Vol. 35 (2015)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

关于二次域理论求解一类 Diophantus 方程的整数解

邬 毅, 杨 懿, 龙 兰, 王 蕾
(重庆科技学院数理学院, 重庆 401331)

摘 要: 本文研究了两个典型 Diophantus 方程在实二次域中整数解的问题. 利用二次域中的理论和二次代数整数环中算术基本定理, 得到了该类方程的一般解法和在实二次域中的所有整数解的相关结论, 推广了文献 [1] 和 [2] 的结果.

关键词: Diophantus 方程; 整数解; 实二次域
MR(2010) **主题分类号**: 11D45; 11D75 **中图分类号**: O156.7
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2015)05-1197-04

1 引言

关于 Diophantus 方程

$$x^2 + D = 4p^n, \quad n \in Z_+, \tag{1.1}$$

设 $D>0$ 且是适合 $p \nmid D$ 的奇数, 此时方程 (1.1) 是一类基本而重要的广义 Ramanujan-Nagell 方程. 对于该类方程已经有不少研究工作, 但主要是通过讨论虚二次域类数的可除性来解决其解数问题; 此外, 邬毅 [1] 和张丽平 [2] 在虚二次域中分别证明了 Ramanujan-Nagell 方程 $x^2 + 11 = 4y^5$ 仅有整数解 $(x, y) = (\pm 31, 3)$ 和 $x^2 + 7 = 4y^3$ 仅有整数解 $(x, y) = (5, 2)$.

当 $D<0$ 时, 乐茂华 [3] 对于一般的 D 和 p 仅证明了当 $D \neq 4p^r - 1$, 其中 r 是正整数时, 必有其解数 $N(D, p) \leqslant 2$, 而该方程在实二次域中的一般解法却尚未给出. 作为代数数论中的重要组成部分, 二次域及二次域中的算术基本定理对研究该类方程的整数解有着重要作用. 对某些 $D<0$, 其二次域 $Q(\sqrt{D})$ 是实 Euclid 域, 因此在这些二次代数整数环 $\tilde{Q}(\sqrt{D})$ 中算术基本定理仍然成立, 我们可以建立和 Z 中同样的整除理论去求解这些 Diophantus 方程. 为了利用二次域中的重要理论、二次代数整数环 $\tilde{Q}(\sqrt{D})$ 中算术基本定理来研究 Diophantus 方程在实二次域中整数解的问题, 我们先引入 $Z[i]$ 中的整除理论, 它是在唯一分解整环中的性质的一个直接推广.

引理 1.1 [4] 设 F 是一个二次域, 那么一定存在一个无平方因数的有理整数 $D \neq 0, 1$, 使得 $F = Q(\sqrt{D})$.

定义 1.1 [4] 假定 D 满足引理 1.1 中的所说条件 (对这样的 D 一定有 $D \equiv 1, 2$ 或 $3(\mathrm{mode}4)$). 当 $D>0$ 时, 称 $Q(\sqrt{D})$ 是实二次域; 当 $D<0$ 时, 称为虚二次域.

定义 1.2 [4] 设 $\omega_1, \omega_2 \in \tilde{Q}(\sqrt{D})$ 是 $Q(\sqrt{D})$ 的一组基, 如果任意的 $\theta \in \tilde{Q}(\sqrt{D})$ 必可表为 $\theta = u\omega_1 + v\omega_2$, 其中 $u, v \in Z$, 则称 ω_1, ω_2 是 $Q(\sqrt{D})$ 的一组整基, 它也称为是 $\tilde{Q}(\sqrt{D})$ 的一组基.

*收稿日期: 2014-09-21 接收日期: 2014-12-24
基金项目:重庆科技学院优秀中青年骨干教师公派出国 (境) 深造项目 (2012); 重庆市自然科学基金 (cstc2013jcyjA10049).

作者简介: 邬毅 (1982–), 男, 重庆, 讲师, 研究方向: 数论.

引理 1.2 [4] $\alpha \in A_2$(全体 Q 上的 2 次代数数组成的集合) 的充要条件是

$$\alpha = r + s\sqrt{D},$$

其中 $r, s \in Q$, $s \neq 0$ 以及 $D \neq 0$ 是无平方因子的有理整数; $\alpha \in \widetilde{A_2}$ (全体 Q 上的 2 次代数整数组成的集合) 的充要条件是除以上所说的外还要满足

$$2r \in Z, \quad r^2 - Ds^2 \in Z.$$

引理 1.3 [4] 设 D 满足引理 1.2 的条件, 及

$$\omega = \begin{cases} \sqrt{D}, & D = 2,3(\mathrm{mod}4), \\ \frac{-1+\sqrt{D}}{2}, & D = 1(\mathrm{mod}4), \end{cases}$$

