u^2 \ln u}{(1-u)^2} - \frac{1}{1-u} - \ln(1-u). \\ \int \frac{u(\ln u)^2}{(1-u)^3} du &= \frac{u^2 \ln^2 u}{2(1-u)^2} - \frac{u \ln u}{(1-u)} - \ln(1-u)[\ln u + 1] + \int \frac{\ln(1-u)}{u} du. \end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned} E\left[\frac{(X+1)^{-2\beta}}{[1-(1-p)(X+1)^{-\beta}]^2}\right] &= -\frac{1}{(1-p)^2 \ln p} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2p^2} - \frac{2}{p} - \ln p\right); \\ E\left[\frac{\ln(X+1)(X+1)^{-\beta}}{[1-(1-p)(X+1)^{-\beta}]^2}\right] &= -\frac{1-p+p \ln p}{2\beta p(1-p) \ln p}; \\ E\left[\frac{\ln^2(X+1)(X+1)^{-\beta}}{[1-(1-p)(X+1)^{-\beta}]^2}\right] &= \frac{1}{\beta^2(1-p)} + \frac{g(p)}{\beta^2(1-p) \ln p}. \end{aligned}$$

从而求得

$$\begin{aligned} J_{11} &= -\frac{n(\ln p + 1)}{p^2 \ln^2 p} + \frac{n}{(1-p)^2} + \frac{n}{(1-p)^2 \ln p} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2p^2} - \frac{2}{p} - \ln p\right); \\ J_{12} = J_{21} &= n \frac{1-p+p \ln p}{2\beta p(1-p) \ln p}; \\ J_{22} &= -n \frac{g(p)}{\beta^2 \ln p}. \end{aligned}$$

于是 $J(p, \beta)^{-1}$ 在 $\hat{\theta}$ 的值就给出了参数 θ 极大似然估计的渐近协方差阵, 记为 $\widehat{J^{-1}}(\hat{p}, \hat{\beta})$.

5 数值模拟

以下给定不同初始值, 分别在不同的样本容量下进行 1000 次 Monte-Carlo 模拟 (迭代容差为 0.0001), 最后用 EM 算法求得 (p, β) 的极大似然估计.

假设 1000 次模拟所得到的参数的估计值为 $\hat{p}_i, \hat{\beta}_i, i = 1, 2, \dots, 1000$.

记样本均值为

$$\text{MEAN}(p) = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} \hat{p}_i, \text{MEAN}(\beta) = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} \hat{\beta}_i;$$

样本标准差为

$$\text{SD}(p) = \sqrt{\frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (\text{MEAN}(p) - \hat{p}_i)^2}, \quad \text{SD}(\beta) = \sqrt{\frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (\text{MEAN}(\beta) - \hat{\beta}_i)^2};$$

表 1: $PL(p, \beta)$ 分布参数 (p, β) 的极大似然估计

n	(p, β)	$(p^{(0)}, \beta^{(0)})$	$MEAN(p)$	$SD(p)$	$MSE(p)$	$MEAN(\beta)$	$SD(\beta)$	$MSE(\beta)$	α_1	α_2
50	(0.5,1)	(0.5,1)	0.6109	0.3126	0.1080	1.0406	0.2382	0.0585	0.909	0.974
	(0.5,2)	(0.5,2)	0.6219	0.3180	0.1128	2.1040	0.4866	0.2439	0.899	0.976
	(0.5,3)	(0.5,3)	0.6225	0.3166	0.1102	3.1473	0.7101	0.5169	0.898	0.973
	(0.2,1)	(0.2,1)	0.3147	0.2688	0.0892	1.1010	0.3270	0.1201	0.929	0.977
	(0.8,1)	(0.8,1)	0.7519	0.2824	0.0809	0.9950	0.1828	0.0337	0.905	0.967
100	(0.5,1)	(0.8,1.5)	0.5907	0.2767	0.0848	1.0361	0.1842	0.0352	0.918	0.972
	(0.5,2)	(0.2,0.5)	0.5773	0.2687	0.0782	2.0570	0.3551	0.1293	0.917	0.970
	(0.5,3)	(0.1,0.1)	0.5852	0.2746	0.0827	3.0883	0.5517	0.3121	0.920	0.973
	(0.2,1)	(0.1,0.1)	0.2544	0.1700	0.0318	1.0470	0.2241	0.0524	0.907	0.945
	(0.8,1)	(0.1,0.1)	0.7547	0.2590	0.0691	0.9800	0.1472	0.0221	0.895	0.954
500	(0.5,1)	(0.1,10)	0.5376	0.1544	0.0253	1.0147	0.0911	0.0085	0.950	0.946
	(0.5,2)	(0.5,0.5)	0.5296	0.1500	0.0234	2.0160	0.1806	0.0329	0.949	0.960
	(0.5,3)	(0.5,2)	0.5265	0.1490	0.0229	3.0272	0.2684	0.0728	0.944	0.960
	(0.2,1)	(0.5,4)	0.2102	0.0590	0.0036	1.0093	0.0941	0.0089	0.937	0.952
	(0.8,1)	(0.7,2)	0.7992	0.1601	0.0257	0.9997	0.0706	0.0050	0.952	0.978
1000	(0.5,1)	(0.5,1)	0.5152	0.1024	0.0107	1.0053	0.0644	0.0042	0.953	0.952
	(0.5,2)	(0.5,1)	0.5111	0.1028	0.0107	2.0054	0.1284	0.0165	0.943	0.951
	(0.5,3)	(0.5,1)	0.5125	0.1009	0.0103	3.0141	0.1892	0.0360	0.957	0.954
	(0.2,1)	(0.5,1)	0.2062	0.0393	0.0016	1.0064	0.0650	0.0043	0.939	0.950
	(0.8,1)	(0.5,1)	0.7966	0.1344	0.0181	0.9955	0.0551	0.0031	0.946	0.969

