Vol. 35 (2015)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

Stokes 型积分 - 微分方程 $Q_2 - P_1$ 元的超收敛分析

牛裕琪 [1]，石东洋 [2]

(1. 许昌学院数学与统计学院, 河南 许昌 461000)

(2. 郑州大学数学与统计学院, 河南 郑州 450001)

摘 要: 本文研究 $Q_2 - P_1$ 混合元对 Stokes 型积分 - 微分方程的有限元方法. 利用积分恒等式技巧给出了关于流体速度 u 和压力 p 的误差估计, 特别是在压力 p 的误差中去掉了影响解的稳定性的因子 $t^{-\frac{1}{2}}$, 改善了以往文献的结果. 同时, 通过构造适当的插值后处理算子得到了整体超收敛结果.

关键词: Stokes 型积分 - 微分方程; $Q_2 - P_1$ 混合元; 插值后处理; 超逼近和超收敛

MR(2010) **主题分类号**: 65N30; 65N15 **中图分类号**: O242.21

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2015)05-1225-08

1 引言

本文讨论如下的 Stokes 型积分 - 微分方程 [1]:

$$\begin{cases} u_t - \triangle u - \displaystyle\int_0^t \triangle u(x,\tau)d\tau + \nabla p = f(X,t), & (X,t) \in \Omega \times (0,T], \\ \mathrm{div} u = 0, & (X,t) \in \Omega \times (0,T], \\ u(X,t) = 0, & (X,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \\ u(X,0) = 0, & X \in \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

这里 $u = (u_1, u_2)$ 是流体速度, p 为压力,$f = (f_1, f_2)$ 是体积力密度.

Stokes 问题是流体力学中的一个非常重要的问题, 关于 Stokes 问题的有限元研究已经有很多结果 [2−6]. 但是对 Stokes 型积分微 - 分方程的研究并不多见, 主要原因是该方程包含积分项, 而对于积分项的处理比较困难. 为了求它的近似解, 文 [1, 7] 利用 Ritz-Volterra 投影在正则网格下讨论了问题 (1.1) 的 Galerkin 近似, 论证了近似解的存在唯一性, 并分别导出速度 u 和压力 p 近似解的最优阶 L^2 - 模误差估计. 文 [8] 在各向异性网格下研究了该方程的 Bernadi-Raugel 混合元逼近, 给出了半离散格式下的收敛性分析. 同时通过高精度分析技巧和适当的插值后处理技术导出了关于速度 u 的超逼近和整体超收敛结果. 文 [9] 首先利用积分恒等式技巧给出了关于压力 p 在 L^2 - 模意义下 $O(h^2)$ 阶估计, 这比以往文献中的收敛结果高一阶. 同时, 通过构造适当的插值后处理算子得到了整体超收敛结果. 文 [10] 将一个 Crouzeix-Raviart 型非协调三角形元应用于此类方程, 而文 [11] 又将其推广至质量集中的情形, 但它们都需要利用一个所谓辅助空间的技巧, 这使得证明过程比较复杂.

*收稿日期: 2013-11-11 接收日期: 2014-04-23

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11101381; 11271340); 教育部高等学校博士学科专项基金资助 (20094101110006).

作者简介: 牛裕琪 (1969–), 女, 河南许昌, 教授, 主要研究方向: 有限元方法及应用.

本文的目的是利用文 [12] 中的思路来研究 Stokes 型积分 - 微分问题的 Q_2-P_1 混合有限元方法, 得到了流体速度 u 在 $L^2(0,T;H^1)$ 意义下的最优误差估计, 这比通常的误差估计高一阶; 尤其是对于压力 p, 得到的结果与以往结果相比, 去掉了因子 $t^{-\frac{1}{2}}$, 保证了解具有更好的稳定性. 同时通过一些新的方法和技巧导出了超逼近性质, 进而通过插值后处理方法得到了比以往结果高一阶的整体超收敛性质.