那么 α 是二次代数整数的充要条件是它可以表为

$$\alpha = m + n\omega, \quad m, n \in Z, \quad n \neq 0. \tag{1.2}$$

定理 1.1 [4] 当 $D>1$ 时, 对每个 D 必有无穷多个形如式 (1.2) 的单位, 具体的说:

(1) 当 $D = 2,3(\mathrm{mod}4)$ 时, 由 $\pm(m_0 + n_0\omega)^k = \pm(m_0 + n_0\sqrt{D})^k (k = \pm1, \pm2, \cdots)$ 给出所有这种单位数, 其中 m_0, n_0 是 Pell 方程 $m^2 - n^2 = \pm1 (m, n \in Z$ 且 $n \neq 0)$ 的最小正解;

(2) 当 $D = 1(\mathrm{mod}4)$ 时, 由 $\pm(m_0 + n_0\omega)^k = \pm((m_0 - n_0/2) + n_0\sqrt{D}/2)^k$ $(k = \pm1, \pm2, \cdots)$ 给出所有这种单位数, 其中 $x_0 = 2m_0 - n_0, y_0 = n_0$ 是 Pell 方程 $x^2 - Dy^2 = \pm4 (x, y \in Z)$ 的最小正解. $m_0 + n_0\omega$ 称为相应于 D 的二次基本单位数.

定理 1.2 [4] 设 M 是唯一分解环, 正整数 $k \geqslant 2$, 以及 $\alpha, \beta \in M$, $(\alpha, \beta) = \bar{1}$, 那么若 $\alpha\beta = \gamma^k$, $\gamma \in M$, 则有 $\alpha = \varepsilon_1\mu^k$, $\beta = \varepsilon_2\nu^k$, $\mu, \nu \in M$, 其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是 M 中的单位, 且 $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon^k$, ε 为单位.

2 主要结果的证明

下面证明 Diophantus 方程

$$x^2 + D = 4y^5, \qquad x, y \in Z. \tag{2.1}$$

当 $D = -13$ 时, 仅有整数解 $(\pm3, -1)$; 当 $D = -17$ 时, 无整数解.

证 由于当 $D = -13$, -17 时, $Q\left(\sqrt{-D}\right)$ 皆为实 Euclid 域 [5], 我们则可以在 $\tilde{Q}\left(\sqrt{-D}\right)$ 中来讨论 Diophantus 方程 (2.1). 此时, Diophantus 方程 (2.1) 可以化为

$$\left(\frac{x + \sqrt{-D}}{2}\right)\left(\frac{x - \sqrt{-D}}{2}\right) = y^5. \tag{2.2}$$

在实二次域 $Q\left(\sqrt{-D}\right)$ 中, 由定义 1.2 可知 1 和 $\omega = (-1 + \sqrt{-D})/2$ 是一组整基. 不妨设

$$\delta = \left(\frac{x + \sqrt{-D}}{2}, \frac{x - \sqrt{-D}}{2}\right).$$

显然, $\delta|x$, $\delta|\sqrt{-D}$, 由于 $\sqrt{-D}$ 是素数, 则有 $\delta=1$ 或 $\sqrt{-D}$. 但 $\delta=\sqrt{-D}$ 显然不可能, 因为此时必有 $-D|x$, 而这样的 x 显然不是方程 (2.2) 的解, 因此 $\delta=1$, 故 $(x+\sqrt{-D})/2$ 与 $(x-\sqrt{-D})/2$ 互素, 从而有

$$\frac{x+\sqrt{-D}}{2}=\left(\frac{a+b\sqrt{-D}}{2}\right)^5, \tag{2.3}$$

即

$$2^4(x+\sqrt{-D})=(a+b\sqrt{-D})^5.$$

当 $D=-13$, -17 时, 分别有

$$\left\{\begin{array}{l} 2^4x=a(a^4+130a^2b^2+845b^4), \\ 2^4=b(5a^4+130a^2b^2+169b^4), \end{array}\right. \tag{2.4}$$

以及

$$\left\{\begin{array}{l} 2^4x=a(a^4+170a^2b^2+1445b^4), \\ 2^4=b(5a^4+170a^2b^2+289b^4). \end{array}\right. \tag{2.5}$$

由 (2.4) 式可得 $b=\pm1$ 或 $\pm2^k$, 其中 $k=1,2,3,4$.

① 若 $b=1$, 则有 $5a^4+130a^2-153=0$, 显然方程没有整数解;

② 若 $b=-1$, 则有 $a^4+26a^2+57=0$, 此时方程也无整数解;

③ 若 $b=\pm2^k$, 左 $2^4\equiv2^4(\mathrm{mod}2^5)$, 右 $b(5a^4+130a^2b^2+169b^4)\equiv0(\mathrm{mod}2^5)$, 矛盾.

从而 Diophantus 方程 (2.1) 在形如 (2.3) 式的分解下无整数解. 同理可证 (2.5) 式.