样本均方误差为

$$MSE(p) = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (\hat{p}_i - p)^2, MSE(\beta) = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (\hat{\beta}_i - \beta)^2.$$

多元正态分布 $N_2(0, \widehat{J}^{-1}(\hat{p}, \hat{\beta}))$ 可以用来构造参数 p, β 的渐近置信区间. 其中 p 的水平为 $1 - \eta$ 的渐近置信区间为 $\hat{p} \pm z_{\frac{\eta}{2}} [\widehat{\text{var}}(\hat{p})]^{\frac{1}{2}}$, β 的 $1 - \eta$ 渐近置信区间为 $\hat{\beta} \pm z_{\frac{\eta}{2}} [\widehat{\text{var}}(\hat{\beta})]^{\frac{1}{2}}$. 这里 $\widehat{\text{var}}(\cdot)$ 为 $\widehat{J}^{-1}(\hat{p}, \hat{\beta})$ 中对应参数对角元素的值, 而 $z_{\frac{\eta}{2}}$ 表示标准正态分布的 $1 - \frac{\eta}{2}$ 分位点. 在这 1000 次模拟中, α_1 为 p 的 95% 置信区间的实际覆盖率, α_2 为 β 的 95% 置信区间的实际覆盖率.

从表 1 可以看出, 用 EM 算法求得的极大似然估计可以很好的反应参数的真实值, 选定不同的初值对估计的影响不大, 并且随着样本容量 n 的增大, 估计的偏差越来越小, 估计的精度就越来越高. 当 p 固定时, β 越小, 极大似然估计对 β 的估计效果越好, 对 p 估计变化效果不明显. 当 β 固定时, p 越小, 极大似然估计对 p 的估计效果越好, 对 β 估计变化效果不明显. 总的来说, 当 p, β 的值越小, MLE 估计的效果越好.

参 考 文 献

- [1] Adamidis K, Loukas S. A lifetime distribution with decreasing failure rate[J]. Stat. Prob. Letters, 1998, 39(1): 35-42.
- [2] Kus C. A new lifetime distribution[J]. Comput. Stat. Data Anal., 2007, 51(9): 4497-4509.
- [3] Tahmasbi R, Rezaei S. A two-parameter lifetime distribution with decreasing failure rate[J]. Comput. Stat. Data Anal., 2008, 52(8): 3889-3901.

- [4] Chahkandi M, Ganjali M. On some lifetime distributions with decreasing failure rate[J]. Comput. Stat. Data Anal., 2009, 53(12): 4433–4440.
- [5] Barreto-Souza W, Morais A L, Cordeiro G M. The Weibull-geometric distribution[J]. J. Stat. Comput. Simul., 2011, 81(5): 645–657.
- [6] 姚惠, 戴勇, 谢林. Pareto-Geometric 分布 [J]. 数学杂志, 2012, 32(2): 340–351.
- [7] Soliman A A. Bayes prediction in a Pareto lifetime model with random sample size[J]. J. Royal Stat. Soc. Series D, 2000, 49(1): 51–62.
- [8] Johnson N L, Kemp A W, Kotz S. Univariate discrete distributions[M]. Hoboken: John Wiley and Sons, 2005.
- [9] 欧阳资生. 厚尾分布的极值分位数估计与极值风险测度研究 [J]. 数理统计与管理, 2008, 27(1): 70–75.
- [10] Erdélyi A, Magnus W, Oberhettinger F, et al. Higher transcendental functions[M]. New York: McGraw-Hill, 1953.
- [11] Renyi A. On measures of entropy and information[A]. Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability[C]. Berkeley: University of California Press, 1961: 547–561.
- [12] Shannon C E. Prediction and entropy of printed English[J]. Bell Sys. Tech. J., 1951, 30(1): 50–64.
- [13] Barlow R E, Proschan F. Statistical theory of reliability and life testing: probability models[R]. Tallahassee: Florida State University, 1975.
- [14] Cheng Kan. Class of life distribution and mathematical theory of reliability[J]. Science Press, 1999: 97–136.
- [15] Nanda A K, Das S. Dynamic proportional hazard rate and reversed hazard rate models[J]. J. Stat. Plan. Infer., 2011, 141(6): 2108–2119.
- [16] Glaser R E. Bathtub and related failure rate characterizations[J]. J. American Stat. Assoc., 1980, 75(371): 667–672.
- [17] 茆诗松, 王静龙, 濮晓龙. 高等数理统计 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.
- [18] McLachlan G, Krishnan T. The EM algorithm and extensions[M]. Hoboken: John Wiley and Sons, 2007.

A NEW LIFETIME DISTRIBUTION WITH DECREASING FAILURE RATE

LÜ Xiao-xing, PENG Wei, LIU Lu-qin

(School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: In this paper, we introduce a new two-parameter lifetime distribution with decreasing failure rate. By using mixing Pareto distribution and logarithmic distribution, various properties such as moment, entropy, failure rate function and mean residual lifetime are studied and the MLE of parameters are discussed. The EM algorithm is used to determine the maximum likelihood estimates. Simulation study are performed.

Keywords: Pareto distribution; Logarithmic distribution; maximum likelihood estimation; failure rate function

2010 MR Subject Classification: 60E05; 62E15