2 Stokes 型积分 - 微分方程的半离散格式及解的存在唯一性

令 $V=(H_0^1(\Omega))^2, P=L_0^2(\Omega)=\{q,q\in L^2(\Omega),\int_\Omega qdxdy=0\}$. 则相应于 (1.1) 的变分问题为: 求 $(u,p)\in L^2(0,T;V)\times L^2(0,T;P)$, 满足

$$\begin{cases} (u_t,v)+a(u,v)+\int_0^t a(u,v)d\tau-(p,\mathrm{div}v)=(f,v) \quad \forall v\in V,\\ (q,\mathrm{div}u)=0 \qquad\qquad \forall q\in P,\\ u(X,0)=0,\end{cases} \tag{2.1}$$

其中 $a(u,v)=\int_\Omega \nabla u\nabla vdxdy,(f,v)=\int_\Omega fvdxdy.$

为简单起见, 设 Ω 是 R^2 中一个有界矩形区域, 其边界 $\partial\Omega$ 分别平行于 x 轴或 y 轴. J_h 是 Ω 的一个正则剖分, $\forall K\in J_h$, 记 K 的中心点为 (x_K,y_K), 两条边长分别为 $2h_x,2h_y$, 其顶点分别为 $a_1=(x_K-h_x,y_K-h_y),a_2=(x_K+h_x,y_K-h_y),a_3=(x_K+h_x,y_K+h_y),a_4=(x_K-h_x,y_K+h_y)$, $l_1=\overline{a_1a_2}$, $l_2=\overline{a_2a_3}$, $l_3=\overline{a_3a_4}$ 及 $l_4=\overline{a_4a_1}$ 分别为其四条边.

考虑 J_h 上混合元 Q_2-P_1 元空间 $V_h\times P_h$, 其定义为 [5]:

$$\begin{aligned} &V_h=\{v\in (H^1(\Omega))^2; v|_K\in (Q_2(K))^2, v|_{\partial\Omega}=0,\forall K\in J_h\},\\ &P_h=\{p\in L^2(\Omega); p|_K\in P_1(K),\int_\Omega pdxdy=0,\forall K\in J_h\},\end{aligned} \tag{2.2}$$

这里 $V_h\times P_h\subset V\times P$.

那么相应式 (2.1) 的有限元离散格式为: 求 $(u_h,p_h)\in L^2(0,T;V_h)\times L^2(0,T;P_h)$, 满足

$$\begin{cases} (\frac{\partial u_h}{\partial t},v_h)+a(u_h,v_h)+\int_0^t a(u_h,v_h)d\tau-(p_h,\mathrm{div}v_h)=(f,v_h), \quad \forall v_h\in V_h,\\ (q_h,\mathrm{div}u_h)=0, \qquad\qquad \forall q_h\in P_h,\\ u_h(0)=0.\end{cases} \tag{2.3}$$

易知 $a(\cdot,\cdot)$ 在 $V_h\times V_h$ 满足强制性, 即存在正常数 α, 使得

$$a(v,v)\le \alpha\|v\|_1^2, \quad \forall v\in V_h. \tag{2.4}$$

文 [13–14] 已经证明了 (V_h,P_h) 满足 LBB 条件, 即存在与 h 无关的正常数 $\beta>0$ 使得

$$\sup_{w_h\in V_h}\frac{(q_h,\mathrm{div}w_h)}{\|w_h\|_1\|q_h\|_0}\ge\beta>0, \quad \forall q_h\in P_h. \tag{2.5}$$

根据文献 [15] 中第一章引理 4.1, 可证明问题 (2.3) 的解 $(u_h,p_h)\in L^2(0,T;V_h)\times L^2(0,T;P_h)$ 存在唯一.

在一般单元 K 上定义如下的插值算子, 设 $u\in L^2(0,T;(H^2(\Omega))^2)$, $p\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, 则 $u^I=(u_1^I,u_2^I)\in L^2(0,T;V_h), p_h\in L^2(0,T;P_h)$ 满足以下条件:

$$\begin{cases} u^I(a_i)=u(a_i), & i=1,2,3,4, \\ \int_{l_i} u^I ds=\int_{l_i} uds, & i=1,2,3,4, \\ \int_K u^I dxdy=\int_K udxdy, \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\int_K (p-p^I)qds=0, \quad \forall q\in P_1(K). \tag{2.7}$$

3 Q_2-P_1 元的最优误差估计及超逼近分析

为了得出最优误差估计, 先给出如下引理.