另一方面, 因为 $Q\left(\sqrt{-D}\right)$ 是实二次域, 且 $D=-13$, -17 时都有 $-D\equiv1(\mathrm{mod}4)$, 由其单位数的形式, 不妨令 $y=(a+b\sqrt{-D})/2$, 其中 $a,b\in Z$. 由定理 1.1 得, D 的单位数为

$$\varepsilon=\left\{\begin{array}{ll} \pm(2+\omega)^n, & D=-13, \\ \pm(5+2\omega)^n, & D=-17, \end{array}\right. , \qquad n=1,2,3,\cdots.$$

再由定理 1.2, Diophantus 方程 (2.2) 另有分解形式如下

$$\frac{x+\sqrt{-D}}{2}=\varepsilon^n\left(\frac{a+b\sqrt{-D}}{2}\right)^5, \qquad n=\pm1,\pm2,\cdots. \tag{2.6}$$

当 $D=-17$, $n=1$ 时, 有

$$2^4(x+\sqrt{17})=\pm(4+\sqrt{17})(a+b\sqrt{17})^5,$$

即

$$\left\{\begin{array}{c} 4a^5+680a^3b^2+5780ab^4+85a^4b+2890a^2b^3+4913b^5=\pm2^4x, \\ a^5+20a^4b+680a^2b^3+170a^3b^2+1445ab^4+1156b^5=\pm2^4. \end{array}\right. \tag{2.7}$$

(2.7) 式无整数解. 采用 Maple 程序结合赋值法可得: 当 n 取不等于 1 的其他整数的时候, (2.7) 式仍然无整数解, 故当 $D=-17$ 时 Diophantus 方程 (2.2) 无整数解.

当 $D=-13$, $n=1$ 时, 有

$$2^5(x+\sqrt{13})=\pm(3+\sqrt{13})(a+b\sqrt{13})^5,$$

即

$$\begin{cases} 3a^5+390a^3b^2+2535ab^4+65a^4b+1690a^2b^3+2197b^5=\pm2^5x, \\ 15a^4b+390a^2b^3+507b^5+a^5+130a^3b^2+845ab^4=\pm2^5, \end{cases}$$

解得有 $a=\pm2, b=0$, 进而有 $(x,y)=(\pm3,-1)$.

由于当 $D<0$ 且 $D\neq 4p^r-1$(其中 r 是正整数) 时, Diophantus 方程 (2.1) 的解数 $N(D,p)\leqslant 2$[3], 从而当 $D=-13$ 时 Diophantus 方程 (2.1) 仅有整数解 $(\pm3,-1)$, 证毕.

参 考 文 献

[1] 邬毅. 关于不定方程 $x^2+11=4y^5$ 的唯一正整数解 [J]. 高师理科学刊, 2006, 26(2): 7–8.

[2] 张丽平. 关于不定方程 $x^2+7=4y^3$[J]. 长春工程学院学报 (自然科学版), 2007, 8(1): 84–85.

[3] Le Maohua. On the Divisibility of the Class Number of the Imaginary Quadratic Field $Q(\sqrt{a^2-4k^n})$ [J]. Acta Math. Sinica (N.S.), 1989, 5(1): 80–86.

[4] 潘承洞, 潘承彪. 代数数论 (第二版)[M]. 济南: 山东大学出版社, 2001.

[5] 冯克勤. 代数数论 [M]. 北京: 科学出版社, 2000.

[6] 李小燕, 张慧. 关于 Diophantine 方程 $x^2+D=4y^3$[J]. 合肥师范学院学报, 2009, 27(3): 24–25.

[7] 王振, 李小燕. 关于不定方程 $x^2+11=4y^3$[J]. 重庆工商大学学报 (自然科学版), 2009, 26(6): 551–552.

[8] 拓小泉, 王彩宁, 郭金保. 关于不定方程 $x^2+1=Dy^3(D\in N)$ 解的存在性讨论 [J]. 延安大学学报 (自然科学版), 2012, 31(4): 7–8.

SOLVING THE INTEGER SOLUTIONS OF A CLASS OF DIOPHANTINE EQUATIONS BY SONE THEORIES ON QUNDRATIC FIELDS

WU Yi , YANG Yi , LONG Lan , WANG Lei

(*College of Mathematics and Physics, Chongqing University of Science and Technology, Chongqing 401331, China*)

Abstract: In this paper, we study the integer solutions of two typical Diophantine equations on real quadratic fields. By using some theories on quadratic fields and the fundamental theorem of arithmetic on the ring of quadratic algebraic integers, we obtain the general solving method of this class of Diophantine equations and all the integer solutions, which extend some results in reference [1] and [2].

Keywords: Diophantine equation; integer solution; real quadratic fields

2010 MR Subject Classification: 11D45; 11D75