引理 3.1 [16] 令 $\omega=u-u^I,\gamma=p-p^I$, 则当 $u\in L^2(0,T;(H^4(\Omega))^2)$ 时,

$$(\nabla\omega,\nabla v)=O(h^3)|u|_4|v|_1, \quad \forall v\in V_h, \tag{3.1}$$

$$(\mathrm{div}\omega,q)=O(h^3)|u|_4\|q\|_0, \quad \forall q\in P_h, \tag{3.2}$$

且当 $p\in L^2(0,T;H^3(\Omega)), J_h$ 为均匀网格时, 有

$$(\gamma,\mathrm{div}v)=O(h^3)|p|_3|v|_1, \quad \forall v\in V_h. \tag{3.3}$$

定理 3.2 设 $(u,p)\in L^2(0,T;V)\times L^2(0,T;P)$ 和 $(u_h,p_h)\in L^2(0,T;V_h)\times L^2(0,T;P_h)$ 分别为问题 (2.1) 和 (2.3) 的解, 则当 $u\in L^2(0,T;(H^4(\Omega))^2)$, $u_t\in L^2(0,T;(H^3(\Omega))^2)$, $p\in L^2(0,T;H^3(\Omega))$ 时, 有

$$\| u-u_h \|_0\le Ch^3\Big[|u|_3+\Big(\int_0^t(|u|_4^2+|u_t|_3^2+|p|_3^2)d\tau\Big)^{\frac12}\Big],$$

当 $u,u_t\in L^2(0,T;(H^3(\Omega))^2)$, $p,p_t\in L^2(0,T;H^2(\Omega))$ 时, 有

$$|u-u_h|_1\le Ch^2\Big(|u|_3^2+|p|_2^2+\int_0^t(|u|_3^2+|u_t|_2^2+|u_t|_3^2+|p_t|_2^2)d\tau\Big)^{\frac12}.$$

更进一步, 当 $u,u_t\in L^2(0,T;(H^4(\Omega)\bigcap H_0^1(\Omega))^2)$, $p,p_t\in L^2(0,T;H^3(\Omega))$ 时, 有

$$|u^I-u_h|_1\le Ch^3\Big(|u|_4^2+|p|_3^2+\int_0^t(|u|_4^2+|u_t|_3^2+|u_t|_4^2+|p_t|_3^2)d\tau\Big)^{\frac12}.$$

证 令 $u-u_h=(u-u^I)+(u^I-u_h)=\eta+\theta$, 由式 (2.1) 和 (2.3) 得

$$(\theta_t,v_h)+a(\theta,v_h)+\int_0^t a(\theta,v_h)d\tau=-(\eta_t,v_h)-a(\eta,v_h)-\int_0^t a(\eta,v_h)d\tau+(p-p^I,\mathrm{div}v_h). \tag{3.4}$$

在 (3.4) 式中取 $v_h=\theta$, 考虑到

$$\int_0^t a(\theta(\tau),\theta(t))d\tau\le\int_0^t|\theta(\tau)|_1|\theta(t)|_1d\tau, \tag{3.5}$$

由 Young 不等式, 插值理论及引理 3.1 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|_0^2+|\theta|_1^2\\
\leq\ &\|\eta_t\|_0\|\theta\|_0+Ch^3|u|_4|\theta|_1+Ch^3\int_0^t|u|_4|\theta|_1d\tau+Ch^3|p|_3|\theta|_1-\int_0^t a(\theta(\tau),\theta(t))d\tau\\
\leq\ &Ch^6(|u_t|_3^2+|u|_4^2+\int_0^t|u|_4^2d\tau+|p|_3^2)+\|\theta\|_0^2+\frac{1}{4}|\theta|_1^2+\int_0^t|\theta(\tau)|_1^2d\tau+\frac{1}{4}|\theta|_1^2.
\end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|_0^2+\frac{1}{2}|\theta|_1^2\leq Ch^6(|u_t|_3^2+|u|_4^2+\int_0^t|u|_4^2d\tau+|p|_3^2)+\|\theta\|_0^2+\int_0^t|\theta(\tau)|_1^2d\tau. \tag{3.6}$$

对 (3.6) 式两端从 0 到 t 积分, 且 $\theta(0)=0$, 则有

$$\|\theta\|_0^2+\int_0^t|\theta(\tau)|_1^2d\tau\leq Ch^6\int_0^t(|u_t|_3^2+|u|_4^2+|p|_3^2)d\tau+\int_0^t(\|\theta\|_0^2+\int_0^\tau|\theta(s)|_1^2ds)d\tau,$$

由 Gronwall 不等式得

$$\|\theta\|_0^2+\int_0^t|\theta|_1^2d\tau\leq Ch^6\int_0^t(|u_t|_3^2+|u|_4^2+|p|_3^2)d\tau, \tag{3.7}$$

从而有

$$\|\theta\|_0^2\leq Ch^6\int_0^t(|u_t|_3^2+|u|_4^2+|p|_3^2)d\tau. \tag{3.8}$$

再利用三角不等式得

$$\|u-u_h\|_0\leq\|\theta\|_0+\|u-u^I\|_0\leq Ch^3\Big[|u|_3+\Big(\int_0^t(|u_t|_3^2+|u|_4^2+|p|_3^2)d\tau\Big)^{\frac{1}{2}}\Big].$$

即定理第一式成立.

另一方面, 在 (3.4) 式中取 $v_h=\theta_t$, 注意到

$$\int_0^t a(\theta(\tau),\theta_t(t))d\tau=\frac{d}{dt}\int_0^t a(\theta(\tau),\theta(t))d\tau-|\theta|_1^2, \tag{3.9}$$

且由 Young 不等式得

$$\begin{aligned}
&\|\theta_t\|_0^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\theta|_1^2+\frac{d}{dt}\int_0^t a(\theta(\tau),\theta(t))d\tau\\
\leq\ &\|\eta_t\|_0\|\theta_t\|_0-\frac{d}{dt}a(\eta(t),\theta(t))+a(\eta_t,\theta(t))-\frac{d}{dt}\int_0^t a(\eta(\tau),\theta(t))d\tau+a(\eta(t),\theta(t))\\
&+\frac{d}{dt}(p-p^I,\mathrm{div}\theta)-((p-p^I)_t,\mathrm{div}\theta)+|\theta|_1^2\\
\leq\ &C|\theta|_1^2+\|\theta_t\|_0^2+Ch^4(|u_t|_2^2+|u_t|_3^2+|u|_3^2+|p_t|_2^2)\\
&-\frac{d}{dt}a(\eta(t),\theta(t))-\frac{d}{dt}\int_0^t a(\eta(\tau),\theta(t))d\tau+\frac{d}{dt}(p-p^I,\mathrm{div}\theta).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

对 (3.10) 式两端从 0 到 t 积分, 并注意到 $\theta(0)=0$, 则有

$$\begin{aligned}|\theta|_1^2 \quad\le\quad & C\int_0^t|\theta|_1^2d\tau+Ch^4\int_0^t(|u_t|_2^2+|u_t|_3^2+|u|_3^2+|p|_2^2)d\tau-a(\eta(t),\theta(t))\\ &-\int_0^t a(\eta(\tau),\theta(t))d\tau+(p-p^I,\mathrm{div}\theta)-2\int_0^t a(\theta(\tau),\theta(t))d\tau.\end{aligned}$$

由插值理论及 (3.5) 式, 类似于 (3.6) 式的估计, 利用 Young 不等式, 上式可化为

$$|\theta|_1^2\le Ch^4\Big[\int_0^t(|u_t|_2^2+|u_t|_3^2+|u|_3^2+|p_t|_2^2)d\tau+|u|_3^2+|p|_2^2\Big]+C\int_0^t|\theta|_1^2d\tau,$$

再次利用 Gronwall 不等式得

$$|\theta|_1^2\le Ch^4\Big[\int_0^t(|u_t|_2^2+|u_t|_3^2+|u|_3^2+|p_t|_2^2)d\tau+|u|_3^2+|p|_2^2\Big].$$

再利用三角不等式, 即可得定理第二式.

类似于定理第二式的证明, 在 (3.10) 式中利用引理 3.1, 可得定理第三式.

定理 3.3 设 $(u,p)\in L^2(0,T;V)\times L^2(0,T;P)$ 和 $(u_h,p_h)\in L^2(0,T;V_h)\times L^2(0,T;P_h)$ 分别为问题 (2.1) 和 (2.3) 的解, 则当 $u,u_t\in L^2(0,T;(H^3(\Omega))^2)$, $u_{tt}\in L^2(0,T;(H^2(\Omega))^2)$, $p,p_t\in L^2(0,T;H^2(\Omega))$ 时, 有

$$\begin{aligned}\|\, p^I-p_h\,\|_0 \quad\le\quad & Ch^2\Big[|p|_2+\big(|u|_3^2+|u_t|_2^2+|u_t|_2^2+|u_t(0)|_2^2+|u_t(0)|_4^2+|p(0)|_3^2\\ &+\int_0^t(|u|_3^2+|p|_2^2+|u_t|_2^2+|u_t|_3^2+|u_{tt}|_2^2++|p_t|_2^2)d\tau\big)^{\frac12}\Big].\end{aligned}$$

证 记 $e=u-u_h$, 由方程 (2.1) 和 (2.3) 知 e 满足

$$(p^I-p_h,\mathrm{div}v_h)=(e_t,v_h)+(\nabla e,\nabla v_h)+\int_0^t(\nabla e,\nabla v_h)d\tau-(p-p^I,\mathrm{div}v_h),\qquad \forall v_h\in V_h. \tag{3.11}$$

由 Young 不等式可得 $(p^I-p_h,\mathrm{div}v_h)\le C\|e_t\|_0\|v_h\|_0+(|e|_1+\int_0^t|e|_1d\tau)|v_h|_1+Ch^2|p|_2|v_h|_1$, 即

$$(p^I-p_h,\mathrm{div}v_h)\le C\big(\|e_t\|_0+|e|_1+\int_0^t|e|_1d\tau+h^2|p|_2\big)|v_h|_1. \tag{3.12}$$

由 (2.5) 式和 (3.12) 式有

$$\|p^I-p_h\|_0\le C\big(\|e_t\|_0+|e|_1+\int_0^t|e|_1d\tau+h^2|p|_2\big). \tag{3.13}$$

由定理 3.2 可知, 只需估计 $\|e_t\|_0$.

另一方面, 对 (3.4) 两端关于 t 求导得

$$(\theta_{tt},v_h)+a(\theta_t,v_h)+a(\theta,v_h)=-(\eta_{tt},v_h)-a(\eta_t,v_h)-a(\eta,v_h)+((p-p^I)_t,\mathrm{div}v_h). \tag{3.14}$$

在 (3.14) 式中取 $v_h=\theta_t$, 从而

$$(\theta_{tt},\theta_t)+a(\theta_t,\theta_t)+a(\theta,\theta_t)=-(\eta_{tt},\theta_t)-a(\eta_t,\theta_t)-a(\eta,\theta_t)+((p-p^I)_t,\mathrm{div}\theta_t),$$

利用 Young 不等式, 插值理论等, 上式可变为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta_t\|_0^2+|\theta_t|_1^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\theta|_1^2 &\leq \|\eta_{tt}\|_0\|\theta_t\|_0+Ch^2(|u_t|_3+|u|_3+|p_t|_2)|\theta_t|_1\\ &\leq Ch^4(|u_{tt}|_2^2+|u_t|_3^2+|u|_3^2+|p_t|_2^2)+|\theta_t|_1^2+\|\theta_t\|_0^2,\end{aligned}\tag{3.15}$$

对 (3.15) 式两边同时从 0 到 t 积分, 且注意到 $\theta(0)=0$, 有

$$\|\theta_t\|_0^2+|\theta|_1^2\leq Ch^4\int_0^t(|u_{tt}|_2^2+|u_t|_3^2+|u|_3^2+|p_t|_2^2)d\tau+C\int_0^t(\|\theta_t\|_0^2+|\theta|_1^2)d\tau+\|\theta_t(0)\|_0^2,$$

利用 Gronwall 不等式, 上式变为

$$\|\theta_t\|_0^2+|\theta|_1^2\leq Ch^4\int_0^t(|u_{tt}|_2^2+|u_t|_3^2+|u|_3^2+|p_t|_2^2)d\tau+\|\theta_t(0)\|_0^2.\tag{3.16}$$

下面估计 $\|\theta_t(0)\|_0^2$. 在 (3.4) 式中取 $v_h=\theta_t$, 且 $t=0$, 利用插值理论, 引理 3.1, 逆不等式及 Young 不等式得

$$\begin{aligned}\|\theta_t(0)\|_0^2 &= (\theta_t(0),\theta_t(0))+a(\theta(0),\theta_t(0))+\int_0^t a(\theta(0),\theta_t(0))d\tau\\ &= -(\eta_t(0),\theta_t(0))-a(\eta(0),\theta_t(0))+((p-p^I)(0),\mathrm{div}\theta_t(0))\\ &\leq Ch^2|u_t(0)|_2\|\theta_t(0)\|_0+Ch^3|u_t(0)|_4|\theta_t(0)|_1+Ch^3|p(0)|_3|\theta_t(0)|_1\\ &\leq Ch^4|u_t(0)|_2^2+\frac{1}{4}\|\theta_t(0)\|_0^2+Ch^2|u_t(0)|_4|\theta_t(0)|_0+Ch^2|p(0)|_3|\theta_t(0)|_0\\ &\leq Ch^4(|u_t(0)|_2^2+|u_t(0)|_4^2+|p(0)|_3^2)|+\frac{3}{4}\|\theta_t(0)\|_0^2,\end{aligned}$$

即

$$\|\theta_t(0)\|_0^2\leq Ch^4(|u_t(0)|_2^2+|u_t(0)|_4^2+|p(0)|_3^2).\tag{3.17}$$

结合式 (3.16), (3.17), 利用三角不等式得到

$$\|e_t\|_0^2\leq Ch^4\big(|u_t|_2^2+|u_t(0)|_2^2+|u_t(0)|_4^2+|p(0)|_3^2+\int_0^t(|u_{tt}|_2^2+|u_t|_3^2+|u|_3^2+|p_t|_2^2)d\tau\big).\tag{3.18}$$

由定理 3.2, (3.13) 式和 (3.18) 式即得 $\|p^I-p_h\|_0\leq Ch^2\Big[|p|_2+\big(A+\int_0^t Bd\tau\big)^{\frac{1}{2}}\Big]$, 其中

$$\begin{aligned}A&=|u|_3^2+|u_t|_2^2+|u_t|_2^2+|u_t(0)|_2^2+|u_t(0)|_4^2+|p(0)|_3^2,\\ B&=|u|_3^2+|p|_2^2+|u_t|_2^2+|u_t|_3^2+|u_{tt}|_2^2+|p_t|_2^2.\end{aligned}$$

定理得证.

注 文 [9] 讨论了 Stokes 型积分 - 微分方程 Bernadi-Raugel 混合元的超收敛分析, 利用本定理的证明方法, 可以有类似的结论. 另一方面, 对比文 [1, 7–9], 本文的估计去掉了 $t^{-\frac{1}{2}}$, 从而改善了这些研究中相应的结果.

4 Q_2-P_1 元的超收敛分析

为了进行超收敛分析, 我们首先将 J_h 中相邻的四个小单元合并成一个大单元, 即 $\tau=\sum\limits_{i=1}^{4}K_i$, $\tau\in J_{2h}$, $K_i\in J_h$. 在 τ 上定义插值后处理算子 I_{2h},J_{2h} 对任意的 $(\omega,p)\in(L^2(0,T;C(\tau))^2\times L^2(0,T;L(\tau)^2),(I_{2h}\omega,J_{2h}p)\in L^2(0,T;(Q_4(\tau))^2)\times L^2(0,T;P_2(\tau))$ 满足

$$\begin{cases} I_{2h}\omega(a_i)=\omega(a_i), & i=1,2,\cdots,9,\\ \displaystyle\int_{l_i}(I_{2h}\omega-\omega)ds=0, & i=1,2,\cdots,12,\\ \displaystyle\int_{K_i}(I_{2h}\omega-\omega)dxdy=0, & i=1,2,3,4,\end{cases}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{K_i}(J_{2h}p-p)dxdy=0, & i=1,2,3,4,\\ \displaystyle\int_{K_i}(J_{2h}p-p)xdxdy=\int_{K_i}(J_{2h}p-p)ydxdy=0, & i=1,2,3,4,\end{cases}$$

这里 K_i,l_i,a_i 分别为小单元及它们的边和顶点. 则文 [17] 中证明了下面的引理

引理 4.1 对任意 $u\in L^2(0,T;(H^4(\Omega))^2)$, 插值算子 I_{2h} 满足

$$I_{2h}u^I=I_{2h}u, \tag{4.1}$$

$$\| I_{2h}u-u\|_1\le Ch^3|u|_4, \tag{4.2}$$

$$\| I_{2h}v\|_1\le C\| v\|_1,\quad \forall v\in V_h. \tag{4.3}$$

定理 4.2 如果 $(u,p)\in L^2(0,T;(H^4(\Omega)\bigcap H_0^1(\Omega))^2)\times L^2(0,T;H^3(\Omega))$, 有如下的整体超收敛结果

$$\| I_{2h}u_h-u\|_1+\| J_{2h}p_h-p\|_0\le Ch^3(|u|_4+|p|_3).$$

证 由于

$$\| I_{2h}u_h-u\|_1\le\| I_{2h}u_h-I_{2h}u\|_1+\| I_{2h}u-u\|_1,$$

由引理 4.1 得

$$\begin{aligned}\| I_{2h}u_h-u\|_1 &\le \| I_{2h}u_h-I_{2h}u^I\|_1+\| I_{2h}u-u\|_1\\ &= \| I_{2h}(u_h-u^I)\|_1+\| I_{2h}u-u\|_1\le Ch^3(|u|_4+|p|_3),\end{aligned}$$

定理得证.

参 考 文 献

[1] 张铁. Stokes 型积分 - 微分方程的 Galerkin 近似 [J]. 高等学校计算数学学报, 1997, (3): 280–285.

[2] Girault V, Raviart P A. Finite method for Navier-Stokes equation, theory and algorithms[M]. Berlin, Herdelberg: Springer-Verlag, 1986.

[3] Temam R. Navier-Stokes equation, theory and numerical analysis[M]. Amsterdam: North-Holland, 1984.

[4] Brezzi F, Fortin M. Mixed and hybrid finite element methods[M]. Berlin, Herdelberg: Springer-Verlag, 1991.
[5] Crouzeix M, Raviart P A. Conforming and nonconforming finite dement methods for solving stationary Stokes equations[J]. RAIRO Anal. Numer., 1973, 7(3): 33–75.
[6] 王烈衡. Stokes 问题的混合有限元分析 [J]. 计算数学, 1987, 9(1): 70–81.
[7] 张铁. 发展型积分 - 微分方程的有限元方法 [M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2001.
[8] 石东洋, 王培珍. 各向异性网格下 Stokes 型积分 - 微分方程 Beradi-Raugel 混合元近似的超收敛分析 [J]. 高等学校计算数学学报, 2010, 32(4): 321–332.
[9] 牛裕琪, 石东洋. Stokes 型积分 - 微分方程 Bernadi-Raugel 混合元的超收敛分析 [J]. 河南师范大学学报, 2011, 39(4): 6–9.
[10] 石东洋, 王培珍. Stokes 型积分 - 微分方程的 Crouzeix-Raviart 型非协调三角形各向异性有限元方法 [J]. 高校应用数学学报, 2009, 24(4): 435–442.
[11] 石东洋, 王慧敏. Stokes 型积分微分方程的质量集中各向异性非协调有限元分析 [J]. 应用数学, 2009, 22(1): 33–41.
[12] Lin Q, Lin J F. Finite element methods: accuracy and improvement[M]. Beijing: Science Press, 2006.
[13] Babuska I. The finite element methods with Lagrangian multipliners[J]. Numer. Math., 1973, 20(3): 179–192.
[14] Brezzi F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliners[J]. RAIRO Anal. Numer., 1974, 8(2): 129–151.
[15] Girault V, Raviart P A. Finite element approximation of the Navier-Stokes equations[M]. Lecture Notes in Math., 749, New York: Springer-Verlag, 1979.
[16] 石东洋, 任金城. Stokes 问题各向异性网格 Q_2-P_1 混合元超收敛分析 [J]. 数学研究, 2008, 41(2): 142–150.
[17] 林群, 严宁宁. 高效有限元构造与分析 [M]. 石家庄: 河北大学出版社, 1996: 69–71.

SUPERCONVERGENCE ANALYSIS OF Q_2-P_1 MIXED ELEMENT SOLUTION TO STOKES TYPE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

NIU Yu-qi[1] , SHI Dong-yang[2]

(*1.School of Mathematics and Statistics, Xuchang University, Xuchang 461000, China*)

(*2.School of Mathematics and Statistics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China*)

Abstract: The Q_2-P_1 mixed finite element method is discussed for the Stokes type integro-differential equations. The error estimations of fluid velocity u and pressure p are given by the integral identity technique. Especially, in the estimation of pressure p the factor $t^{-\frac{1}{2}}$ which influences the stability of solution is removed and thus the existing results are improved accordingly. At the same time, the global superconvergence of order is derived based on the interpolation postprocessing approach.

Keywords: Stokes type integro-differential equations; Q_2-P_1 mixed finite element; postprocessing; supercloseness and superconvergence

2010 MR Subject Classification: 65N30; 65N15